Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, Об аналоге теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 783–786

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:02:45

Об аналоге теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами

Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд

1. Введение. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \dots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ дифференциальный оператор $P(x, D)$ вида

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha:l| \leq 1} a_\alpha(x) D^\alpha \quad (1)$$

с коэффициентами $a_\alpha(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$. Здесь, как обычно, $D = (D_1, \dots, D_n)$, $D_k := -i\partial/\partial x_k$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ и $|\alpha:l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$.

Пусть, далее,

$$P^l(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) D^\alpha$$

– l -главная часть оператора $P(x, D)$, а

$$P^l(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

– его главный l -квазиоднородный символ.

Напомним следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1], [2]. Дифференциальный оператор $P(x, D)$ вида (1) называют l -квазиэллиптическим, если

$$P^l(x, \xi) \neq 0, \quad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

В частности, при $l_1 = \dots = l_n = l$ оператор $P(x, D)$ называют эллиптическим порядка l .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [1]. Дифференциальный оператор $P(x, D)$ вида (1) называют коэрцитивным в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, если справедлива оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|P(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2)$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от f .

Хорошо известно [1], [2], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_\alpha(\cdot)$ и область Ω (например, если $a_\alpha(\cdot)$ постоянны или область Ω ограничена) оператор (1) l -квазиэллиптичен в точности тогда, когда он коэрцитивен в $\dot{W}_p^l$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1$ и $p = \infty$ оценка (2) для l -квазиэллиптического оператора утрачивает силу. Так, в [3; теорема 3] одним из авторов указаны необходимые условия подчиненности одного оператора $Q(x, D)$ системе $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$. Приведем частный случай этого результата для $N = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [3]. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $Q(x, D)$, $P(x, D)$ – дифференциальные операторы вида (1) с коэффициентами из $L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha:l| < 1$ и из $C^1(\Omega)$ при $|\alpha:l| = 1$. Тогда из оценки

$$\|Q(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \|P(x, D)f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (3)$$

следует равенство для (l -квазиоднородных) символов

$$Q^l(x, \xi) = \lambda(x)P^l(x, \xi), \quad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

в котором функция $\lambda(\cdot) \in C^1(\Omega)$.

Если коэффициенты операторов $Q(x, D)$ и $P(x, D)$ постоянны, т.е. $Q(x, D) = Q(D)$, $P(x, D) = P(D)$, то функция $\lambda(\cdot)$ в (4) также постоянна, $\lambda(x) \equiv \lambda$.

Из этого предложения, в частности, вытекает, что l -квазиэллиптический оператор является коэрцитивным в $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$ в исключительных случаях. Тем не менее, для l -квазиэллиптического оператора $P(x, D)$ верна оценка

$$\sum_{|\alpha|: l < 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|P(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad f \in C_0^\infty(\Omega), \quad (5)$$

при $p \in (1, \infty)$ вытекающая из доказанной в [1] (см. также [2]) оценки (2), а при $p = \infty$ доказанная в [3]. Отметим также, что невозможность оценки вида (2) при $p = 1$ вытекает из результатов Орнштейна [4]. В то же время наличие оценки (5) при $p = 1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [5], [6].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [6]

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дифференциальный оператор $P(x, D)$ вида (1) называют *слабо коэрцитивным* в (анизотропном) пространстве Соболева $\dot{W}_p^l(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива оценка (5), в которой C_1 и C_2 не зависят от f .

В случае изотропного пространства Соболева $\dot{W}_p^l$, т.е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, неравенство $|\alpha| : l < 1$ в (5) принимает обычный вид: $|\alpha| < l$.

Еще ранее де Лю и Миркил [7] показали, что при $n \geq 3$ эллиптический оператор $P(D)$ с постоянными коэффициентами может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 1 [7]. При $n \geq 3$ эллиптичность дифференциального полинома $P(D)$ порядка $l \geq 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$.

Условие $n \geq 3$ в теореме 1 существенно. Так, Мальгранж (см. [7]) указал, что оператор $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$ слабо коэрцитивен в $W_\infty^2(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптивен. В недавней заметке авторов [8] описаны все слабо коэрцитивные операторы $P(D)$ в $W_\infty^l(\mathbb{R}^2)$, не являющиеся эллиптическими.

2. Основная теорема. Следующая теорема распространяет критерий де Лю и Миркила на операторы с переменными коэффициентами.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $l \geq 2$ и $n \geq 3$. Пусть, далее, $P(x, D)$ – дифференциальный оператор вида

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (6)$$

в котором $a_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| < l-1$ и $a_\alpha(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| = l-1$. Пусть, кроме того, коэффициенты в главной части оператора $P(x, D)$ постоянны, $P^l(x, D) = P^l(D)$, т.е. $a_\alpha = \text{const}$ при $|\alpha| = l$.

Тогда оператор $P(x, D)$ слабо коэрцитивен в изотропном пространстве Соболева $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда он эллиптивен.

Отметим, что метод доказательства теоремы де Лю и Миркила из [7], основанный на использовании преобразования Фурье, неприменим для операторов с переменными коэффициентами. Для доказательства теоремы 2 мы применяем новый метод, в существенном базирующийся на “анизотропной” версии предложения 1 и его обобщении (см.

предложение 2 ниже). Это применение основано на принципиальной возможности неоднозначного выделения главной части дифференциального оператора, что и позволяет применять “анизотропный” результат в “изотропной” ситуации.

Кроме того, мы применяем некоторые топологические соображения, используемые, в частности, для доказательства предложения 3.

Условие постоянства коэффициентов главной части оператора $P(x, D)$ в теореме 2, по-видимому, существенно. Возможно, соответствующий контрпример дает оператор $x_1^2 D_1^2 + D_2^2 + D_3^2$.

Отметим, что нам не известно, распространяется ли теорема 2 на операторы, слабо коэрцитивные в изотропном пространстве $\dot{W}_\infty^l(\Omega)$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$.

3. Вспомогательные утверждения. Приведем некоторые результаты, которые, помимо предложения 1, понадобятся для доказательства теоремы 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [8]. *Предложение 1 остается в силе, если все дифференциальные мономы D^α зависят лишь от части переменных $D_1, \dots, D_m$ в соответствии с разложением $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$, т.е. $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_m^{\alpha_m} \otimes \mathbb{I}_{n-m}$ ($\mathbb{I}_k$ – тождественный оператор в $\mathbb{R}^k$). В этом случае равенство (4) вытекает из неравенства (3), в котором $f \in C_0^\infty(\Omega_m)$, где $\Omega_m = \pi_m \Omega$ – проекция области Ω на подпространство $\mathbb{R}^m$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [8]. *Пусть оператор $P(x, D)$ вида (6) слабо коэрцитивен в изотропном пространстве $W_p^l(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, $l \geq 2$. Пусть также коэффициенты главной части оператора $P(x, D)$ постоянны, $P^l(x, D) = P^l(D)$, и $P^l(\xi^0) = 0$ для $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Если $n \geq 3$, то ранг матрицы Якоби отображения

$$P^l = (\operatorname{Re} P^l, \operatorname{Im} P^l): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (7)$$

в точке ξ^0 не является максимальным, т.е. меньше двух.

Предложение 3 является частным случаем более общего результата, справедливого для системы операторов. Его доказательство в существенном базируется на некоторых топологических соображениях, использующих, в частности, теорию степени отображения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $Q(x, D)$, $P(x, D)$ – операторы вида (1); $(D', 0) := (D_1, \dots, D_m, 0, \dots, 0)$. Тогда из оценки (3) с $\Omega = \mathbb{R}^n$ при любом $m < n$ следует оценка для “суженных” операторов*

$$\|Q(x, D', 0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(x, D', 0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \quad (8)$$

В частности, если коэффициенты операторов $Q(x, D)$ и $P(x, D)$ постоянны, то оценка (3) сохраняется после “сужения” всех операторов на произвольное подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$.

4. набросок доказательства теоремы 2. Достаточность вытекает из оценки (5), доказанной в [3]. Покажем необходимость.

Пусть оператор $P(x, D)$ вида (6) слабо коэрцитивен в $W_\infty^l(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптичен. Тогда $P^l(\xi^0) = 0$ при некотором $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выполняя, если нужно, замену переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, можно считать, что $\xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда из тождества Эйлера для однородных полиномов и равенства $P^l(\xi^0) = 0$ вытекает, что $(\partial P^l / \partial \xi^1)(\xi^0) = 0$. Но так как $n \geq 3$, то согласно предложению 3 ранг матрицы Якоби отображения (7) в точке ξ^0 не превосходит 1. Выполняя, если нужно, линейную замену координат $\xi_2, \dots, \xi_n$, можно считать второй столбец этой матрицы нулевым, т.е. $(\partial P^l / \partial \xi^2)(\xi^0) = 0$. Таким образом, символ $P(x, \xi)$ оператора $P(x, D)$ не содержит мономов ξ_1^1 и $\xi_1^{l-1} \xi_2$.

Далее, в силу предложения 4 из оценки (3) вытекает “суженная” оценка

$$\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 < l} \|D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \quad (9)$$

для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Используя предложения 1 и 2, легко показать, что $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0) \neq 0$. Поэтому найдется $k (\geq 2)$, для которого коэффициент при мономе $\xi_1^{l-k} \xi_2^k$ в полиноме $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отличен от нуля. Выберем наименьшее такое k и проведем прямую через точки $(l-1; 0)$ и $(l-k; k)$. Обозначим через $l' := (l'_1, l'_2)$ вектор, компоненты которого l'_1 и l'_2 — длины отрезков, отсекаемых этой прямой на осях координат.

Поскольку члены ξ_1^l и $\xi_1^{l-1} \xi_2$ в символе $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отсутствуют, то все показатели мономов ξ^α из $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ лежат внутри треугольника, образованного точками $(0; 0)$, $(l'_1; 0)$ и $(0; l'_2)$, т.е. “суженный” оператор $P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0)$ имеет вид

$$P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha_1/l'_1 + \alpha_2/l'_2 \leq 1} a_{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}.$$

Это позволяет определить его главную (квазиоднородную) часть при помощи вектора l' :

$$P^{l'}(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = c(x) D_1^{l'_1-1} + b D_1^{l'_1-k} D_2^k,$$

причем $b \neq 0$. Поскольку оценка (9) имеет место с оператором D_1^{l-1} в левой части, то в силу предложений 1 и 2 справедливо равенство

$$\xi_1^{l-1} = \lambda(x)(c(x)\xi_1^{l-1} + b\xi_1^{l-k}\xi_2^k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Из (10) вытекает, что $\lambda(x)c(x) \equiv 1$ и $\lambda(x)b \equiv 0$, что противоречит условию $b \neq 0$. Следовательно, оператор $P(x, D)$ эллиптичен. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1996. [2] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных*, УРСС, М., 2002. [3] М. М. Маламуд, *Труды ММО*, **56** (1995), 206–261. [4] D. Ornstein, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **11**:1 (1962), 40–49. [5] E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrjn, M. M. Malamud, *Rus. J. Math. Phys.*, **12**:1 (2005), 6–16. [6] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, *Докл. РАН*, **397**:4 (2004), 453–458. [7] K. de Leeuw, H. Mirkil, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 112–124. [8] Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд, *Докл. РАН*, **415**:5 (2007), 583–588.

Д. В. Лиманский

Донецкий национальный университет

E-mail: lim3@skif.net

М. М. Маламуд

Институт прикладной математики

и механики НАН Украины

E-mail: mmm@telenet.dn.ua

Поступило

06.10.2007