Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, О самоприсоединениях коммутативных действий с инвариантной мерой, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 5, 792–795

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:04:49

О самоприсоединениях коммутативных действий с инвариантной мерой

В. В. Рыжиков

Для изучения динамической системы с инвариантной мерой представляет интерес ее взаимодействие с другими системами и ее расположение в полугруппе марковских операторов. Вопросы о централизаторе действия, о структуре его факторов – частный случай этой общей задачи. Полезным инструментом в ее исследовании являются джойнинги. Преобразования с минимальными самоприсоединениями (self-joinings) введены Рудольфом в эргодическую теорию как средство для конструирования действий с необычными разнообразными свойствами. У преобразований с минимальными самоприсоединениями, в частности, нет факторов, а их централизатор тривиален. Это стимулировало изучение более общего класса так называемых *простых систем* (см., например, [1]–[3]).

Пусть $T: X \rightarrow X$ – сохраняющее меру обратимое преобразование пространства с мерой $(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$. Мера ν на $X_{(1)} \times \cdots \times X_{(n)}$ называется *самоприсоединением порядка n* , если она $T_{(1)} \times \cdots \times T_{(n)}$ -инвариантна и ее проекции на $X_{(i)}$ равны μ . В определении самоприсоединения группового действия $\{T_g: g \in G\}$ предполагается инвариантность меры ν относительно $T_g \times \cdots \times T_g$ для всех g .

Образ меры μ при отображении $\varphi_S: X \rightarrow X \times X$, где $\varphi_S(x) = (x, S(x))$, обозначается Δ_S (сдвиг диагональной меры на $X \times X$). Заметим, что Δ_S определена равенством $\Delta_S(A \times B) = \mu(SA \cap B)$. Если автоморфизм S коммутирует с действием $\{T_g: g \in G\}$, то Δ_S является самоприсоединением порядка 2. Действие $\{T_g\}$ называется *2-простым*, если все эргодические самоприсоединения порядка 2 имеют вид Δ_S или являются мерой $\mu \times \mu$.

Для 2-простой системы крайние точки в полугруппе всех коммутирующих с системой марковских операторов состоят из коммутирующих с ней автоморфизмов и оператора Θ – ортопроекции на пространство констант в $L_2(\mu)$.

Действие $\{T_g\}$ называется *n -простым*, если любое его эргодическое самоприсоединение ν порядка n или совпадает с мерой μ^n , или одна из проекций меры ν на некоторую двумерную грань в кубе $X_1 \times \cdots \times X_n$ имеет вид Δ_S .

Исследование самоприсоединений высоких порядков тесно связано с проблемой Рохлина о кратном перемешивании. В классе автоморфизмов с минимальным марковским централизатором существование нетривиального самоприсоединения порядка 3 влечет решение этой знаменитой проблемы (см. [3]), а для перемешивающего автоморфизма положительного локального ранга дает как решение проблемы Рохлина так и решение ослабленной проблемы Банаха об абсолютно непрерывном спектре конечной кратности (см. ссылки в [4]). По этим и другим причинам вопрос о совпадении 2-простоты коммутативного действия со свойством простоты высоких порядков является центральным в теории самоприсоединений.

Действие прямой суммы конечных групп изучалось в спектральной теории Степным [5]. Рост интереса к динамическим системам с неклассическим временем – тенденция последних лет (см. обзор [6]). Групповые действия успешно применяются для изучения индивидуальных автоморфизмов, входящих в эти действия ([2], [7], [8]).

Настоящая заметка посвящена обобщению результатов [3] о 2-простых динамических системах с классическим временем на коммутативные групповые действия. В частности, нами будет установлено, что построенные в [7] 2-простые действия групп $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ обладают кратым перемешиванием и свойством простоты всех порядков.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6849.2006.1).

1. Действия несчетных групп. Будем говорить, что действие $\{T_g\}$ группы G обладает *тотальным слабым перемешиванием*, если каждое его бесконечное поддействие содержит перемешивающую последовательность. Напомним, что последовательность T_{g_i} называется *перемешивающей*, если $T_{g_i} \rightarrow \Theta$. Если последнее выполнено для всех последовательностей $g_i \rightarrow \infty$, то действие $\{T_g\}$ называется *перемешивающим*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – локально компактная несчетная абелева группа. Тогда 2-простое тотально слабо перемешивающее G -действие является простым всех порядков.

СЛЕДСТВИЕ. Несчетное 2-простое перемешивающее действие перемешивает с любой кратностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Примеры $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^m$ -действий, построенные в работе [7], удовлетворяют условию теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть эргодическое самоприсоединение ν порядка 3 обладает свойством: проекции ν на двумерные грани в произведении $X \times X \times X$ совпадают с $\mu \times \mu$. Нужно установить, что $\nu = \mu \times \mu \times \mu$. Этим простота порядка 3 будет доказана. Предположим, что самоприсоединение ν отлично от $\mu \times \mu \times \mu$.

Будем писать $g \sim g'$, если найдется $R = R_{g,g'}$ ($R \in C(\{T_g\})$) такой, что

$$(I \otimes I \otimes T_{g^{-1}T_{g'}})\nu = (R \otimes I \otimes I)\nu$$

(I – тождественный оператор в $L_2(\mu)$). Очевидно, что отношение $\sim$ является эквивалентностью, а множество

$$H_\nu = \{h : h \sim e\}$$

является подгруппой G .

ЛЕММА. Число классов эквивалентности не более, чем счетно.

Лемма является непосредственным следствием леммы 1 из [3], которая (как и используемая в [3] теорема 1 из [1]) верна для действий любых групп.

Из леммы непосредственно вытекает, что факторгруппа G/H_ν не более чем счетна, поэтому $|H_\nu| = \infty$. Так как рассматриваемое действие обладает тотальным слабым перемешиванием, действие группы H_ν содержит перемешивающую последовательность $\{h_i\}$, т.е.

$$T_{h_i} \rightarrow \Theta, \quad h_i \in H_\nu.$$

Из определения группы H_ν вытекает, что для каждого i найдется автоморфизм R_i такой, что $(R_i \otimes I \otimes T_{h_i})\nu = \nu$. Это равносильно

$$\int f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 d\nu = \int R_i f_1 \otimes f_2 \otimes T_{h_i} f_3 d\nu$$

(здесь R_i обозначают операторы в $L_2(X, \mathcal{B}, \mu)$, индуцированные одноименными автоморфизмами). Пусть марковский оператор R – предельная точка для последовательности операторов $\{R_i\}$. Воспользовавшись тем, что присоединение ν обладает попарной независимостью, получаем

$$\int f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 d\nu = \int R f_1 \otimes f_2 \otimes \Theta f_3 d\nu = \int f_1 d\mu \int f_2 d\mu \int f_3 d\mu,$$

$$\nu = \mu \times \mu \times \mu.$$

Случай порядка $n > 3$ рассматривается аналогично (впрочем, из известного результата Дж. Кинга вытекает, что простота порядка 4 влечет за собой простоту всех порядков).

2. Действия счетных групп.

ТЕОРЕМА 2. Пусть 2-простое действие $\{T_g\}$ счетной абелевой группы обладает тотальным слабым перемешиванием, но не является перемешивающим. Тогда $\{T_g\}$ обладает простотой всех порядков.

СЛЕДСТВИЕ. Любое перемешивающее действие (включая некоммутативные), коммутирующее с таким действием $\{T_g\}$, обладает свойством кратного перемешивания всех порядков.

ЗАМЕЧАНИЕ. А. И. Даниленко и А. дель Юнко сообщили автору, что соответствующие пары из перемешивающего и неперемешивающего действий можно построить методом стохастических конструкций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что эргодическое самоприсоединение ν трех копий рассматриваемого действия отлично от меры $\mu \times \mu \times \mu$. Рассмотрим группу H_ν всех таких $h \in G$, когда найдется автоморфизм R такой, что

$$(I \otimes I \otimes T_h)\nu = (R \otimes I \otimes I)\nu.$$

В случае бесконечной группы H_ν , повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 1, получим $\nu = \mu \times \mu \times \mu$.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда группа H_ν конечна. Пусть h не принадлежит H_ν . Тогда для оператора $J: L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu) \otimes L_2(\mu)$, связанного с мерой ν соотношением

$$\int_{X \times X \times X} f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 d\nu = \int_{X \times X} (Jf_1) f_2 \otimes f_3 d\mu \times \mu,$$

выполнено

$$\Theta = J^*(I \otimes T_h)J.$$

Этот факт непосредственно вытекает из результатов [1], [3].

Пусть h_i – последовательность различных элементов группы G , для которой выполнено условие

$$T_{h_i} \rightarrow P^*P \neq \Theta,$$

где $h_i = g_i^{-1}g_{j(i)}$, g_i – некоторая последовательность такая, что

$$T_{g_i} \rightarrow P \neq \Theta.$$

Нужная последовательность g_i всегда найдется, так как исходное действие не обладает свойством перемешивания.

Так как все h_i , кроме конечного числа, не принадлежат группе H_ν , получим

$$\Theta = J^*(I \otimes T_h)J \rightarrow J^*(I \otimes P^*P)J.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} ((I \otimes P)J)^*(I \otimes P)J &= \Theta, \\ (I \otimes P)J &= \Theta' \end{aligned}$$

где оператор $\Theta': L_2(\mu) \rightarrow L_2(\mu) \otimes L_2(\mu)$ отвечает мере $\mu \times (\mu \times \mu)$, его образ – константы. Важным фактом является неразложимость сплетения Θ' , которая эквивалентна эргодичности меры $\mu \times (\mu \times \mu)$.

Рассматриваемое действие $\{T_g\}$ является 2-простым, поэтому имеет место разложение оператора P в виде

$$P = a \int S_\alpha d\eta(\alpha) + (1 - \alpha)\Theta, \quad a > 0,$$

где η – некоторая мера на централизаторе действия. Из неразложимости оператора Θ' вытекает, что для почти всех α (нам достаточно одного α) имеет место равенство $\Theta' = (I \otimes S_\alpha)J$. В силу обратимости оператора $I \otimes S_\alpha$ получаем $J = \Theta'$, что равносильно равенству $\nu = \mu \times \mu \times \mu$.

Доказательство тривиальности самоприсоединений порядка $n > 3$ аналогично.

Свойство коммутативности действий существенно для наших целей, так как имеются примеры 2-простых некоммутативных действий, не обладающих простотой порядка 3 (см. ссылки в [3]). Вероятно, изложенные результаты могут быть перенесены на квази-простые коммутативные действия (см. [8], [9]).

В связи с результатами работы [3] возникает вопрос: влечет ли свойство 2-простоты свойство простоты всех порядков (и, следовательно, кратное перемешивание всех порядков) для коммутативных действий, обладающих перемешиванием кратности 1 (кратности 2)?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Glasner, B. Host, D. Rudolph, *Israel J. Math.*, **78**:1 (1992), 131–142. [2] A. del Junco, *Israel J. Math.*, **104** (1998), 301–320. [3] V. V. Ryzhikov, *J. Dynam. Control Systems*, **3**:1 (1997), 111–127. [4] В. В. Рыжиков, *Функц. анализ и его прил.*, **34**:1 (2000), 90–93. [5] А. М. Степин, *Докл. АН СССР*, **169**:4 (1966), 773–776. [6] A. I. Danilenko, *Geometry and Dynamics of Groups and Spaces*, *Progr. Math.*, **265**, 2007, 236–263. [7] A. I. Danilenko, C. Silva, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **43**:4 (2007), 375–398. [8] A. I. Danilenko, *J. Anal. Math.*, **102**:1 (2007), 77–117. [9] В. В. Рыжиков, Ж.-П. Тувено, *Функц. анализ и его прил.*, **40**:3 (2006), 85–89.

В. В. Рыжиков

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: vryzh@mail.ru

Поступило

31.10.2007