Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Седаев, Обобщенные пределы и связанные с ними асимптотические формулы, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 612–627

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:02:00

Обобщенные пределы и связанные с ними асимптотические формулы

А. А. Седаев

На основе новой версии теоремы Й. Караматы, сформулированной в терминах обобщенных пределов, удалось ослабить условия применимости асимптотических формул А. Конна, исследованных многими авторами. Данный подход позволил применить полученный ранее критерий “измеримости” по Конну и перейти от обобщенных пределов к обычным пределам.

Библиография: 11 названий.

1. Введение и формулировка результатов. В работах Конна (см. например, [1]), а также в [2; теорема 4.1] и в более общем и точном виде в [3; теорема 5.2] были доказаны необычные формулы, позволяющие описывать асимптотику s -чисел компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Эти результаты получены в весьма общей некоммутативной постановке для элементов специальных операторных идеалов. Они связывают значения сингулярных следов Диксмье на положительных элементах из операторного пространства Марцинкевича $\mathcal{L}_{p,\infty}$, $p \geq 1$, со значениями этих следов на интегральных образах тех же элементов. Упомянутые интегральные преобразования возникают в теории распространения тепла, поэтому мы будем называть их “heat kernel transformations” и обозначать НКТ $_{p,q}$, $q > 0$, $1 \leq p < \infty$. В полной общности круг относящихся сюда методов, проблем и приложений изложен в обзорной работе [4].

В этой работе мы ограничимся рассмотрением коммутативных аналогов НКТ:

$$\text{НКТ}_{p,q} z = \frac{1}{t} \int_a^\infty e^{-1/(tz^p(s))^{q/p}} ds, \quad (1)$$

где $t > 0$, a – некоторое положительное число, а $z \geq 0$ принадлежит симметричному пространству измеримых на полуоси функций $L_{p,\infty}$, $p \geq 1$ (см. [5]).

Уточним постановку задачи. Пусть $C_b(\mathbb{R}_+)$ – пространство ограниченных непрерывных на полуоси $\mathbb{R}_+$ функций f . *Обобщенным пределом* на $C_b(\mathbb{R}_+)$ назовем любой положительный линейный функционал γ , который на функциях, сходящихся на бесконечности к пределу, равен значению этого предела. В частности, норма такого функционала равна 1 и все стремящиеся к нулю функции попадают в его ядро. Таким образом, всякий обобщенный предел является сингулярным (анормальным) функционалом, значения которого не зависят от значений $f(t)$ на любом конечном

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00629) и Australian Research Council.

промежутке $[0, a]$. Поэтому ниже мы будем применять его к непрерывным ограниченным функциям, заданным на (a, ∞) , $a > 0$.

Нам понадобится оператор M логарифмического среднего (оператор Чезаро)

$$Mf = \frac{1}{\ln t} \int_1^t f(s) \frac{ds}{s}, \quad t > 1, \quad (2)$$

где, как обычно, $\ln t$ означает логарифм по основанию e .

Обобщенный предел, инвариантный относительно оператора растяжения

$$(D_\beta f)(t) = f\left(\frac{t}{\beta}\right), \quad \beta > 0,$$

мы будем обозначать ω . В качестве ω удобно взять функционал вида

$$\omega_\gamma(f) = \gamma(M(f)), \quad (3)$$

где γ – произвольный обобщенный предел на $C(\mathbb{R}_+)$. Такой ω будет автоматически инвариантен относительно оператора растяжения, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Далее под $L_{p,\infty}$, $p \geq 1$, мы будем понимать пространство измеримых *ограниченных* на $[1, \infty)$ функций x , для которых

$$\|x\| = \begin{cases} \frac{\sup_{1 < t < \infty} \int_1^t x^*(s) ds}{\min(t-1, t^{1-1/p})} < \infty, & p > 1, \\ \frac{\sup_{1 < t < \infty} \int_1^t x^*(s) ds}{\ln t} < \infty, & p = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь, как обычно, $x^*(t)$, $t \geq 1$, означает невозрастающую перестановку функции $|x(t)|$, $t \geq 1$. Пространства $L_{p,\infty}$ являются примерами симметричных пространств Марцинкевича, теория которых изложена в [5]. Именно, для элементов операторных аналогов пространств $L_{p,\infty}$ в [1], [2] и [3] доказываются интересные нас формулы.

Пусть дан обобщенный предел ω , инвариантный относительно D_β . Нам понадобится определение коммутативного аналога следа Диксмье [6] на $L_{1,\infty}$. То есть сингулярного симметричного положительного линейного функционала, заданного на положительных функциях $x \in L_{1,\infty}$ формулой

$$\tau_\omega(x) = \omega\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x^*(s) ds\right) \quad (5)$$

и продолженного на все $L_{1,\infty}$ по линейности. Симметричность означает, что τ_ω принимает на всех равноизмеримых функциях одинаковые значения, что характерно для обычного интеграла $\tau(x) = \int_1^\infty x(s) ds$, а сингулярность означает, что τ_ω равен нулю на всех функциях с компактным носителем. Необходимые и достаточные условия существования таких функционалов на произвольных пространствах Марцинкевича получены в [7].

Так как ω есть обобщенный предел, то задание τ_ω формулой (5) есть, по сути, способ описания асимптотического поведения функции $x^*(t)$ на бесконечности.

Если ω определен формулой (3), то в [8], [9] функционал τ_ω носит название *следа Конна–Диксмье*. Там же доказано [8; теорема 5.12], что если на положительном

элементе $x \in L_{1,\infty}$ все функционалы τ_{ω_γ} принимают одинаковые значения, то существует обычный предел $\lim_{t \rightarrow \infty} 1/\ln t \int_1^t x^*(s) ds$.

Сформулируем коммутативный вариант теоремы 5.2 из [3], которая опирается на доказанное в [2; теорема 1.5] существование обобщенного предела, инвариантного относительно операторов растяжения D_β , степенного преобразования аргумента $(P_s f)(t) = f(t^s)$, $s > 0$, и оператора Чезаро M . *Попутно отметим, что инвариантность ω относительно M уже гарантирует его инвариантность относительно D_β .*

ТЕОРЕМА 1. *Для следа Диксмье τ_ω , порожденного обобщенным пределом ω , который определен на $C_b(\mathbb{R}_+)$ и инвариантен относительно операторов растяжения D_β , степенного преобразования аргумента P_s и оператора Чезаро M , справедлива следующая формула:*

$$\omega(\text{НКТ}_{p,q} z) = \frac{p}{q} \Gamma\left(\frac{p}{q}\right) \tau_\omega(z^p), \quad \text{где } 0 < z \in L_{p,\infty}. \quad (6)$$

Метод доказательства в [2], [3] имеет опосредованный характер. Он основан на преобразовании Лапласа, ω -варианте теоремы Караматы и еще одной необычной формуле для следов Диксмье, которая в этих работах связывается с “асимптотикой дзета-функции”, порожденной тем же элементом z (см. [2], [3]).

В данной работе мы отмечаем, что некоторая модификация теоремы Караматы может быть применена к формуле (6) непосредственно, и приводим доказательство формулы при существенно более слабых ограничениях на функционал ω . Это позволит применить теорему 5.12 из [8] и получить новые результаты.

Так как $z^p \in L_{1,\infty}$ при $z \in L_{p,\infty}$, то, заменяя в формуле (1) z^p через $x \in L_{1,\infty}$, а q/p – через $\alpha > 0$, мы приходим к формуле (α – некоторое положительное число)

$$\text{НКТ}_{p,q} z = \frac{1}{t} \int_a^\infty e^{-1/(tz^p(s))^{q/p}} ds = \frac{1}{t} \int_a^\infty e^{-1/(tx(s))^\alpha} ds \stackrel{\text{онр.}}{=} \text{НКТ}_\alpha x. \quad (1')$$

Таким образом, вместо (6) достаточно доказывать формулу

$$\omega(\text{НКТ}_\alpha x) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tau_\omega(x), \quad (6')$$

где $x \in L_{1,\infty}$, а $\alpha > 0$.

Мы будем опираться на новую ω -версию теоремы Караматы, которая совпадает при $\alpha = 1$ с теоремой 2.2 из [2].

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\alpha > 0$ и ω – обобщенный предел, который задан на $C_b(\mathbb{R}_+)$ и инвариантен относительно оператора растяжения D_τ . Пусть $\beta(t)$, $t > a \geq 0$, – неубывающая функция такая, что для всех положительных r существует интеграл Лебега–Стилтьеса*

$$h(r) = \int_a^\infty e^{-(s/r)^\alpha} d\beta(s).$$

(i) *Если функция $h(r)/r$ ограничена при $r > 0$, то справедлива формула*

$$\omega\left(\frac{h(r)}{r}\right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{\beta(t)}{t}\right). \quad (7)$$

(ii) Если функция $M(h(r)/r)$ ограничена при $r > 1$ и $\omega = \gamma M$, то при любом γ

$$\begin{aligned}\omega\left(M\left(\frac{h(r)}{r}\right)\right) &= \gamma\left(M^2\left(\frac{h(r)}{r}\right)\right) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\gamma\left(M^2\left(\frac{\beta(t)}{t}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\omega\left(M\left(\frac{\beta(t)}{t}\right)\right).\end{aligned}\quad (8)$$

(iii) Если в (i) (соответственно в (ii)) рассматриваемая функция $h(r)/r$ (соответственно $M(h(r)/r)$) имеет предел на бесконечности, то в формуле (7) (соответственно в (8)) обобщенный предел ω (соответственно γM) можно заменить на обычный предел $\lim$.

Отметим, что классическая теорема Караматы касается случая, когда $\alpha = 1$ и существует $\lim_{r \rightarrow \infty} (h(r)/r)$.

Важной особенностью формулы (6') является то, что $\text{НКТ}_\alpha(x)$ при $x \in L_{1,\infty}$, вообще говоря, не принадлежит $C_b(\mathbb{R}_+)$ (не ограничена, см. [3; пример после леммы 5.1]), и лишь применение к этой неограниченной функции оператора Чезаро переводит ее в ограниченную (см. [3; замечание перед теоремой 5.2]). При этом изначально предполагаемая инвариантность ω относительно оператора M позволяет писать

$$\omega(\text{НКТ}_\alpha(x)) = \omega(M(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \omega(M^2(\text{НКТ}_\alpha(x)))$$

и понимать равенство (6') в виде равенства

$$\omega(M^2(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tau_\omega(x). \quad (9)$$

Ниже будут установлены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. Пусть x – неотрицательный элемент $L_{1,\infty}$. Тогда

- 1) если ω инвариантен относительно оператора M , то справедлива формула (6') $\equiv$ (9);
- 2) для любого обобщенного предела $\gamma \in C_b^*(\mathbb{R}_+)$ справедлива формула

$$\gamma(M^2(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\gamma\left(M\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x^*(s) ds\right)\right) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tau_{\omega_\gamma}(x). \quad (10)$$

Иными словами 1) заменяет предположения теоремы 1 на инвариантность ω относительно M , а 2) ослабляет и это ограничение.

С помощью результатов, полученных в [8], [9], отсюда вытекает следующая теорема тауберова типа.

ТЕОРЕМА 4. Если левая или средняя часть формулы (10) не зависит от γ , то в каждой части на бесконечности существует обычный предел и

$$\lim(M(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\lim\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x^*(s) ds\right) = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tau_{\omega_\gamma}(x). \quad (11)$$

Рассмотрим пространство L_w (слабое L_1), которое шире L_1 , но уже $L_{1,\infty}$, и образует в нем линейное подпространство:

$$L_w = \{x \in L_{1,\infty} : x^*(t)t \in L_\infty\}.$$

Известно [3; лемма 5.1], что в отличие от $L_{1,\infty}$ оператор НКТ_α переводит L_w в пространство ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}_+)$.

ТЕОРЕМА 5. *Для неотрицательных функций x из L_w и ω , инвариантного относительно M (соответственно любого γ из 2) теоремы 3) справедлива формула*

$$\omega(\text{НКТ}_\alpha(x)) = \omega(M(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tau_\omega(x), \quad (9')$$

(соответственно

$$\gamma(M(\text{НКТ}_\alpha(x))) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \gamma\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x^*(s) ds\right). \quad (10')$$

Более того, справедлив следующий результат, который для $\alpha = 1$ был независимо получен в неопубликованной работе А. Кэри, Н. Кальтона и Ф. Сукочева.

ТЕОРЕМА 6. *Если для неотрицательной функции $f(s)$, $s > 1$, существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\text{НКТ}_\alpha f)(\lambda)$, то f принадлежит L_w , все написанные ниже обычные пределы существуют и справедливо равенство*

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\Gamma(1/\alpha)} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\text{НКТ}_\alpha f)(\lambda) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_1^\infty f^{1+1/r}(s) ds \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r f^*(s) ds = \lim_{s \rightarrow \infty} f^*(s)s. \end{aligned}$$

Сравнение теоремы 6 и теоремы 4 наводит на мысль, что в условиях теоремы 4 может иметь место более сильный результат: *если левая и средняя части формулы (10) не зависят от γ , то справедлива формула*

$$\lim(\text{НКТ}_\alpha(x)) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \lim\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x(s) ds\right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tau_{\omega_\gamma}(x). \quad (11')$$

То есть в левой части формулы (11) оператор M , возможно, лишний. Однако это не так. Легко построить функцию, не принадлежащую L_w и такую, что $\lim((1/\ln t) \times \int_1^t x(s) ds)$ существует. Тогда $\lim(M(\text{НКТ}_\alpha(x)))$ существует, но $\lim(\text{НКТ}_\alpha(x))$ не может существовать, ибо в противном случае согласно теореме 6 $x \in L_w$.

2. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы будем опираться на равенство

$$\int_0^\infty (e^{-t^\alpha})^{n+1} dt = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} (e^{-t^\alpha})^n dt = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{(n+1)^{1/\alpha}},$$

которое проверяется прямым вычислением. Пусть выполнено предположение пункта (i), и пусть

$$C = \omega\left(\frac{h(r)}{r}\right) = \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} d\beta(t)\right).$$

Мы докажем, что для любого многочлена $p(t)$ имеет место равенство

$$C \int_0^\infty e^{-t^\alpha} p(e^{-t^\alpha}) dt = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} p(e^{-(t/r)^\alpha}) d\beta(t)\right).$$

В силу линейности функционала ω эту формулу достаточно проверить для $p(t) = t^n$. Тогда, с учетом инвариантности ω относительно оператора растяжения, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} (e^{-(t/r)^\alpha})^n d\beta(t)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/(r/(n+1)^{1/\alpha}))^\alpha} d\beta(t)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r/(n+1)^{1/\alpha}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/\alpha}} \int_a^\infty e^{-(t/(r/(n+1)^{1/\alpha}))^\alpha} d\beta(t)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{(n+1)^{1/\alpha}} \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} d\beta(t)\right) \\ &= C \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{(n+1)^{1/\alpha}} = C \int_0^\infty e^{-t^\alpha} (e^{-t^\alpha})^n dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим $g(t)$, равное $1/t$ при $t \in [e^{-1}, 1]$ и 0 при других t из $[0, 2]$. Выберем последовательности многочленов $q_n(t)$, $Q_n(t)$ так, чтобы

$$-1 \leq q_n(t) \leq g(t) \leq Q_n(t) \leq 3$$

и чтобы обе последовательности сходились к $g(t)$ почти всюду на $[0, 2]$. Тогда в силу монотонности функционала ω справедливо неравенство

$$\begin{aligned} C \int_0^\infty e^{-t^\alpha} q_n(e^{-t^\alpha}) dt &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} q_n(e^{-(t/r)^\alpha}) d\beta(t)\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} g(e^{-(t/r)^\alpha}) d\beta(t)\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} Q_n(e^{-(t/r)^\alpha}) d\beta(t)\right) \\ &= C \int_0^\infty e^{-t^\alpha} Q_n(e^{-t^\alpha}) dt. \end{aligned}$$

Переходя (согласно теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла) к пределу в первом и последнем интегралах и учитывая, что

$$\begin{aligned} C \int_0^\infty e^{-t^\alpha} g(e^{-t^\alpha}) dt &= C \int_0^1 dt = C, \\ \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^\infty e^{-(t/r)^\alpha} g(e^{-(t/r)^\alpha}) d\beta(t)\right) &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{1}{r} \int_a^r d\beta(t)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{\beta(r)}{r}\right), \end{aligned}$$

получаем, что

$$\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \omega\left(\frac{\beta(r)}{r}\right) = C = \omega\left(\frac{h(r)}{r}\right).$$

Утверждение (i) и формула (7) доказаны.

Утверждения (ii), (iii) и формула (8) доказываются дословным повторением предыдущих аргументов с заменой ω на γM^2 или обычный предел $\lim$. Теорема доказана.

Доказательству теоремы 3 предположим ряд предварительных оценок и утверждений.

Так как рассматриваемые обобщенные пределы ω и ω_γ инвариантны относительно оператора растяжения D_β , то согласно (1') при $\beta > 0$

$$\omega(\text{НКТ}_\alpha(\beta x)(t)) = \omega(\beta \text{НКТ}_\alpha(x)(\beta t)) = \beta \omega(\text{НКТ}_\alpha(x)(t)).$$

То есть, функционалы, стоящие в левой и правой частях формул (9) и (10), являются положительно однородными. Следовательно, с учетом (4) и определения $\tau_\omega(x)$, равенства (9) и (10) достаточно проверять для неотрицательных, невозрастающих функций из $L_{1,\infty}$, по норме меньших или равных 1. Поэтому в дальнейшем через x мы будем обозначать именно такие функции, а их совокупность обозначим через K . Легко видеть, что K есть выпуклое подмножество единичного шара пространства $L_{1,\infty}$.

Сравнение (10) и (9) показывает, что (9) есть следствие (10). Поэтому ниже мы сосредоточимся на доказательстве ключевой формулы (10).

Определим для $x \in K$ невозрастающую функцию

$$x^{-1}(s) = 1 + \text{mes}\{t, x(t) \geq s\}.$$

Так как $\int_1^t x(s) ds \leq \ln t$, $t > 1$, то отсюда следует, что $x^{-1}(1) = 1$.

Делая замену $x(s) = 1/u$, $s = x^{-1}(1/u)$, по теореме 2 имеем

$$\begin{aligned} \gamma(M^2(\text{НКТ}_\alpha(x))) &= \gamma\left(M^2\left(\frac{1}{t} \int_1^\infty e^{-1/(tx(s))^\alpha} ds\right)\right) \\ &= \gamma\left(M^2\left(\frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-(u/t)^\alpha} dx^{-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \gamma\left(M^2\left(x^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u}\right)\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\tau_{\omega_\gamma}(x) = \gamma M\left(\frac{1}{\ln t} \int_1^t x(s) ds\right),$$

то для доказательства утверждения 2) теоремы 3 и формулы (10) нам будет достаточно показать, что функция

$$\begin{aligned} \Delta_x(r) &= M\left(M\left(x^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{\ln t} \int_1^t x(s) ds\right) \\ &= M\left(\frac{1}{\ln t} \left(\int_1^t x^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s} ds - \int_1^t x(s) ds\right)\right) \end{aligned}$$

попадает в ядро функционала γ .

Аналогично для доказательства формулы (10') достаточно показать, что

$$\frac{1}{\ln t} \left(\int_1^t x^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s} ds - \int_1^t x(s) ds\right)$$

попадает в ядро функционала γ .

Исследуем сначала функцию

$$\delta_x(t) = \left(\int_1^t x^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} \frac{ds}{s} - \int_1^t x(s) ds \right).$$

Делая замену переменной и интегрируя по частям, имеем

$$\int_1^t x^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} \frac{ds}{s} = - \int_1^{1/t} x^{-1}(u) du = -x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} + x^{-1}(1) + \int_1^{1/t} u dx^{-1}(u).$$

Делая замену $x^{-1}(u) = s$, $u = x(s)$ и учитывая, что $x^{-1}(1) = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \int_1^t x^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \frac{1}{s} \frac{ds}{s} &= 1 - x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} + \int_1^{x^{-1}(1/t)} x(s) ds \\ &= \left(t - x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) \right) \frac{1}{t} + \int_1^{x^{-1}(1/t)} x(s) ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\delta_x(t) = \left(t - x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) \right) \frac{1}{t} + \int_t^{x^{-1}(1/t)} x(s) ds = \int_t^{x^{-1}(1/t)} \left(x(s) - \frac{1}{t} \right) ds. \quad (12)$$

Если $x(t) \geq 1/t$, то $x^{-1}(1/t) \geq t$. Наоборот, если $x(t) \leq 1/t$, то и $x^{-1}(1/t) \leq t$. Отсюда и из формулы (12) получаем, что $\delta_x(t)$ при всех $t \geq 1$ неотрицательна и равна нулю в точке t тогда и только тогда, когда $x(t) = 1/t$.

Учитывая убывание функции $x(s)$, мы можем увеличить правую часть формулы (12), заменив под интегралом $x(s)$ на $x(t)$:

$$\begin{aligned} \delta_x(t) &= \int_t^{x^{-1}(1/t)} \left(x(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &\leq \int_t^{x^{-1}(1/t)} \left(x(t) - \frac{1}{t} \right) ds = \left(x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) - t \right) \left(x(t) - \frac{1}{t} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В случае $x(t) \leq 1/t$ справедливо неравенство $\delta_x(t) \leq t(1/t) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Если x из слабого L_1 , то $x(t) \leq C/t$ при всех $t > 1$ и некоторого $C < \infty$. Тогда при $x(t) > 1/t$ имеем $t < x^{-1}(1/t) < Ct$. Следовательно, по формуле (13) при $x(t) > 1/t$

$$0 < \delta_x(t) \leq \left(x^{-1} \left(\frac{1}{t} \right) - t \right) \left(x(t) - \frac{1}{t} \right) < (Ct - t) \left(\frac{C}{t} - \frac{1}{t} \right) = (C - 1)^2.$$

Таким образом, учитывая следствие 1, получаем, что $\delta_x(t) < \max(1, (C - 1)^2)$ и $\delta_x(t)/\ln t$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Так как γ – сингулярный функционал, то он обращается в нуль на всех стремящихся к нулю функциях и равенство (10') доказано. Равенство (9') доказывается аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Отображение $K \ni x \rightarrow \delta_x(t) \in \mathbb{R}$ является выпуклым. То есть для любых $x_1, x_2 \in K$ и $t > 1$*

$$\delta_{(x_1+x_2)/2}(t) \leq \frac{1}{2}(\delta_{x_1}(t) + \delta_{x_2}(t)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $t > 1$. Нам придется рассмотреть несколько случаев.

1. Пусть сначала $x_1(t) > 1/t$, $x_2(t) > 1/t$. Тогда $(x_1(t) + x_2(t))/2 > 1/t$ и $x_1^{-1}(1/t)$, $x_2^{-1}(1/t) \geq t$. Пусть для определенности $x_1^{-1}(1/t) \geq x_2^{-1}(1/t)$. Тогда $x_2^{-1}(1/t) \leq ((x_1 + x_2)/2)^{-1}(1/t) \leq x_1^{-1}(1/t)$ и на промежутке $[x_2^{-1}(1/t), ((x_1 + x_2)/2)^{-1}(1/t)]$ разность $x_2(s) - 1/t$ неположительна. Отсюда

$$\begin{aligned} \delta_{(x_1+x_2)/2}(t) &= \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \left(\frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) \right) ds \\ &= \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &\quad + \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &\leq \int_t^{x_1^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) ds + \int_t^{x_2^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{x_1}(t) + \delta_{x_2}(t)). \end{aligned}$$

2. Случай $(x_1(t) + x_2(t))/2 < 1/t$, когда $t > x_1^{-1}(1/t) \geq x_2^{-1}(1/t)$ рассматривается аналогично.

3. Пусть теперь $(x_1(t) + x_2(t))/2 > 1/t$, $x_1^{-1}(1/t) > t$, но $x_2^{-1}(1/t) \leq t$ (т.е. $x_1(t) > 1/t$, а $x_2(t) \leq 1/t$). Тогда, учитывая, что на $[t, ((x_1 + x_2)/2)^{-1}(1/t)]$ разность $x_2(s) - 1/t$ неположительна, а на промежутке $[x_2^{-1}(1/t), t]$ разность $1/t - x_2(s)$ неотрицательна, имеем

$$\begin{aligned} \delta_{(x_1+x_2)/2}(t) &= \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \left(\frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) \right) ds \\ &= \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &\quad + \int_t^{((x_1+x_2)/2)^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &\leq \int_t^{x_1^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_1(s) - \frac{1}{t} \right) ds + \int_t^{x_2^{-1}(1/t)} \frac{1}{2} \left(x_2(s) - \frac{1}{t} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{x_1}(t) + \delta_{x_2}(t)). \end{aligned}$$

4. Последний случай $(x_1(t) + x_2(t))/2 < 1/t$, $x_1^{-1}(1/t) < t$, но $x_2^{-1}(1/t) \geq t$ рассматривается аналогично предыдущему.

Предложение доказано.

Так как линейный оператор M является положительным, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отображение $\Delta_x = M(\delta_x(t)/\ln t)$ также является выпуклым.*

Множество невозрастающих неотрицательных функций из $K \subset L_{1,\infty}$, удовлетворяющих условиям

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 1 \leq t \leq e, \quad \|x\| \leq 1, \quad (14)$$

обозначим через A .

Аналогично через LA будем обозначать подмножество множества A , состоящее из функций, кусочно-постоянных при $t > e$. Очевидно, что LA плотно в A в топологии пространства L_∞ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Крайними точками множества LA являются функции x , которые на каждом максимальном участке своего постоянства $(a, b]$ удовлетворяют равенству*

$$x(t) = \frac{\ln b/a}{b-a}, \quad \text{если } b < \infty, \quad \text{и} \quad x(t) = 0 \quad \text{при } b = \infty. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $y \in LA$ рассмотрим функцию

$$z_y(t) = \int_1^t y(s) ds,$$

которая является вогнутой, неубывающей функцией, $z_y(t) \leq \ln t$, $t \geq 1$.

Легко видеть, что $z_x(t) \leq \ln t$ при всех $t \geq 1$ и, следовательно, $x(t) \in LA$. При этом, если $(a, b]$, $b < \infty$, — некоторый максимальный интервал ее постоянства, то $z_x(a) = \ln a$ и $z_x(b) = \ln b$. Поэтому, если $x = 1/2u + 1/2v$, $u, v \in LA$, то $z_x(t) = (1/2)z_u(t) + (1/2)z_v(t)$ и с учетом условия (14)

$$z_u(a) = z_v(a) = z_x(a), \quad z_u(b) = z_v(b) = z_x(b).$$

В силу вогнутости $z_u(t)$, $z_v(t)$ и линейности $z_x(t)$ при $t \in [a, b]$ отсюда следует, что $z_x(t) = z_u(t) = z_v(t)$ при всех $t \in (a, b]$. Дифференцируя это равенство, получаем, что $x(t) = u(t) = v(t)$ на $(a, b]$, а значит, и на всех ограниченных участках постоянства функции x . Так как случай бесконечного участка постоянства, где $x(t) = 0$, тривиален, то x действительно есть крайняя точка.

Наоборот, если функция w из LA не удовлетворяет условию (15) на некотором интервале своего постоянства, то либо в левом, либо в правом его конце, который обозначим d , $d < \infty$, выполняется строгое неравенство $z_w(d) < \ln d - \nu$, $\nu > 0$. Пусть $(a, d]$, (d, b) , $b \leq \infty$, — интервалы постоянства функции w . Тогда

$$p = w(a-0) > h = w(a+0) > q = w(d+0) > r = w(b+0).$$

Следовательно, найдется такое положительное число $\epsilon < \nu$, что $h + \epsilon/(d-a) < p$, $h - \epsilon/(d-a) > q + \epsilon/(b-d)$ и $q - \epsilon/(b-d) > r$. Полагая $u(t) = h + \epsilon/(d-a)$, $v(t) = h - \epsilon/(d-a)$ на $(a, d]$, $u(t) = q - \epsilon/(b-d)$, $v(t) = q + \epsilon/(b-d)$ на (d, b) и $u(t) = v(t) = w(t)$ при всех остальных t , мы получаем представление $w = (1/2)u + (1/2)v$ через функции из LA и, значит, w не может быть крайней точкой.

Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим через $LA(N)$ подмножество LA , состоящее из функций, чей носитель лежит на промежутке $[0, N]$, а интервалы постоянства оканчиваются в рациональных точках вида m/N . Базис в пространстве всех таких функций образуют характеристические функции вида $\chi_{[m_1/N, m_2/N]}$, $m_1, m_2 \leq N^2$, число которых конечно. Следовательно, множество $LA(N)$ есть замкнутое, выпуклое, конечномерное, а значит, компактное в любой нормируемой топологии множество.

Из доказательства предложения 2 можно увидеть, что крайними точками множества $LA(N)$ являются те его элементы, которые удовлетворяют условию (15). Кроме

того, функции из множества $\bigcup_{N=3}^{\infty} LA(N)$ плотны в LA в топологии пространства $L_1 + L_{\infty}$, задаваемой нормой

$$\|f\| = \sup_{e \subset (1, \infty), \text{mes } e=1} \int_e |f(s)| ds,$$

а само LA плотно в A в топологии пространства L_{∞} . Поэтому, если выпуклый функционал $F(x)$ определен на A и непрерывен в топологии пространства $L_1 + L_{\infty}$, то его наибольшее значение достаточно искать на крайних точках множества LA .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При каждом $T > e$ супремум функционала $\Delta_x(T)$, взятый по функциям x из A , достаточно искать на множестве крайних точек LA .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.3 из [2] при достаточно больших t

$$x^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \leq (\|x\|_{L_{1,\infty}} + 1)t \ln t.$$

Учитывая вид $\delta_x(t)$ и $\Delta_x(t)$, отсюда получаем непрерывность функционала $\Delta_x(T)$ на A в топологии пространства $L_1 + L_{\infty}$.

Предложение доказано.

Рассмотрим произвольный интервал $(a_n, b_n]$, $b_n < \infty$, постоянства функции $x(t)$, удовлетворяющей (15), и пусть $\nu_n = b_n/a_n$. Тогда при $t \in (a_n, b_n]$

$$\frac{1}{b_n} < x(t) = \frac{\ln(b_n/a_n)}{b_n - a_n} = \frac{\ln \nu_n}{b_n(1 - 1/\nu_n)} < \frac{1}{a_n}. \quad (16)$$

Пусть

$$\tau_n = \frac{b_n(1 - 1/\nu_n)}{\ln \nu_n}.$$

Тогда $x(t) < 1/t$ при $a_n < t < \tau_n$ и $x(t) > 1/t$ при $\tau_n < t < b_n$. Поэтому

$$\max_{a_n < t \leq b_n} \frac{x(t)}{1/t} = \frac{x(b_n)}{1/b_n} = \frac{\ln \nu_n}{(1 - 1/\nu_n)} = \frac{\nu_n \ln \nu_n}{\nu_n - 1} < \nu_n. \quad (17)$$

В частности, при всех $a_n < t < \tau_n$ согласно следствию 1 $\delta_x(t) < 1$. Если $\nu_n < C$, $n = 1, 2, \dots$, для некоторого $C < \infty$, то из (17) следует, что $x \in L_w$.

С учетом доказательства теоремы 5 нас будут интересовать такие x , для которых $\delta_x(t)$ может принимать как угодно большие значения. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на тех x , для которых множество всех ν_n не ограничено сверху.

Так как $x^{-1}(1/t) = b_n$, а $x(s) = \text{const}$ при $t, s \in (\tau_n, b_n)$, то согласно формуле (12) мы имеем

$$\delta_x(t) = \int_t^{x^{-1}(1/t)} \left(x(s) - \frac{1}{t}\right) ds = \left(x(t) - \frac{1}{t}\right) \left(x^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) - t\right) \leq x(t)b_n = \frac{\ln \nu_n}{(1 - 1/\nu_n)}.$$

В частности, если $\nu_n > 2$ и $t \in (\tau_n, b_n)$, то

$$\delta_x(t) < 2 \ln \nu_n \quad \text{и} \quad x(t) < \frac{2 \ln \nu_n}{b_n}. \quad (18)$$

Пусть τ_n то же, что и выше, $T \in (\tau_n, b_n)$, и пусть $\nu = b_n/(2T)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\tau_n}^T \delta_x(t) \frac{dt}{t \ln t} = \int_{\tau_n}^T \delta_x(t) d\mu(t),$$

где $\mu(t) = \ln \ln t$. Пусть $\nu_n > 2$, тогда $\tau_n > b_n/2 \ln \nu_n$ и, так как $T = b_n/2\nu \leq b_n$, то $\nu < \ln \nu_n$ и с учетом (18)

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^T \delta_x(t) d\mu(t) &\leq 2 \ln \nu_n (\mu(T) - \mu(\tau_n)) \leq 2 \ln \nu_n \left(\ln \ln \left(\frac{b_n}{2\nu} \right) - \ln \ln \left(\frac{b_n}{2 \ln \nu_n} \right) \right) \\ &= 2 \ln \nu_n [\ln(\ln(b_n) - \ln(2\nu)) - \ln(\ln(b_n) - \ln(2 \ln \nu_n))] \\ &= 2 \ln \nu_n \left[\ln(\ln(b_n)) + \ln \left(1 - \frac{\ln(2\nu)}{\ln b_n} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\ln(b_n)) - \ln \left(1 - \frac{\ln(2 \ln \nu_n)}{\ln b_n} \right) \right] \\ &= 2 \ln \nu_n \left[\ln \left(1 - \frac{\ln(2\nu)}{\ln b_n} \right) - \ln \left(1 - \frac{\ln(2 \ln \nu_n)}{\ln b_n} \right) \right]. \end{aligned}$$

Нам понадобится это выражение при больших a_n и ν_n . Так как $b_n = a_n \nu_n$, то отсюда следует, что

$$\frac{\ln(2\nu)}{\ln b_n} \leq \frac{\ln(2 \ln \nu_n)}{\ln b_n} \leq \frac{\ln(2 \ln \nu_n)}{\ln a_n + \ln \nu_n}$$

и обе дроби малы. Поэтому без ограничения общности мы продолжим преобразования по неравенству $0 > \ln(1 - \alpha) > -2\alpha$, справедливому при $0 < \alpha < 1/2$:

$$\int_{\tau_n}^T \delta_x(t) \frac{dt}{t \ln t} \leq 4 \ln \nu_n \left[\frac{\ln(2 \ln \nu_n)}{\ln b_n} - \frac{\ln(2\nu)}{\ln b_n} \right] = \frac{4 \ln \nu_n [\ln(2 \ln \nu_n) - \ln(2\nu)]}{\ln b_n}.$$

Окончательно при $\tau_n < T \leq b_n$ имеем

$$\int_{\tau_n}^T \delta_x(t) \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{4 \ln \nu_n [\ln(2 \ln \nu_n) - \ln(2\nu)]}{\ln b_n}. \quad (19)$$

В частности, $2\nu = 1$ при $T = b_n$, откуда

$$\int_{\tau_n}^{b_n} \delta_x(t) \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{4 \ln \nu_n [\ln(2 \ln \nu_n)]}{\ln b_n}. \quad (20)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $\tau_n < T \leq b_n$ и $\nu_n > 2$ справедлива оценка

$$\int_{\tau_n}^T \delta_x(t) \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{4 \ln \nu_n [\ln(2 \ln \nu_n) - \ln(2\nu)]}{\ln b_n} \leq 8 \frac{\ln \nu_n [\ln \ln T]}{\ln b_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (19) и (20) в доказательстве нуждается только второе неравенство. Согласно неравенству (16)

$$\frac{2 \ln \nu_n}{b_n} < \frac{2 \ln \nu_n}{b_n(1 - 1/\nu_n)} = 2x(t), \quad t \in [a_n, b_n].$$

Поэтому, с учетом неравенства $\int_1^t x(s) ds \leq \ln t$, $t > 1$, имеем

$$\begin{aligned} \ln(2 \ln \nu_n) - \ln(2\nu) &= \ln \frac{2 \ln \nu_n}{2\nu} = \ln \frac{(2 \ln \nu_n)/b_n}{2\nu/b_n} \\ &< \ln(2x(T)T) \leq \ln \left(4 \int_1^T x(s) ds \right) \leq 2 \ln \ln T. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение предложения 4.

ЛЕММА 1. Для произвольной последовательности чисел $\{s_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию $s_k > C > e$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо следующее неравенство:

$$\frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_N} \sum_{k=1}^N \frac{s_k \ln s_k}{s_1 + s_2 + \dots + s_k} \leq \frac{\ln C}{C}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя правильные дроби $s_k/(s_1 + s_2 + \dots + s_k)$ на 1, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_N} \sum_{k=1}^N \frac{s_k \ln s_k}{s_1 + s_2 + \dots + s_k} \\ &\leq \frac{\sum_{k=1}^N \ln s_k}{s_1 + s_2 + \dots + s_N} = \frac{\ln(s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_N)}{s_1 + s_2 + \dots + s_N} = \frac{\ln \sqrt[N]{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_N}}{(s_1 + s_2 + \dots + s_N)/N} \\ &\leq \frac{\ln \sqrt[N]{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_N}}{\sqrt[N]{s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_N}} \leq \frac{\ln C}{C}, \end{aligned}$$

где в процессе доказательства было использовано неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, а также монотонное убывание функции $(\ln t)/t$ при $t > e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (10). Как было отмечено выше, достаточно показать, что функция

$$\Delta_x(t) = M \left(M \left(x^{-1} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{\ln t} \int_1^t x(s) ds \right) = \frac{1}{\ln t} \int_1^t \frac{\delta_x(s) ds}{s \ln s}$$

стремится к нулю и, следовательно, попадает в ядро функционала γ при всех $x \in A$.

Заметим, что специальный выбор значений функции $x \in A$ при $1 \leq t \leq e$ сделан для исключения особенности написанного интеграла в точке 1 и не умаляет общности, так как в силу сингулярности функционала γ результат применения обеих формул в (10) зависит только от значений $x(t)$ при больших t .

Так как $\Delta_x(t)$ есть выпуклый неотрицательный функционал на A , то согласно предложению 3 при проверке $\Delta_x(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ достаточно рассматривать только крайние точки множества LA .

Возьмем произвольное $\epsilon > 0$, произвольную крайнюю точку $x \in LA$ и зафиксируем число $C > e$ так, чтобы $8 \ln \ln C / \ln C < \epsilon$.

В силу определения множества LA имеем $\delta_x(s) = 0$ при $s \in [1, e]$. В свою очередь промежуток $[e, T]$ распадается на интервалы постоянства функции x . Интервал $(a_n, b_n]$ отнесем к множеству $D_1 \subset \mathbb{R}$, если $\nu_n = b_n/a_n \leq C$. Тогда согласно неравенству (18) на таком интервале $\delta_x(t) < 2 \ln C$. Отнесем также к множеству D_1 все

промежутки $(a_n, \tau_n]$, относящиеся к тем интервалам $(a_n, b_n]$, для которых $\nu_n > C$, так как на $(a_n, \tau_n]$ всегда $\delta_x(t) \leq 1$.

Тогда $D_2 = (e, T] \setminus D_1$ состоит из промежутков $(\tau_n, b_n]$ тех интервалов, для которых $\nu_n > C$. Перенумеруем интервалы, относящиеся к D_2 , так, чтобы последовательность b_n возрастала. Для произвольного $T > e$ имеем такое наименьшее N , что $b_N \geq T$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_x(T) &= \frac{1}{\ln T} \int_1^T \frac{\delta_x(s) ds}{s \ln s} = \frac{1}{\ln T} \int_{D_1} \frac{\delta_x(s) ds}{s \ln s} + \frac{1}{\ln T} \int_{D_2} \frac{\delta_x(s) ds}{s \ln s} \\ &\leq \frac{1}{\ln T} \int_1^T \frac{2 \ln C ds}{s \ln s} + \frac{1}{\ln T} \left(\sum_1^{N-1} \int_{\tau_n}^{b_n} \delta_x(s) d \ln \ln s + \int_{\tau_N}^T \delta_x(s) d \ln \ln s \right) \\ &\leq 2 \ln C \frac{\ln \ln T}{\ln T} + \frac{1}{\ln b_{N-1}} \sum_1^{N-1} \int_{\tau_n}^{b_n} \delta_x(s) d \ln \ln s + \frac{1}{\ln T} \int_{\tau_N}^T \delta_x(s) d \ln \ln s. \quad (22) \end{aligned}$$

Выберем T настолько большим, чтобы первое слагаемое в (22) стало меньше ϵ . К оценке второго слагаемого применим неравенство (20) и лемму 1. Действительно, для интервалов, относящихся к D_2 , имеем

$$e = b_0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq a_N < T \leq b_N.$$

Отсюда

$$b_n = \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \frac{b_{n-2}}{b_{n-3}} \dots \frac{b_1}{b_0} b_0 \geq \nu_n \cdot \nu_{n-1} \cdot \nu_{n-2} \cdot \dots \cdot \nu_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln b_{N-1}} \sum_1^{N-1} \int_{\tau_n}^{b_n} \delta_x(s) d \ln \ln s &\leq \frac{1}{\ln b_{N-1}} \sum_1^{N-1} \frac{4 \ln \nu_n [\ln(2 \ln \nu_n)]}{\ln b_n} \\ &\leq \frac{4}{\sum_{n=1}^{N-1} \ln \nu_n} \sum_1^{N-1} \frac{\ln \nu_n [\ln(\ln \nu_n)]}{\sum_{k=1}^n \ln \nu_k} \leq 4 \frac{\ln \ln C}{\ln C} < \epsilon. \end{aligned}$$

Наконец, последнее слагаемое в (22) оценим с помощью предложения 4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln T} \int_{\tau_N}^T \delta_x(s) d \ln \ln s &\leq \frac{1}{\ln T} \cdot \frac{4 \ln \nu_N [\ln(2 \ln \nu_N) - \ln(2 \nu)]}{\ln b_N} \\ &\leq \frac{8 \ln \nu_N [\ln \ln T]}{\ln T \sum_{k=1}^N \ln \nu_k} \leq \frac{8 \ln \ln T}{\ln T} < \epsilon \end{aligned}$$

при достаточно большом T . Что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 И ФОРМУЛЫ (11). Согласно пункту 2) теоремы 3 левая и правая части формулы (10) могут не зависеть от γ лишь одновременно. Тогда согласно теореме 5.12 и замечанию 5.13 из [8] (см. также [9; теорема 8]) в среднем члене формулы (10) обобщенный предел γM можно заменить на обычный предел $\lim$.

Далее, из теоремы 3.3 [8] следует, что существует $L = \lim M^2(\text{НКТ}_\alpha(x))$ на бесконечности и, значит, $M(\text{НКТ}_\alpha(x)) \rightarrow L$ по Чезаро. Применим теорему тауберова

типа: если функция $\sigma(u)$, $u > 0$, не убывает, то сходимость обычного (не логарифмического) чезаровского среднего дроби $\sigma(u)/u$ влечет сходимость самой дроби (см. теоремы 7 в [9] и 2 в [10], или теоремы 64 в [11; разделы 6.1, 6.8] и 3.17 в [8]). С помощью замены переменной сходимость логарифмического среднего $M^2(\text{НКТ}_\alpha(x))$ сводится к сходимости обычного среднего

$$L = \frac{1}{\ln T} \int_1^T \left(\frac{1}{\ln u} \int_1^u (\text{НКТ}_\alpha(x))(s) \frac{ds}{s} \right) \frac{du}{u} = \frac{1}{\ln T} \int_0^{\ln T} \left(\frac{1}{v} \int_1^{e^v} (\text{НКТ}_\alpha(x))(s) \frac{ds}{s} \right) dv.$$

Поэтому мы находимся в условиях сформулированной теоремы и, следовательно, существует обычный $\lim M(\text{НКТ}_\alpha(x)) = L$.

Теорема 4 и формула (11) доказаны.

Обратимся теперь к теореме 6, которая касается более частного случая, чем теорема 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть для неотрицательной убывающей функции $f(s)$, $s > 1$, существует предел $\lim \text{НКТ}_\alpha f(\lambda) = C_0$, и пусть $h(u) = f^{-1}(1/u)$. Тогда, делая замену $f(s) = 1/u$, $s = f^{-1}(1/u) = h(u)$ и применяя утверждение (iii) теоремы 2, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{НКТ}_\alpha(f) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^\infty e^{-1/(tf(s))^\alpha} ds \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^\infty e^{-(u/t)^\alpha} df^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \lim_{t \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u} = C_0. \end{aligned}$$

Как следствие, после подстановки

$$f^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = u, \quad \frac{1}{t} = f(u)$$

имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} = \lim_{u \rightarrow \infty} u f(u) = \frac{C_0}{(1/\alpha)\Gamma(1/\alpha)} = C,$$

что и доказывает принадлежность f пространству L_w .

Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r f(s) ds = C.$$

Тогда согласно [2; следствие 3.7] мы будем иметь

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_1^\infty (f(s))^{1+1/r} ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r f(s) ds = C.$$

Действительно, пусть $C(t) := f(t)t$. Тогда по доказанному выше $C(t) = C + \beta(t)$, где $\beta(t)$ стремится к нулю. Возьмем произвольное $\epsilon > 0$, и пусть $\beta(t) < \epsilon$ при $t > N$. Тогда

$$\left| \frac{1}{\ln r} \int_1^r f(t) dt - C \right| = \left| \frac{1}{\ln r} \int_1^r \left(\frac{C}{t} + \frac{\beta(t)}{t} \right) dt - C \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{C}{t} dt - C \right| + \frac{1}{\ln r} \int_1^r \left| \frac{\beta(t)}{t} \right| dt \\ &\leq |C - C| + \frac{1}{\ln r} \int_1^N \left| \frac{\beta(t)}{t} \right| dt + \frac{\epsilon}{\ln r} \int_N^r 1/t dt = o(1) + \epsilon. \end{aligned}$$

Теорема 6 доказана.

Автор благодарен Ф. А. Сукочеву, Е. М. Семенову и А. Л. Кэри за внимательное прочтение рукописи, ценные замечания и многолетнее плодотворное сотрудничество.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [2] A. Carey, J. Phillips, F. Sukochev, “Spectral flow and Dixmier traces”, *Adv. Math.*, **173**:1 (2003), 68–113.
- [3] A. L. Carey, A. Rennie, A. Sedaev, F. Sukochev, “The Dixmier trace and asymptotics of zeta functions”, *J. Funct. Anal.*, **249**:2 (2007), 253–283.
- [4] А. Л. Кери, Ф. А. Сукочев, “Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии”, *УМН*, **61**:6 (2006), 45–110.
- [5] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [6] J. Dixmier, “Existence de traces non normales”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **262** (1966), 1107–1108.
- [7] P. G. Dodds, B. de Pagter, E. M. Semenov, F. A. Sukochev, “Symmetric functionals and singular traces”, *Positivity*, **2**:1 (1998), 47–75.
- [8] S. Lord, A. Sedaev, F. Sukochev, “Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators”, *J. Funct. Anal.*, **224**:1 (2005), 72–106.
- [9] А. А. Седаев, Ф. А. Сукочев, С. Лорд, “Следы Конна–Диксмье, сингулярные симметричные функционалы и измеримые по Конну элементы”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 948–953.
- [10] А. А. Седаев, “Об одной теореме тауберова типа, возникающей в теории сингулярных симметричных функционалов”, *Вестн. ВГУ. Сер. Физ., матем.*, 2004, № 1, 146–148.
- [11] G. Hardy, *Divergent Series*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1949.

А. А. Седаев

Воронежский государственный архитектурно-строительный
университет
E-mail: sed@vmail.ru

Поступило

15.12.2007

Исправленный вариант

15.03.2009