Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Семенчук, О. А. Мокеева, О факторизуемых группах, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 2, 273–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:58:16

О факторизуемых группах

В. Н. Семенчук, О. А. Мокеева

Работа посвящена описанию разрешимых наследственных формаций Фиттинга $\mathfrak{F}$, содержащих любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p .

Библиография: 6 названий.

Любая конечная группа вида $G = AB$, где A и B – p -замкнутые подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p , является p -замкнутой.

В работе [1] Тютянов доказал, что любая конечная группа вида $G = AB$, где A и B – p -нильпотентные подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p , является p -нильпотентной группой.

Сформулируем следующую общую проблему.

ПРОБЛЕМА. Найти классы конечных групп $\mathfrak{F}$, содержащих любую конечную группу $G = AB$, где A и B принадлежат $\mathfrak{F}$ и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на некоторое простое число p .

В работе данная проблема решена в классе разрешимых групп для произвольной наследственной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. При решении этой проблемы важную роль сыграли формации Шеметкова, т.е. такие формации $\mathfrak{F}$, у которых любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа является либо группой Шмидта, либо группой простого порядка.

Напомним некоторые обозначения и понятия.

Минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой мы будем называть группу, не принадлежащую некоторому классу групп $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Множество таких групп обозначают $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Обозначим через $\mathfrak{G}_\pi$ множество всех π -групп, $\mathfrak{S}$ – множество всех разрешимых групп.

Все другие определения и обозначения можно найти в [2].

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ – непустые формации. Тогда

$$(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольная группа из $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. Тогда $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1$ и $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_2$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$.

Пусть G – произвольная группа из $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3 \cap \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3$ и $G \in \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3$. Тогда $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1$ и $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_2$. Итак, $G^{\mathfrak{F}_3} \in \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. А это значит, что $G \in (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, а f – ее максимальный внутренний локальный экран, $\pi(\mathfrak{F})$ – характеристика формации $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\tau(\mathfrak{F})$ множество простых чисел из $\pi(\mathfrak{F})$ таких, что $f(p) \neq \mathfrak{F}$, где p – простое число из $\tau(\mathfrak{F})$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, f – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \right) \cap \left(\bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'} \mathfrak{F} \right) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

По лемме 1

$$\mathfrak{F} = \left(\bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \right) \cap \left(\bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'} \right) \mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} = \bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формация $\mathfrak{F}$ называется p -формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с нормальной p -силовой подгруппой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{F}$ – p -формация Шеметкова;
- 2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $p \in \pi$ и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из 1) следует 2). Из леммы 2 следует, что любую локальную формацию можно представить в виде

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \tau(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что если $\mathfrak{F}$ – p -формация Шеметкова, то

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Действительно, очевидно, что

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Покажем обратное включение. Пусть G – группа наименьшего порядка из

$$\mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \setminus \mathfrak{F}.$$

Так как $\mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ – наследственная формация, то $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация, то $\Phi(G) = 1$. Нетрудно показать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $C_G(N) = N$. Согласно условию G либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с нормальной p -силовой подгруппой.

Пусть $|G| = q$. Так как $G \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, то $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть G – группа Шмидта и

$$G = G_p \rtimes G_q, \quad \text{где } |G_q| = q.$$

Очевидно, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда из $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{\pi(f(p))}$. А это значит, что $q \in \pi(f(p))$. Так как $|G_q| = q$, то $G_q \in f(p)$. Но тогда

$$G_p G_q / G_p \simeq G_q \in f(p).$$

Так как f – полный экран, то $G = G_p G_q \in f(p)$. Так как f – внутренний экран, то $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Покажем, что из 2) следует 1).

Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})})$. Согласно условию G – разрешимая группа. Пусть $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем N – p -группа и $C_G(N) = N$. Согласно теореме 1.5 из [3]

$$G = N \rtimes M, \quad \text{где } M \in \mathcal{M}(\varphi(p)),$$

где φ – полный локальный экран формации $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi}$. Согласно следствию 7.13 из [4] $\varphi(p) = \mathfrak{G}_{\pi}$. А это значит, что $|M| = r$, где $r \notin \pi$. Отсюда нетрудно заметить, что G – группа Шмидта. Согласно лемме 2 из [5] G – либо группа Шмидта с нормальной p -силовой подгруппой, либо группа простого порядка. Теорема доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная p -формация Шеметкова. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит любую p -разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Тогда нетрудно доказать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем $\Phi(G) = 1$ и $C_G(N) = N$. Так как G – p -разрешимая группа, то либо N – p -группа, либо p' -группа. Если N – p' -группа, то из того, что $G/N \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ следует, что $G \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} = \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть N – p -группа. Согласно условию $N \subseteq A$ и $N \subseteq B$. Так как $A \in \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_{\pi} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$ и $C_A(N) = N$, то $O_{p'}(A) = 1$. Отсюда следует, что $A \in \mathfrak{G}_{\pi}$. Аналогичным образом получаем, что $B \in \mathfrak{G}_{\pi}$. Отсюда и группа $G = AB \in \mathfrak{G}_{\pi}$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Напомним, что подгруппу H группы G называют $\mathfrak{F}$ -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_n = H$$

такая, что $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

В работе [6] было доказано, что любая формация Шеметкова $\mathfrak{F}$ замкнута относительно произведения $\mathfrak{F}$ -субнормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная p -формация Шеметкова. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит любую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p и либо A , либо B $\mathfrak{F}$ -субнормальны в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная p -формация Шеметкова. Тогда согласно теореме 1 она имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_\pi \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π – некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p .

Пусть G – группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, такая, что $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p и A $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G . Нетрудно показать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . Так как $\mathfrak{F}$ – локальная формация, то $\Phi(G) = 1$.

Пусть N – абелева группа и N – q -группа. Если $q \neq p$, то из того факта, что $G/N \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Если N – p -группа, то, как и в лемме 3, можно показать, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Пусть N – неабелева группа. В этом случае

$$N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$$

есть прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп и $C_G(N) = 1$.

Рассмотрим подгруппу $H = AN$. Так как A – собственная $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{F}}$, то нетрудно показать, что $H = AN \neq G$. Рассмотрим подгруппу $A^H \subseteq AN \neq G$. По тождеству Дедекинда

$$A^H = A^H \cap G = A^H \cap AB = A(A^H \cap B).$$

Очевидно, что $A^H \cap B$ – $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа A^H . Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $B \in \mathfrak{F}$, то $A^H \cap B \in \mathfrak{F}$. Очевидно, что индексы $|A^H : A|$, $|A^H : A^H \cap B|$ не делятся на p . Тогда по индукции $A^H \in \mathfrak{F}$. Если $A^H \cap N = 1$, то $A^H \subseteq C_G(N) = 1$. Получили противоречие. Значит, $A^H \cap N \neq 1$. Так как A^H – нормальная подгруппа из AN , то $A^H \cap N$ – нормальная подгруппа из N . Но тогда

$$A^H \cap N = N_{i_1} \times N_{i_2} \times \cdots \times N_{i_k},$$

где N_{i_j} – изоморфные неабелевы простые группы, $j = 1, 2, \dots, k$. Так как $A^H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $A^H \cap N \in \mathfrak{F}$. Отсюда нетрудно показать, что $N \in \mathfrak{F}$. Если $|N|$ делится на p , то из того, что $N \in \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_\pi$, $p \in \pi$, следует, что $O_{p'}(N) \neq 1$ – нормальная подгруппа группы G . Противоречие. Если N – p' -группа, то ясно, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Формация $\mathfrak{F}$ называется p' -формацией Шеметкова, если любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа является либо группой Шмидта с ненормальной p -силовской подгруппой, либо группой простого порядка.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mathfrak{F}$ – p' -формация Шеметкова;
- 2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где $p \in \pi$ и $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из 1) следует 2).

Ясно, что формация $\mathfrak{F}$ является формацией Шеметкова. Тогда согласно теореме 24.3 из [4] эта формация имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{q'} \mathfrak{G}_{\pi(f(q))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}, \quad (1)$$

где f – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Вначале докажем, что $p' \cap \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(f(q))$, где q – любое простое число из $\pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что это не так. Тогда найдется простое число $r \in p' \cap \pi(\mathfrak{F})$, но $r \notin \pi(f(q))$. Обозначим через M группу простого порядка r . Очевидно, что $M \in \mathfrak{F}$ и $M \in \mathcal{M}(f(q))$. Так как $O_q(M) = 1$, то существует точный неприводимый $F_q(M)$ -модуль N , где F_q – поле из q элементов. Пусть $\Gamma = N \rtimes M$. Покажем, что $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как N точен, то $C_\Gamma(N) = N$. Так как $M \notin f(q)$, то, очевидно, что $\Gamma \notin \mathfrak{F}$. Пусть L – произвольная максимальная подгруппа из Γ . Так как $M \in \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то нетрудно заметить, что $L \in \mathfrak{F}$. Итак, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как $r \neq p$, то это невозможно ввиду того, что $\mathfrak{F}$ – p' -формация Шеметкова. Итак, $p' \cap \pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(f(q))$ для любого q из $\pi(\mathfrak{F})$. Отсюда, в частности, следует, что $\pi(f(p)) = \pi(\mathfrak{F})$. Учитывая данные факты, нетрудно показать, что равенство (1) принимает следующий вид:

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}} \mathfrak{G}_{q'} \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}. \quad (2)$$

Используя лемму 1, равенство (2) приводится к виду

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π – некоторое множество простых чисел, содержащее число p .

Покажем, что из 2) следует 1).

Действительно, G – произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа. Согласно условию G разрешима. Пусть $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.5 из [3] $G = N \rtimes M$, где N – единственная минимальная нормальная подгруппа, N – q -группа и $M \in \mathcal{M}(f(q))$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если $q \in p'$, то из того факта, что $G/N \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, следует, что $G \in \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$. Получили противоречие. Тогда $q \in \pi$. Согласно следствию 7.13 из [4] локальная формация $\mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'}$ имеет полный локальный экран h такой, что $h(q) = \mathfrak{G}_{p'}$. Очевидно, что $f(q) = \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}$. Так как $M \in \mathcal{M}(f(q))$, то очевидно, что $|M| = p$. Итак, мы показали, что любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа G с $\Phi(G) = 1$ либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с ненормальной p -силовой подгруппой. Согласно лемме 2 из [5] это же верно, когда $\Phi(G) \neq 1$. Итак, $\mathfrak{F}$ – p' -формация Шеметкова. Теорема доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная p' -формация Шеметкова. Формация $\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p , только в том случае, когда $\mathfrak{F}$ – формация p -замкнутых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}$ – p' -формация Шеметкова. Согласно теореме [3] она имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где $p \in \pi$. Если $\pi = \{p\}$, то $\mathfrak{F}$ – формация p -замкнутых групп. Так как индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p , то A и B содержат силовскую p -подгруппу группы G . По условию A и B p -замкнуты. Отсюда следует, что G p -замкнута. Пусть множество π содержит простое число $q \neq p$. Покажем, что в этом случае утверждение леммы неверно. Пусть Z_q – группа порядка q . Пусть r – простое число, отличное от p и q . Так как $O_r(Z_q) = 1$, то существует точный неприводимый $F_r(Z_q)$ – модуль N , где F_r – поле из r элементов. Пусть $\Gamma = N \rtimes Z_q$. Так как $O_q(\Gamma) = 1$ и Γ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, то согласно лемме 18.8 из [4] существует точный неприводимый $F_q(\Gamma)$ – модуль L , где F_q – поле из q элементов. Пусть

$$\Gamma_1 = L \rtimes (N \rtimes Z_q).$$

Так как $O_p(\Gamma_1) = 1$, то, как и выше, существует точный неприводимый $F_p(\Gamma_1)$ – модуль T , где F_p – поле из p элементов. Пусть

$$\Gamma_2 = T \rtimes \Gamma_1 = T \rtimes (L \rtimes (N \rtimes Z_q)).$$

Рассмотрим следующие две подгруппы:

$$A = TLN \quad \text{и} \quad B = TZ_q.$$

Ясно, что $\Gamma_2 = AB$. Подгруппы A и B $\{p, q\}$ -замкнуты, причем индексы $|\Gamma_2 : A|$, $|\Gamma_2 : B|$ не делятся на p . Если бы группа Γ_2 была бы $\{p, q\}$ -замкнута, то тогда Z_q была бы нормальной подгруппой в группе $N \rtimes Z_q$, что невозможно. Итак, мы показали, что утверждение теоремы верно только тогда, когда $\pi = \{p\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть G – p -разрешимая группа, $G = AB$, где $l_p(A) \leq 1$, $l_p(B) \leq 1$, индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p . Тогда $l_p(G) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по порядку G . Пусть N – минимальная нормальная подгруппа G . Так как G – p -разрешимая группа, то N либо p -группа, либо p' -группа. Если N – p' -группа, то $l_p(G) = l_p(G/N)$. Согласно индукции $l_p(G) = l_p(G/N) \leq 1$. Получили противоречие.

Пусть N – p -группа. Так как $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p , то $N \subseteq A \cap B$. Так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$, то $C_G(N) = N$. Рассмотрим подгруппу $F_p(A)$. Так как $N \subseteq F_p(A)$, N – p -группа, $C_A(N) = N$, то нетрудно показать, что $F_p(A)$ – p -группа. Так как $l_p(A) \leq 1$, то A – p -замкнутая группа. Аналогичным образом можно доказать, что B – p -замкнутая группа. Отсюда следует, что G – p -замкнутая группа. А это значит, что $l_p(G) \leq 1$. Получим противоречие. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная наследственная формация, содержащая любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p . Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа H принадлежит одному из следующих типов:

- 1) H – группа порядка r , где $r \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $H = H_p \rtimes H_q$ – группа Шмидта;
- 3) $H = H_q \rtimes H_p$, где $H_p \Phi(H) / \Phi(H) \in \mathcal{M}(f(q))$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$;
- 4) $H = H_p H_q$, $H^{\mathfrak{F}} \subset H_p$, $H / \Phi(H) = H^{\mathfrak{F}} \Phi(H) / \Phi(H) \rtimes L / \Phi(H)$, где $L / \Phi(H)$ – q -замкнутая группа, $L / \Phi(H) \in \mathcal{M}(f(p))$, где f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – произвольная разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа. Если $\pi(H) \not\subseteq \pi(\mathfrak{F})$, то нетрудно показать, что H – группа простого порядка r , причем $r \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что H – бипримарная pd -подгруппа. Действительно, если H – примарная группа, то из локальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Пусть $|\pi(H)| \geq 3$. Так как H – разрешимая группа, то нетрудно показать, что $H = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$, индексы $|H : A|$, $|H : B|$ не делятся на p . Согласно условию $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $H = H_p H_q$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа H . Если N – p -группа, то $N \subseteq H_p$.

Рассмотрим случай, когда $N = H_p$. Покажем, что в этом случае H – группа Шмидта. Вначале докажем, что H_q – циклическая группа. Действительно, в противном случае $H_q = H_1 H_2$, где H_1, H_2 – максимальные подгруппы H_q . Тогда $H = H_p H_1 H_p H_2$. Так как $H_p H_i \in \mathfrak{F}$, $|H : H_p H_i|$ не делятся на p , $i = 1, 2, \dots, k$, то $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Итак, H_q – циклическая группа; $|H_q| = q^n$. Пусть $\Phi(H) = 1$. Покажем, что $n = 1$. Предположим противное. Пусть $|H_q| = q^n$, где $n > 1$. Пусть E и L – циклические группы соответственно порядков q^{n-1} и q . Обозначим через T регулярное сплетение $E wr L$. И пусть K – база сплетения, т.е. $T = K \rtimes L$. Так как некоторая подгруппа группы T изоморфна H_q , то $T \notin f(p)$. Очевидно, что подгруппы K, L принадлежат формации $f(p)$.

Пусть $R = PwrT$, где $|P| = p$. Обозначим через C базу сплетения R . Тогда

$$R = C \rtimes T = C \rtimes (K \rtimes L).$$

Легко видеть, что

$$CK \in \mathfrak{F}, \quad CL \in \mathfrak{F}.$$

Так как индексы $|R : CK|$ и $|R : CL|$ не делятся на p , то $R \in \mathfrak{F}$. Но $F_p(R) = C$, и поэтому

$$T \simeq R/C \in f(p).$$

Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Итак, мы доказали, что $H/\Phi(H)$ – группа Шмидта. Согласно лемме 2 из [5] H – группа Шмидта. Следовательно, H – группа типа 2).

Пусть N – p -группа и $N \subset H_p$. Пусть $\Phi(H) = 1$. Тогда согласно теореме 1.5 из [3]

$$H = H^{\mathfrak{F}} \rtimes L, \quad \text{где } H^{\mathfrak{F}} = N, \quad L \in \mathcal{M}(f(p)),$$

f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как $N = F(H)$, то $F(L) - q$ -группа. Пусть $F(L) \neq H_q$. Тогда рассмотрим подгруппу $F(L)L_p H^{\mathfrak{F}} = A$. Так как A – собственная подгруппа H , то $A \in \mathfrak{F}$. Так как $H_p = H^{\mathfrak{F}} L_p$, то $|H : A|$ не делится на p . Так как L – разрешимая группа, то $F(L) \not\subseteq \Phi(L)$. Но тогда в L существует максимальная подгруппа T такая, что $L = F(L)T$. Рассмотрим подгруппу $B = H^{\mathfrak{F}} T$. Так как B – собственная подгруппа H , то $B \in \mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $|H : B|$ не делится на p и $H = AB$. Теперь согласно условию $H \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, мы доказали, что $F(L) = H_q$, т.е. L – q -замкнутая группа. Итак, H – группа типа 4).

Пусть теперь N – q -группа. Тогда $N \subseteq H_q$. Покажем, что $N = H_q$. Предположим, что $N \subset H_q$. Пусть $\Phi(H) = 1$. Тогда в H найдется максимальная подгруппа A такая, что $H = AN$. Рассмотрим подгруппу $H_p N = B$. Так как A и B – собственные

подгруппы H , то они принадлежат $\mathfrak{F}$. Очевидно, что $|H : B|$, $|H : A|$ не делятся на p и $H = AB$. Тогда согласно условию $H \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Отсюда следует, что $H/\Phi(H)$ – q -замкнутая, но тогда H – q -замкнута. Тот факт, что $H_p\Phi(H)/\Phi(H) \in \mathcal{M}(f(p))$ (f – максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$) следует из теоремы 1.5 из [3]. Итак, H – группа типа 3). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, содержащая любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на p . Тогда любая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа H принадлежит одному из следующих типов:

- 1) H – группа порядка r , где $r \notin \pi(\mathfrak{F})$;
- 2) $H = H_p \rtimes H_q$ – группа Шмидта;
- 3) $H = H_q \rtimes H_p$ – группа Шмидта;
- 4) $H = H_p H_q$, где $H^{\mathfrak{F}} \subset H_p$ и $H/\Phi(H) = H^{\mathfrak{F}}\Phi(H)/\Phi(H) \rtimes L/\Phi(H)$, где $L/\Phi(H)$ – группа Шмидта с нормальной q -силовской подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6 любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа H есть группа типа 1)–4) из леммы 6.

Пусть H – группа типа 3) из леммы 6. Тогда $H = H_q \rtimes H_p$. Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, то $f(p)$ – локальная формация. Согласно лемме $H_p\Phi(H)/\Phi(H) \in \mathcal{M}(f(q))$. Пусть $p \in \pi(f(q))$. Так как $f(q)$ – локальная формация, то $H_p\Phi(H)/\Phi(H) \in f(q)$, что невозможно. Итак, $p \in \pi(f(q))$. А это значит, что $H_p\Phi(H)/\Phi(H)$ – группа простого порядка p . Но тогда нетрудно заметить, что $H/\Phi(H)$ – группа Шмидта. Согласно лемме 2 из [5] H – группа Шмидта.

Пусть H – группа типа 4) из леммы 6. Тогда

$$H/\Phi(H) = H^{\mathfrak{F}}\Phi(H)/\Phi(H) \rtimes L/\Phi(H),$$

где $L/\Phi(H) \in \mathcal{M}(f(p))$. Покажем, что $L/\Phi(H)$ – группа Шмидта. Так как $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, то $f(p)$ – локальная формация. В виду леммы 2 из [5] при доказательстве утверждений мы можем считать, что $\Phi(L/\Phi(H)) = 1$. Пусть q – максимальный внутренний локальный экран формации $f(p)$. Согласно теореме 1.5 из [3]

$$L/\Phi(H) = L_q\Phi(H)/\Phi(H) \rtimes L_p\Phi(H)/\Phi(H),$$

где $L_p\Phi(H)/\Phi(H) \in \mathcal{M}(g(q))$.

Так как $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, то $g(q)$ является локальной формацией. Как и выше нетрудно доказать, что $|L_p\Phi(H)/\Phi(H)| = p$. Отсюда следует, что $L/\Phi(H)$ – группа Шмидта. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная разрешимая формация Фиттинга. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ содержит любую разрешимую группу $G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$ -подгруппы и индексы $|G : A|$, $|G : B|$ не делятся на простое число p , когда $\mathfrak{F}$ есть пересечение следующих классов групп:

- 1) класс p -замкнутых групп;
- 2) класс групп с p -длиной ≤ 1 ;
- 3) класс групп G таких, что $G/O_{p'}(G)$ – π -группа, где π – некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Согласно результатам работы [6] $\mathfrak{F}$ является тотально локальной формацией. Теперь можно применить результаты леммы 7.

Пусть любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа есть группа типа 1), 2) из леммы 7. Тогда $\mathfrak{F}$ является p -формацией Шеметкова. Согласно теореме 1 $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где π – некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p .

Пусть любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа является группой типа 1), 3). Тогда $\mathfrak{F}$ – p' -формация Шеметкова. Согласно теореме 3 она имеет следующее строение:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π – некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p . Согласно лемме 4 $\pi = \{p\}$. А это значит, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}$.

Пусть любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа – группа типа 1), 4). Пусть f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Известно, что

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Покажем, что для любого простого числа q из $\pi(\mathfrak{F})$, отличного от p , $f(q) = \mathfrak{F}$. Предположим противное. Пусть G – группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus f(q)$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $G \in \mathcal{M}(f(q))$. Так как $\mathfrak{F}$ – тотально локальная формация, то $f(q)$ – локальная формация. Отсюда нетрудно показать, что $\Phi(G) = 1$. Очевидно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N , причем $C_G(N) = N$. Так как f – полный экран, то $O_q(G) = 1$. А значит, N – r -группа, где $r \neq p$.

Согласно лемме 18.8 из [4] существует точный неприводимый $F_q[G]$ -модуль K , где F_q – поле из q элементов. Пусть $\Gamma = K \rtimes G$. Покажем, что $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как K точен, то $C_{\Gamma}(K) = K$. Так как $G \notin f(q)$, то очевидно, что $\Gamma \notin \mathfrak{F}$. Пусть M – произвольная максимальная подгруппа из Γ . Если $K \not\subseteq M$, то $\Gamma = KM$. Отсюда следует, что $M \simeq G$. А значит, $M \in \mathfrak{F}$. Пусть $N \subseteq M$. Тогда $M = KT$, где T – некоторая максимальная подгруппа из G . Так как $G \in \mathcal{M}(f(q))$, то $T \in f(q)$. Так как $M/K = KT/K \simeq T \in f(q)$, то из полноты экрана f следует, что $M \in f(q)$. Так как f – внутренний экран, то $M \in \mathfrak{F}$. Итак, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Последнее противоречит тому, что Γ – группа типа 4) из леммы 7.

Итак, $f(q) = \mathfrak{F}$ для любого $q \neq p$ из $\pi(\mathfrak{F})$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'} f(p) \bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F}) \setminus \{p\}} \mathfrak{S}_{q'} \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'} f(p) \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Рассмотрим локальную формацию $f(p)$. Так как любая минимальная не $f(p)$ -группа либо группа простого порядка, либо группа Шмидта с ненормальной p -силовой подгруппой, то $f(p)$ – p' -формация Шеметкова. Согласно теореме 3

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где π – некоторое множество простых чисел, содержащее простое число p . Следовательно,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})}.$$

Как и в лемме 4, можно показать, что $\pi = \{p\}$. Итак, $\mathfrak{F}$ – формация из пункта 3).

Нетрудно показать, что формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$ -группа есть группа одного из типов 1)–4), есть пересечение формаций из пунктов 1)–3) данной теоремы.

Достаточность следует из лемм 3 и 5. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Тютянов, “Факторизации π -нильпотентными сомножителями”, *Матем. сб.*, **187**:9 (1996), 97–102.
- [2] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [3] В. Н. Семенчук, “Минимальные не $\mathfrak{F}$ -группы”, *Алгебра и логика*, **18**:3 (1979), 348–382.
- [4] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.
- [5] В. Н. Семенчук, “Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$ -групп для произвольной totally локальной формации $\mathfrak{F}$ ”, *Матем. заметки*, **43**:4 (1988), 452–459.
- [6] В. Н. Семенчук, Л. А. Шеметков, “Сверхрадикальные формации”, *Докл. НАН Беларуси*, **44**:5 (2000), 23–25.

В. Н. Семенчук

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило

18.04.2008

О. А. Мокеева

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

E-mail: mokeeva@tut.by