Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Селькин, Р. В. Бородич, Об $\mathfrak{F}$ -достижимых подгруппах конечных групп, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 5, 727–735

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 12:41:15

Об $\mathfrak{F}$ -достижимых подгруппах конечных групп

М. В. Селькин, Р. В. Бородич

Установлено строение $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп в Θ -фраттиниевых расширениях.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Все рассматриваемые группы конечны. Исследование пересечений максимальных подгрупп является классической задачей. Начало этой теории восходит к работе Фраттини [1] 1885 г. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографию [2]). Одной из задач этого направления является исследование свойств пересечений максимальных подгрупп и влияние этих свойств на строение группы. Эта задача рассматривалась в работах Шеметкова [3], Шеметкова и Скибы [4], Селькина [2], Баллестера-Болинше [5], Бейдлемана и Смита [6] и других авторов. В работе Бейдлемана и Смита [6] был поставлен следующий вопрос: “Пусть H – субнормальная подгруппа группы G , содержащая подгруппу $\Phi(G)$. Будет ли H сверхразрешимой, если сверхразрешима группа $H/\Phi(G)$?” В данной работе этот вопрос исследуется более глубоко: вместо формации всех сверхразрешимых групп рассматривается произвольная локальная наследственная формация $\mathfrak{F}$, вместо подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ – Θ -подгруппа Фраттини, а вместо субнормальной подгруппы – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа.

2. Определения и обозначения. Подгрупповым t -функтором Θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$, состоящее из некоторых ее максимальных подгрупп и самой группы G [2]. При этом предполагается, что $\Theta(G^\alpha) = (\Theta(G))^\alpha$ для любого автоморфизма α группы G .

Согласно [2] t -функтор Θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

- 1) из $N \triangleleft G$ и $M \in \Theta(G)$ следует $MN/N \in \Theta(G/N)$;
- 2) из $M/N \in \Theta(G/N)$ следует $M \in \Theta(G)$.

В дальнейшем t -функтор Θ будем называть *абнормально полным*, если для любой группы G среди множества $\Theta(G)$ содержатся все абнормальные максимальные подгруппы группы G . Если t -функтор Θ выделяет в группе G все максимальные подгруппы, то такой t -функтор будем называть *тривиальным*.

Пусть Θ есть некоторый t -функтор. Напомним, что Θ -подгруппой Фраттини $\Phi_\Theta(G)$ называется пересечение всех Θ -подгрупп.

Через $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначим подгруппу, равную пересечению всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных Θ -подгрупп. Если m -функтор Θ выделяет в группе G все абнормальные подгруппы, то подгруппу $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ будем обозначать $\Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G)$. Если m -функтор Θ является тривиальным, то подгруппа $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ совпадает с подгруппой $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, строение которой изучалось в работах многих авторов. Всегда будем полагать, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G .

Напомним, что, если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то подгруппа H конечной группы G называется $\mathfrak{F}$ -достижимой, если имеется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий:

- 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ;
- 2) $\mathfrak{F}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} .

Если выполняется только условие 2), то такую подгруппу называют $\mathfrak{F}$ -субнормальной.

Понятие $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы, введенное О. Кегелем в работе [7], позволило систематизировать многие закономерности, связанные с нормальными и субнормальными подгруппами, а также их обобщениями. В данной работе идея $\mathfrak{F}$ -достижимой подгруппы используется для исследования поведения нормальных и обобщенно субнормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп во фраттининовых расширениях конечных групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Θ некоторый m -функтор. Определим подгруппу $\tilde{F}_{\Theta}(G)$ группы G следующими двумя условиями:

- 1) $\tilde{F}_{\Theta}(G) \supseteq \Phi_{\Theta}(G)$;
- 2) $\tilde{F}_{\Theta}(G)/\Phi_{\Theta}(G) = \text{Soc}(G/\Phi_{\Theta}(G))$.

Если подгрупповой m -функтор Θ является тривиальным, то $\Phi_{\Theta}(G) = \Phi(G)$ и подгруппа $\tilde{F}_{\Theta}(G)$ совпадает с подгруппой $\tilde{F}(G)$, введенной в работе [8]. На подгруппу $\tilde{F}_{\Theta}(G)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга $F(G)$, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы – содержать свой централизатор.

3. Вспомогательные результаты.

ЛЕММА 1 [2; лемма 2.4.12]. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, H , K и N – подгруппы группы G , причем подгруппа N нормальна в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , то $H \cap K$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы K , а NN/N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G/N ;
- 2) если $H \supseteq N$, то подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в G тогда и только тогда, когда подгруппа H/N $\mathfrak{F}$ -достижима в G/N ;
- 3) если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , то $H^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы G .

ЛЕММА 2 [11; теорема 2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, Θ – регулярный m -функтор. Тогда

$$\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi_{\Theta}(G)).$$

4. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Θ – абнормально полный регулярный t -функтор. Тогда для любой группы G справедливо $C_G(\tilde{F}_\Theta(G)) \subseteq F(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$H = \tilde{F}_\Theta(G), \quad C = C_G(H), \quad F = F(G).$$

Если $\Phi_\Theta(G) \neq 1$, то рассматриваем $G/\Phi_\Theta(G)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$$C\Phi_\Theta(G)/\Phi_\Theta(G) \subseteq F/\Phi_\Theta(G) = F(G/\Phi_\Theta(G)),$$

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi_\Theta(G) = 1$. Ввиду того, что подгруппа Фиттига $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G , получаем, что $F \subseteq C$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой главный фактор N/F группы G , что $N \subseteq C$. Так как $\text{Soc}(N)$ содержится в H , следовательно, он централизуется подгруппой N . Если $N \neq G$, то по идукции $N = F(N) = F(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, т.е. G/F – главный фактор группы G . По лемме 7.9 из [3]

$$G = LF, \quad L \cap F = 1, \quad F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G/F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и несложно заметить, что $L = G'$. Значит, L является минимальной нормальной подгруппой группы G , т.е. $L \subseteq H$. Данное включение невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [8]. Для любой группы G $C_G(\tilde{F}(G)) \subseteq F(G)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация и Θ – абнормально полный регулярный t -функтор. Если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi_\Theta(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в G , то она, очевидно, $\mathfrak{G}_\pi$ -достижима в G , где $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 1 подгруппа $H\Phi_\Theta(G)/\Phi_\Theta(G)$ $\mathfrak{G}_\pi$ -достижима в группе $G/\Phi_\Theta(G)$. Значит, на основании работы [6] имеем

$$H\Phi_\Theta(G)/\Phi_\Theta(G) \subseteq O_\pi(G/\Phi_\Theta(G)).$$

Пусть $O_\pi(G/\Phi_\Theta(G)) = K/\Phi_\Theta(G)$. По теореме 2 работы [9] подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times K_2$, где K_1 – π -группа, $\pi(K_2) \cap \pi = \emptyset$, $K_2 \subseteq \Phi_\Theta(G)$. Пусть H_1 – холловская π -подгруппа группы H , H_2 – холловская π' -подгруппа группы H . Очевидно, $H_1 \subseteq K_1$, $H_2 \subseteq K_2$. Поэтому $H = H_1 \times H_2$, причем H_1 – π -группа, $\pi(H_2) \cap \pi = \emptyset$, $H_2 \subseteq \Phi_\Theta(G)$.

Покажем, что $H_1 \in \mathfrak{F}$. Предположим, что это неверно и группа G является контр-примером минимального порядка. Тогда в G найдется $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа T такая, что из $T/T \cap \Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$ следует равенство $T = T_1 \times T_2$, где T_1 – π -группа, $\pi(T_2) \cap \pi = \emptyset$, $T_2 \subseteq \Phi_\Theta(G)$, но подгруппа T_1 не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Среди всех таких подгрупп выберем подгруппу H , имеющую в G наименьший индекс. Очевидно, что $H_1 \neq 1$. Поэтому $O_\pi(G) \neq 1$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Так как

$$H\Phi_\Theta(G)N/\Phi_\Theta(G)N \simeq H\Phi_\Theta(G)/H\Phi_\Theta(G) \cap \Phi_\Theta(G)N,$$

то $H\Phi_\Theta(G)N/\Phi_\Theta(G)N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны,

$$H\Phi_\Theta(G)N/\Phi_\Theta(G)N \simeq HN/HN \cap \Phi_\Theta(G)N.$$

Поэтому $HN/HN \cap \Phi_\Theta(G)N \in \mathfrak{F}$.

Так как $\Phi_\Theta(G)N/N \subseteq \Phi_\Theta(G/N)$, то

$$(HN/N)/(HN/N) \cap \Phi_\Theta(G/N) \in \mathfrak{F}.$$

Кроме того, на основании леммы 1 подгруппа HN/N $\mathfrak{F}$ -достижима в группе G/N . Теперь ввиду выбора группы G имеем $H_1N/N \in \mathfrak{F}$. Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G , отличная от N , то аналогично доказывается, что $H_1L/L \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что

$$H_1/L \cap N \simeq H_1 \in \mathfrak{F}.$$

Пришли к противоречию.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Из $N \subseteq \Phi_\Theta(G) \cap O_\pi(G)$ следует, что N – абелева p -группа для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Кроме того, $H_2 = 1$, $H = H_1$ и $HN/N \in \mathfrak{F}$. Если N не содержится в H , то $|G : HN| < |G : H|$. Кроме того, $HN/HN \cap \Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$. Значит, ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HN \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является наследственной, то $H \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $N \subseteq H$.

Предположим, что H – собственная подгруппа группы $HO_p(G)$. Ввиду леммы 1 подгруппа H $\mathfrak{F}$ -достижима в группе $HO_p(G)$. Поэтому существует такая цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = HO_p(G),$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется одно из условий:

- 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ;
- 2) $\mathfrak{F}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} .

Пусть $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , то, очевидно, $H_{i-1}^{f(p)}$ – нормальная подгруппа группы H_i . По теореме 4.7 из [3] формация $f(p)$ является наследственной. Поэтому $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$. Значит, подгруппа $H_{i-1}^{f(p)}$ нормальна в группе $H_i^{f(p)}$.

Пусть теперь $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$. Так как $H_i = H_{i-1}(O_p(G) \cap H_i)$, то

$$H_i/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) \simeq H_{i-1}/(H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_{i-1}).$$

Поэтому

$$(H_i)^{f(p)} \subseteq (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i).$$

Так как $H_{i-1}^{f(p)} \subseteq H_i^{f(p)}$, то

$$(H_i)^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i) = (H_{i-1})^{f(p)}(O_p(G) \cap H_i). \quad (*)$$

Согласно лемме 4.5 из [3] для любого $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ имеем

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'p}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как экран f является внутренним максимальным, на основании теоремы 3.3 из [3] $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда следует, что

$$(H_j)^{f(p)} / (H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq O_{p'}(H_j / (H_j)^{\mathfrak{F}}).$$

Так как $H_j O_j(G) / O_p(G) \in \mathfrak{F}$, то $(H_j)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_j \cap O_p(G)$. Таким образом,

$$(H_j)^{f(p)} = (H_j)_{p'}^{f(p)}(H_j)^{\mathfrak{F}},$$

где $(H_j)_{p'}^{f(p)}$ – холловская p' -подгруппа группы $(H_j)^{f(p)}$. Теперь из равенства $(*)$ следует, что холловская p' -подгруппа $(H_{i-1})_{p'}^{f(p)}$ группы $(H_{i-1})^{f(p)}$ является холловской p' -подгруппой группы $(H_i)^{f(p)}$. Значит,

$$(H_i)^{f(p)} = (H_{i-1})_{p'}^{f(p)}(H_i)^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $(H_i)^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$, то $(H_i)^{f(p)} \subseteq H_{i-1}$. Итак,

$$(H_{i-1})^{f(p)} \subseteq (H_i)^{f(p)} \subseteq H_i.$$

Отсюда следует, что подгруппа $(H_{i-1})^{f(p)}$ нормальна в группе $(H_i)^{f(p)}$.

Итак, подгруппа $H^{f(p)}$ субнормальна в группе $HO_p(G)$. Тогда $(H/N)^{f(p)} = H^{f(p)}N/N$ является субнормальной подгруппой группы $(H/N)O_p(G/N)$. Так как $H/N \in \mathfrak{F}$, то

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(H/N).$$

Из субнормальности $(H/N)^{f(p)}$ в $HO_p(G)/N$ следует, что

$$(H/N)^{f(p)} \subseteq O_{p'}(HO_p(G)/N).$$

Значит,

$$(H/N)^{f(p)}O_p(G/N) \subseteq O_{p'p}(HO_p(G)/N).$$

Так как

$$HO_p(G)/H^{f(p)}O_p(G) \simeq H/H \cap H^{f(p)}O_p(G) \in f(p),$$

то

$$(HO_p(G)/N)/O_{p'p}(HO_p(G)/N) \in f(p).$$

На основании теоремы 4.1 из [3] это означает, что все главные факторы группы $HO_p(G)/N$ содержатся в $O_p(G)/N$ и являются $\mathfrak{F}$ -центральными. Поэтому из $HO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $HO_p(G)/N \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, подгруппа $HO_p(G)$ $\mathfrak{F}$ -достижима в группе G . Так как $|G : HO_p(G)| < |G : H|$, то ввиду выбора подгруппы H имеем, что $HO_p(G) \in \mathfrak{F}$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Итак, $O_p(G) \subseteq H$. Пусть φ – естественный гомоморфизм группы G на группу $G/\Phi_\Theta(G)$. Отметим, что так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $\Phi_\Theta(G) \subseteq O_p(G)$. Пусть $S = \varphi^{-1}(O_p(G^\varphi))$ – полный прообраз подгруппы $O_p(G^\varphi)$. На основании теоремы 2 из [9] подгруппа S представима в виде $S = S_1\Phi_\Theta(G)$, где S_1 – холловская p' -подгруппа группы S . Теперь из того, что N – единственная минимальная нормальная подгруппа, имеем $O_p(G^\varphi) = 1$. Таким образом, все абелевы минимальные нормальные подгруппы группы G^φ являются p -группами.

Пусть K – неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G^φ . Предположим, что K не принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Тогда $K = K^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа H^φ $\mathfrak{F}$ -достижима в G^φ , из работы [10] $K \subseteq N_{G^\varphi}(H)$. Значит, $K \cap H^\varphi$ – нормальная подгруппа группы K и поэтому $(K \cap H^\varphi)^{\mathfrak{F}} = K \cap H^\varphi$. Так как $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $(K \cap H^\varphi)^{\mathfrak{F}} \subseteq (H^\varphi)^{\mathfrak{F}}$. Теперь из $H^\varphi \in \mathfrak{F}$ следует, что $K \cap H^\varphi = 1$. Значит, $KH^\varphi = K \times H^\varphi$.

Пусть теперь $K \in \mathfrak{F}$. Предположим, что K не содержится в H^φ . Так как подгруппа H^φ $\mathfrak{F}$ -достижима в $H^\varphi K$, существует такая цепь

$$H^\varphi = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_s = H^\varphi K,$$

что для каждого $i = 1, 2, \dots, s$ выполняется одно из условий:

- 1) подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i ;
- 2) $\mathfrak{F}$ -корадикал подгруппы H_i содержится в H_{i-1} .

В частности, либо подгруппа H^φ нормальна в группе H_1 , либо $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^\varphi$.

Пусть $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq H^\varphi$. Так как $H^\varphi K/K \in \mathfrak{F}$, то $(H^\varphi K)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Из наследственности формации $\mathfrak{F}$ имеем $(H_1)^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Так как подгруппа H_1 $\mathfrak{F}$ -достижима в $H^\varphi K$, ввиду леммы 1 $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – субнормальная подгруппа группы $H^\varphi K$. Очевидно, подгруппа K представима в виде $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где K_i – изоморфные простые группы. Так как подгруппа K неабелева, то $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ – произведение некоторых подгрупп K_i для i из $\{1, 2, \dots, n\}$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $(H_1)^{\mathfrak{F}} = K_1 \times \dots \times K_m$, где $k < m$. Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы H^φ , содержащаяся в $(H_1)^{\mathfrak{F}}$. Так как подгруппа L неабелева, то $K = L \times C_K(L)$. Отсюда, в частности, следует, что L – минимальная нормальная подгруппа группы $H^\varphi K$. Так как $L \subseteq H^\varphi$, то

$$H^\varphi K = H^\varphi(LC_K(L)) = H^\varphi C_K(L) = H^\varphi C_{H^\varphi K}(L).$$

Поэтому

$$H^\varphi K/C_{H^\varphi K}(L) = H^\varphi C_{H^\varphi K}(L)/C_{H^\varphi K}(L) \simeq H^\varphi/H^\varphi \cap C_{H^\varphi K}(L) = H^\varphi/C_{H^\varphi}(L).$$

Так как $H^\varphi \in \mathfrak{F}$, то $H^\varphi/C_{H^\varphi}(L) \in f(L)$. Но тогда $H^\varphi K/C_{H^\varphi K}(L) \in f(L)$, т.е. L – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы $H^\varphi K$. Так как формация $f(L)$ наследственна, то L – $\mathfrak{F}$ -центральный главный фактор группы H_1 . Отсюда из строения подгруппы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ следует, что все H_1 -главные факторы группы $(H_1)^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$ -центральны в H_1 . Значит, подгруппа H_1 принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Так как подгруппа H_1

$\mathfrak{F}$ -достижима в H_1K , а подгруппа $H_1K = H^\varphi K$ $\mathfrak{F}$ -достижима в G^φ , то H_1 – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G^φ . Пусть $\varphi^{-1}(H_1)$ – полный прообраз подгруппы H_1 . Тогда $\varphi^{-1}(H_1)$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G , $\varphi^{-1}(H_1)/\Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$ и $|G : \varphi^{-1}(H_1)| < |G : H|$. Ввиду выбора подгруппы H имеем $\varphi^{-1}(H_1) \in \mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то $H \in \mathfrak{F}$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь подгруппа H^φ нормальна в H . Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что H_1/H^φ – простая группа. Предположим, что $(H_1)^\mathfrak{F} \not\subseteq H^\varphi$. Тогда

$$H_1 = H^\varphi(H_1)^\mathfrak{F} = H^\varphi(K_1 \times \cdots \times K_m).$$

Так как

$$H_1/H^\varphi \simeq K_1 \times \cdots \times K_m / K_1 \times \cdots \times K_m \cap H^\varphi,$$

из $K \in \mathfrak{F}$ следует, что $(H_1)^\mathfrak{F} \subseteq H^\varphi$. Пришли к противоречию с предположением.

Значит, $(H_1)^\mathfrak{F} \subseteq H^\varphi$. Как показано выше, это приводит к противоречию с выбором подгруппы H .

Итак, если K – минимальная нормальная подгруппа группы G^φ , то либо $K = K^\varphi$ и $[K, H^\varphi] = 1$, либо $K \in \mathfrak{F}$ и $K \subseteq H^\varphi$. Если $K = K^\mathfrak{F}$, то, очевидно, $O_p(H^\varphi) \subseteq C_{G^\varphi}(K)$. Пусть $K \in \mathfrak{F}$. Тогда $K \subseteq H^\varphi$. Так как все минимальные нормальные подгруппы группы G являются либо p -группами, либо pd -группами, из $K \subseteq H^\varphi$ снова получаем $O_p(H^\varphi) \subseteq C_{G^\varphi}(K)$. Таким образом,

$$O_p(H^\varphi) \subseteq C_{G^\varphi}(\text{Soc}(G^\varphi)).$$

Так как $\Phi_\Theta(G^\varphi) = 1$, то $\text{Soc}(G^\varphi) = \tilde{F}_\Theta(G^\varphi)$. По теореме 2

$$O_p(H^\varphi) \subseteq F(G^\varphi) = O_p(H^\varphi).$$

Значит, $O_p(H^\varphi) = 1$.

Так как $H^\varphi \in \mathfrak{F}$, ввиду леммы 4.5 [3] из условия $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H^\varphi/O_p(H^\varphi) \in f(p)$. Так как $O_p(H^\varphi) = 1$, то $H^\varphi = H/\Phi_\Theta(G) \in f(p)$. Теперь из $\Phi_\Theta(G) \subseteq O_p(G)$ и $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $H \in f(p)$. Так как экран f является внутренним, то $H^\varphi \in \mathfrak{F}$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ – абнормально полный регулярный m -функтор. Если N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\Theta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда $\Theta(G) \setminus \{G\}$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп имеет место следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация. Если N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

В случае, когда m -функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы, из теоремы 2 получаем результат Селькина из монографии [2].

Так как $\mathfrak{F}$ -субнормальные и субнормальные подгруппы являются $\mathfrak{F}$ -достижимыми, в качестве следствия из теоремы 2 можно получить аналогичные утверждения для этих подгрупп.

Рассмотрим подгруппу $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$, равную пересечению всех $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных Θ -подгрупп, строение которой изучалось в работе [11].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация и Θ – абнормально полный регулярный m -функтор. Если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H/H \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2

$$\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}(G) = Z_{\mathfrak{F}}(G/\Phi_{\Theta}(G)).$$

Пусть K/S – G -главный фактор группы $\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}(G)$. Тогда он $\mathfrak{F}$ -централен в G и поэтому $G/C_G(K/S) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(K/S)$ и любого локального экрана f формации $\mathfrak{F}$. Если f – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то согласно теореме 4.7 из [3] формация $f(p)$ наследственна. Значит,

$$H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/C_{H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)}(K/S) \in f(p).$$

Отсюда следует, что все главные факторы группы $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}(G)$ $\mathfrak{F}$ -центральны. Поэтому $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_{\Theta}(G) \in \mathfrak{F}$. По лемме 1 $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G . Тогда на основании теоремы 2 подгруппа $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G)$ представима в виде $H\Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) = T_1 \times T_2$, где

$$T_1 \in \mathfrak{F}, \quad \pi(T_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset, \quad T_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G).$$

Так как формация $\mathfrak{F}$ наследственна, то и подгруппа H представима в виде $H = H_1 \times H_2$, где

$$H_1 \in \mathfrak{F}, \quad \pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset, \quad H_2 \subseteq \Phi_{\Theta}(G).$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, Θ – абнормально полный регулярный m -функтор. Если N – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_{\Theta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.

Если для любой группы G множество $\Theta(G)$ совпадает с множеством всех абнормальных максимальных подгрупп, то получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная локальная формация. Если H – $\mathfrak{F}$ -достижимая подгруппа группы G и $H/H \cap \Phi_{\Delta}^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то H представима в виде прямого произведения $H = H_1 \times H_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $H_1 \in \mathfrak{F}$;
- 2) $\pi(H_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$;
- 3) $H_2 \subseteq \Delta(G)$.

В случае, когда m -функтор Θ является тривиальным, из теоремы 3 получаем известный результат работы [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Frattini, “Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni”, *Rom. Acc. L. Rend.* (4), **1** (1885), 281–285.
- [2] М. В. Селькин, *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп*, Белорусская наука, Мн., 1997.
- [3] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [4] Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Современная алгебра, Наука, М., 1989.
- [5] A. Ballester-Bolinchés, M. D. Pérez-Ramos, “On $\mathfrak{F}$ -subnormal subgroups and Frattini-like subgroups of a finite group”, *Glasgow Math. J.*, **36**:2 (1994), 241–247.
- [6] J. C. Beidleman, H. Smith, “On Frattini-like subgroups”, *Glasgow Math. J.*, **35**:1 (1993), 95–98.
- [7] O. H. Kegel, “Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormsteilerverband echt enthalten”, *Arch. Math. (Basel)*, **30** (1978), 225–228.
- [8] P. Schmid, “Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen”, *Arch. Math. (Basel)*, **23** (1972), 236–242.
- [9] Е. Н. Бородич, М. В. Селькин, “Об абнормальных максимальных подгруппах конечных групп”, *Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины*, 2006, № 5(38), 11–14.
- [10] Л. П. Авдашкова, С. Ф. Каморников, “О нормализаторах $\mathfrak{F}$ -достижимых подгрупп”, *Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 1996, № 1, 33–35.
- [11] Е. Н. Бородич, Р. В. Бородич, “О пересечении $\mathfrak{F}$ -абнормальных максимальных Θ -подгрупп”, *Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 2007, № 3, 47–52.

М. В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Беларусь
E-mail: Selkin@gsu.by

Поступило

04.04.2008

Исправленный вариант

03.12.2010

Р. В. Бородич

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Беларусь
E-mail: Borodich@gsu.by