Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Калита, О равенстве единице весовых норм преобразований Рисса, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 869–882

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 03:47:04

УДК 517.5+517.9

О РАВЕНСТВЕ ЕДИНИЦЕ ВЕСОВЫХ НОРМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РИССА

Е. А. Калита

Рассматривается векторное преобразование Рисса $\nabla^t \Delta^{-(t+s)/2} \operatorname{div}^s$ четного порядка $s + t$ в весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$. Устанавливается, что при $t \neq s$, $n > 3$ его норма равна единице на некотором интервале значений a , и внутри интервала справедлива более сильная оценка для подчиненной нормы.

Библиография: 3 названия.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство, $D = (D_1, \dots, D_n)$ – оператор градиента (D_i – дифференцирование по координате x_i), div – сопряженный к D оператор, Δ^{-1} – оператор с символом $|\zeta|^{-2}$. Пусть s, t – целые неотрицательные числа, $s + t$ – четное положительное число. Рассматривается векторное преобразование Рисса порядка $s + t$ – оператор

$$T^{t,s} = D^t \Delta^{-(t+s)/2} \operatorname{div}^s,$$

понимаемый как оператор с символом $(\zeta_{i_1}, \dots, \zeta_{i_t} |\zeta|^{-t-s} \zeta_{j_1}, \dots, \zeta_{j_s}), i_k, j_l = 1, \dots, n$, и переводящий функции размерности n^s в функции размерности n^t .

Вычисление или, по крайней мере, хорошие оценки норм классических операторов представляют значительный интерес ввиду их широкого распространения в приложениях. Традиционно рассматриваются преимущественно L_p -нормы (см., например, работу [1] и список литературы в ней). В то же время известно, что при оценках в L_2 со степенным весом получение точных констант более вероятно, хотя в приложениях эти оценки обычно приводят к более слабым утверждениям, чем L_p -оценки. В данной работе рассматриваются L_2 -оценки с весом $|x|^a$ для оператора $T^{t,s}$. При $a = 0$ по равенству Парсеваля его норма, очевидно, равна единице. В работе устанавливается, что при $t \neq s$, $n > 3$ норма равна единице на некотором отрезке, не исчерпываемом точкой $a = 0$, и внутри отрезка справедлива более сильная оценка на некоторую подчиненную норму.

Отметим, что оператор $T^{t,s}$ естественно возникает при рассмотрении нелинейных эллиптических уравнений и систем высокого порядка [2], и результаты данной работы позволяют исследовать некоторый класс вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений и систем высокого порядка.

1. Основные результаты. Обозначим через $T_a^{t,s}$ норму оператора $T^{t,s}$ в пространстве $L_{2,a} = L_2(\mathbb{R}^n; |x|^a)$ (строго говоря, из одной декартовой степени этого пространства в другую; показатели декартовой степени пространств будем для краткости опускать).

Хорошо известно, что $T_a^{t,s} < \infty$ при $a \in (-n, n)$. Отметим следующие простые свойства:

- 1) $T_0^{t,s} = 1$;
- 2) $T_a^{t,s} \geq 1$.

Действительно, при $a = 0$ по равенству Парсеваля в L_2 без веса имеем ($\|\cdot\|$ обозначает норму в L_2)

$$\|T^{t,s}f\| = \|\zeta^t |\zeta|^{-t-s} \zeta^s \hat{f}\| \leq \|\hat{f}\| = \|f\|,$$

так что $T_0^{t,s} \leq 1$, но на функциях $f = D^s u$ при $u \in C_0^\infty$

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 = \|D^t \Delta^{(s-t)/2} u\| = \|D^s u\| = \|f\|, \quad (1)$$

так что $T_0^{t,s} = 1$.

Свойство 2) справедливо для практически любых весов. Пусть ω – вес в $\mathbb{R}^n$, который хотя бы в одной точке (в точке x_0) непрерывен и положителен. Пусть $B = B_R(x_0)$ – шар с центром x_0 радиуса R , и обозначим $\omega_1 = \inf_B \omega(x)$, $\omega_2 = \sup_B \omega(x)$, где $R > 0$ столь малое, что $\omega_1 > 0$, $\omega_2 < \infty$. Выбирая $f = D^s u$ при $s \geq t$ и $f = D^s \Delta^k u$, $k = (t-s)/2$, при $s < t$, где $u \in C_0^\infty(B)$, находим, что носитель $T^{t,s}f$ лежит в носителе u . Учитывая (1), получаем ($\|\cdot\|_\omega$ обозначает норму в $L_2(\mathbb{R}^n; \omega)$)

$$\begin{aligned} \|T^{t,s}f\|_\omega &= \|T^{t,s}f; L_2(B; \omega)\| \geq \omega_1^{1/2} \|T^{t,s}f; L_2(B)\| \\ &= \omega_1^{1/2} \|T^{t,s}f\| = \omega_1^{1/2} \|f\| \geq \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{1/2} \|f\|_\omega. \end{aligned}$$

По непрерывности ω в точке x_0 величина ω_1/ω_2 может быть сделана произвольно близкой к единице при выборе достаточно малого $R > 0$, что доказывает оценку $T_\omega^{t,s} \geq 1$.

Обозначим $A = \{a \in (-n, n) : T_a^{t,s} = 1\}$. Поскольку $T_0^{t,s} = 1$, $T_a^{t,s} \geq 1$ и $T_a^{t,s}$ логарифмически выпукло по a по интерполяционной теореме Стейна–Вейса, это множество представляет собой отрезок (возможно, состоящий из одной точки $a = 0$).

Обозначим $a_* = a_*(t, s, n) = \inf A$, $a^* = a^*(t, s, n) = \sup A$.

Пусть $\|\cdot\|_a$ – норма в $L_{2,a}$, I_1 – оператор с символом $|\zeta|^{-1}$ – потенциал Рисса порядка единица. Буквой c будем обозначать различные несущественные положительные константы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n > 3$, $t > s$. Тогда $a_* < 0 = a^*$ и при $a \in (a_*, 0)$ для $f \in L_{2,a}$ выполнено

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - ca(a_* - a)\|I_1 f\|_{a-2}^2, \quad (2)$$

константа $c > 0$ зависит только от t, s, n . Кроме того, $a_* \geq 3 - n$ и равенство $a_* = 3 - n$ достигается при $s = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n > 3$, $s > t$. Тогда $a^* > 0 = a_*$ и при $a \in (0, a^*)$ для $f \in L_{2,a}$ выполнено

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - ca(a^* - a)\|I_1 f\|_{a-2}^2, \quad (3)$$

константа $c > 0$ зависит только от t, s, n . Кроме того, $a^* \leq n - 3$ и равенство $a^* = n - 3$ достигается при $t = 0$.

Отметим, что при сопряжении $(T^{t,s})' = T^{s,t}$, $(L_{2,a})' = L_{2,-a}$, поэтому

$$a^*(s, t, n) = -a_*(t, s, n)$$

и для случая $s > t$ оценки границ интервала $a_* = 0 < a^* \leq n - 3$, а также $a^*(0, s, n) = n - 3$ следуют из соответствующих оценок теоремы 1. Однако, что касается оценки (3), она не следует из (2) по двойственности. А именно, при $t < s$ по двойственности и неравенству Юнга

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 = \int f T^{s,t}(r^a T^{t,s}f) dx \leq \frac{1}{2}(\|f\|_a^2 + \|T^{s,t}(r^a T^{t,s}f)\|_{-a}^2).$$

Применяя (2) при $-a \in (a_*(s, t, n), 0)$, получаем

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - ca(a^*(t, s, n) - a) \|I_1(r^a T^{t,s}f)\|_{-a-2}^2.$$

Нетрудно проверить, что эта оценка следует из (3), но обратное неверно.

Укажем на возможность явной, хотя и неточной оценки сверху для a_* при $t > s > 0$. Она может быть получена из неравенства (7) в доказательстве леммы 1 при использовании явных выражений для норм $T_{a-2}^{2,0}, T_{a-2}^{1,1}$ (см. [2]). Из (7), очевидно, следует, что если $a \in (3 - n, 0)$ удовлетворяет условию

$$a \sum_{i=1}^s (T_{a-2}^{1,1})^{2i} + (a + n - 3) \sum_{j=0}^{k-1} (T_{a-2}^{2,0})^{-2j} \geq 0,$$

то $a_* \leq a$, где $k = (t - s)/2$. Если при $n > 5$ ограничиться поисками оценки для a_* на интервале $a \in (5 - n, 0)$, то это выражение упрощается, так как $T_a^{2,0} = 1$ при $3 - n \leq a \leq 0$. Для $T^{1,1}$ при этом можно использовать простейшую оценку

$$(T_a^{1,1})^2 \leq \frac{(n-2)^2}{(n-2)^2 - a^2}.$$

Поэтому если для $a \in (5 - n, 0)$ выполнено

$$a \sum_{i=1}^s \left(\frac{(n-2)^2}{(n-a)(n+a-4)} \right)^i + (a + n - 3) \frac{t-s}{2} \geq 0,$$

то $a_* \leq a$. Отсюда, в частности, следует, что при фиксированных n, s всегда можно выбрать t столь большое, что $a_*(t, s, n) < 5 - n$.

Отметим еще, что при $t > s > 0$ показатель $a_*(t, s, n)$ не возрастает по t . Действительно, поскольку в любом случае $3 - n \leq a_* \leq 0$, для $a \in (3 - n, 0)$, учитывая $T_a^{2,0} = 1$, находим

$$\|T^{t,s}f\|_a = \|T^{2,0}(T^{t-2,s}f)\|_a \leq \|T^{t-2,s}f\|_a,$$

так что $a_*(t, s, n) \leq a_*(t - 2, s, n)$.

2. Оценки операторов $T^{2,0}, T^{1,1}$. Установим для операторов $T^{2,0}$ и $T^{1,1}$ следующие оценки:

$$\|T^{2,0}f\|_a^2 = \|f\|_a^2 + a(a+n-3)\|D\Delta^{-1}f\|_{a-2}^2 + a(2-a)\|\partial_r\Delta^{-1}f\|_{a-2}^2, \quad (4)$$

$$\|T^{1,1}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 + a^2\|\Delta^{-1}\operatorname{div} f\|_{a-2}^2, \quad (5)$$

где ∂_r – дифференцирование по $r = |x|$, $a \in (2-n, n)$, $f \in L_{2,a}$.

Достаточно получить их для гладких финитных функций f , поскольку такие функции плотны в $L_{2,a}$. Пусть $\phi \in C_0^\infty$ – срезающая функция: $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 1$ в $B_R = \{x : |x| < R\}$, $\phi = 0$ вне B_{2R} , $|D^j\phi| \leq c_j R^{-j}$. Положим $\omega = r^a\phi$.

Для $T^{2,0}$, обозначая $u = \Delta^{-1}f$, интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \|T^{2,0}f\|_a^2 - \|f\|_a^2 &= \int (|D^2u|^2 - |\Delta u|^2)\omega \, dx = \int (-D_i D_j u D_j u D_i \omega + \Delta u D_i u D_i \omega) \, dx \\ &= \int (-2D_i D_j u D_j u D_i \omega - D_i u D_j u D_i D_j \omega) \, dx \\ &= \int (|Du|^2 \Delta \omega - Du Du D^2 \omega) \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая явный вид ω и вычисляя вторую производную от r^a

$$D_i D_j r^a = a\delta_{ij}r^{a-2} + a(a-2)x_i x_j r^{a-4},$$

находим

$$\|T^{2,0}f\|_\omega^2 - \|f\|_\omega^2 = \int (a(a+n-3)|Du|^2 + a(a-2)|\partial_r u|^2)r^{a-2}\phi \, dx + \Phi,$$

где в Φ включены члены, содержащие производные ϕ , которые, очевидно, удовлетворяют оценке

$$|\Phi| \leq cR^{a-2} \int_{Q_R} |Du|^2 \, dx;$$

здесь $Q_R = \{x : R < |x| < 2R\}$ – кольцо, содержащее носитель $D\phi$. При больших R ввиду финитности f имеем $|Du(x)| \leq cR^{1-n}$ в Q_R , поэтому при $R \rightarrow \infty$ получаем

$$\|T^{2,0}f\|_a^2 - \|f\|_a^2 = a(a+n-3)\|Du\|_{a-2}^2 + a(a-2)\|\partial_r u\|_{a-2}^2,$$

что доказывает (4).

Для $T^{1,1}$ интегрированием по частям находим

$$\begin{aligned} \|T^{1,1}f\|_\omega^2 &= \int |D\Delta^{-1}\operatorname{div} f|^2 \omega \, dx = - \int \Delta^{-1}\operatorname{div} f (\omega \operatorname{div} f + D\omega D\Delta^{-1}\operatorname{div} f) \, dx \\ &= \int f (\omega D\Delta^{-1}\operatorname{div} f + D\omega \Delta^{-1}\operatorname{div} f) \, dx - \int \Delta^{-1}\operatorname{div} f D\omega D\Delta^{-1}\operatorname{div} f \, dx. \end{aligned}$$

В первом интеграле по неравенству Юнга имеем (многоточием обозначено выражение, являющееся аргументом f)

$$\begin{aligned} \left| \int f(\cdots) dx \right| &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{\omega}^2 + \frac{1}{2} \|(\cdots)\|_{1/\omega}^2 \\ &= \frac{1}{2} \|f\|_{\omega}^2 + \frac{1}{2} \left(\|T^{1,1} f\|_{\omega}^2 + 2 \int D\Delta^{-1} \operatorname{div} f D\omega \Delta^{-1} \operatorname{div} f dx \right. \\ &\quad \left. + \int |\Delta^{-1} \operatorname{div} f|^2 \frac{|D\omega|^2}{\omega} dx \right), \end{aligned}$$

что приводит к оценке

$$\|T^{1,1} f\|_{\omega}^2 \leq \|f\|_{\omega}^2 + \int |\Delta^{-1} \operatorname{div} f|^2 \frac{|D\omega|^2}{\omega} dx.$$

Пусть $\phi = \phi_1^2$, где ϕ_1 удовлетворяет тем же условиям, что и ϕ : $\phi_1 \in C_0^{\infty}(B_{2R})$, $0 \leq \phi_1 \leq 1$, $\phi_1 = 1$ в B_R , $|D\phi_1| \leq c/R$. Тогда

$$\frac{|D\omega|^2}{\omega} = \frac{|\phi D r^a + r^a D\phi|^2}{r^a \phi} = a^2 r^{a-2} \phi + 2a r^{a-1} \partial_r \phi + 4r^a |D\phi_1|^2 \leq a^2 r^{a-2} \phi + c R^{a-2} \chi_R,$$

где χ_R — характеристическая функция кольца Q_R , содержащего носитель $D\phi$. Это дает

$$\|T^{1,1} f\|_{\omega}^2 \leq \|f\|_{\omega}^2 + a^2 \|r^{-1} \Delta^{-1} \operatorname{div} f\|_{\omega}^2 + c R^{a-2} \|\Delta^{-1} \operatorname{div} f; L_2(Q_R)\|^2.$$

При больших R ввиду финитности f имеем $|\Delta^{-1} \operatorname{div} f(x)| \leq c R^{1-n}$ в Q_R , поэтому при $R \rightarrow \infty$ отсюда следует (5).

3. Оценка нормы для малых a . Здесь мы, учитывая, что оператор $T^{t,s}$ при $t > s$, $t + s$ четном, является тензорным произведением тензорных степеней операторов $T^{2,0}, T^{1,1}$, на основании оценок (4), (5) установим следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть $t > s$, $n > 3$. Существует $b < 0$ такое, что при $a \in (b, 0)$ для $f \in L_{2,a}$ выполнено

$$\|T^{t,s} f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 + ca \|D\Delta^{-1} f\|_{a-2}^2, \quad (6)$$

где $c > 0$ зависит только от s, t, n . При $s = 0$ можно взять $b = 3 - n$, $c = a + n - 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 0$. Обозначая $k = t/2$, имеем $T^{t,s} = T^{2k,0} = (T^{2,0})^k$ и по (4) находим

$$\begin{aligned} \|T^{t,s} f\|_a^2 &= \|(T^{2,0})^{k-1} f\|_a^2 + a(a+n-3) \|D\Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-1} f\|_{a-2}^2 \\ &\quad + a(2-a) \|\partial_r \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-1} f\|_{a-2}^2 + \dots \\ &= \|f\|_{a-2}^2 + \sum_{i=1}^k (a(a+n-3) \|D\Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-i} f\|_{a-2}^2 \\ &\quad + a(2-a) \|\partial_r \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-i} f\|_{a-2}^2). \end{aligned}$$

При $a \in (3 - n, 0)$, поскольку в сумме по i все коэффициенты отрицательны, отсюда следует оценка

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 + a(a+n-3)\|D\Delta^{-1}f\|_{a-2}^2,$$

что доказывает лемму для $s = 0$.

Рассмотрим случай $s > 0$. Обозначая $g = T^{t-s,0}f$, по (5) находим

$$\begin{aligned} \|T^{t,s}f\|_a^2 &= \|(T^{1,1})^s g\|_a^2 \leq \|(T^{1,1})^{s-1}g\|_a^2 + a^2\|\Delta^{-1}\operatorname{div}(T^{1,1})^{s-1}g\|_{a-2}^2 \leq \dots \\ &\leq \|g\|_a^2 + a^2 \sum_{i=1}^s \|\Delta^{-1}\operatorname{div}(T^{1,1})^{s-i}g\|_{a-2}^2. \end{aligned}$$

Для нормы g по (4) при $a < 0$, обозначая $k = (t-s)/2$, имеем

$$\begin{aligned} \|g\|_a^2 &= \|(T^{2,0})^k f\|_a^2 \leq \|(T^{2,0})^{k-1}f\|_a^2 + a(a+n-3)\|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-1}f\|_{a-2}^2 \leq \dots \\ &\leq \|f\|_a^2 + a(a+n-3) \sum_{j=1}^k \|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-j}f\|_{a-2}^2. \end{aligned}$$

Отметим, что $\Delta^{-1}\operatorname{div} T^{2,0} = T^{1,1}D\Delta^{-1}$. Теперь для нормы $T^{t,s}$ получаем

$$\begin{aligned} \|T^{t,s}f\|_a^2 &\leq \|f\|_a^2 + a(a+n-3) \sum_{j=1}^k \|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-j}f\|_{a-2}^2 \\ &\quad + a^2 \sum_{i=0}^{s-1} \|(T^{1,1})^{s-i}D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-1}f\|_{a-2}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Оператор $T^{1,1}$, являясь композицией проекторов Рисса, ограничен в $L_{2,b}$ при $b \in (-n, n)$, и его норма ограничена равномерно по b на любом внутреннем подынтервале интервала $(-n, n)$. Поэтому

$$\|(T^{1,1})^{s-i}D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-1}f\|_{a-2} \leq c\|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-1}f\|_{a-2};$$

здесь константа c может быть выбрана не зависящей от $a \in (3-n, 0)$. Это дает

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 + a(a+n-3) \sum_{j=1}^k \|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-j}f\|_{a-2}^2 + ca^2\|D\Delta^{-1}(T^{2,0})^{k-1}f\|_{a-2}^2.$$

При $a \rightarrow -0$ коэффициент в последнем слагаемом равен $O(a^2)$, а во втором слагаемом равен $-O(|a|)$, поэтому на достаточно малом интервале $a \in (b, 0)$ отсюда следует оценка (6).

4. Оценка нормы для a , удаленных от нуля. На интервале $a \in (a_*, b)$ оценка нормы оператора $T^{t,s}$ устанавливается с помощью интерполяции. Мы следуем доказательству теоремы Рисса–Торина с одинаковыми показателями и различными весами, как оно изложено в [3, теорема 5.4.1], но при этом учитываем младшие члены.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $a_0, a_1 \in (2 - n, n)$, линейный оператор $T: L_{2, a_i} \rightarrow L_{2, a_i}$, $i = 0, 1$, удовлетворяет оценкам

$$\|Tf\|_{a_0} \leq \|f\|_{a_0}, \quad (8)$$

$$\|Tf\|_{a_1}^2 \leq \|f\|_{a_1}^2 - c_1 \|D\Delta^{-1}f\|_{a_1-2}^2, \quad (9)$$

где $c_1 > 0$. Тогда при $a \in (a_0, a_1)$ для $f \in L_{2, a}$ выполнено

$$\|Tf\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - c|a - a_0| \cdot \|D\Delta^{-1}f\|_{a-2}^2,$$

где $c > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega_0(x), \omega_1(x)$ — два неотрицательных веса в $\mathbb{R}^n$, и положим

$$K(\rho, f) = \inf_{f_0+f_1=f} (\|f_0\|_{\omega_0}^2 + \rho^2 \|f_1\|_{\omega_1}^2),$$

где $\|\cdot\|_{\omega}$ обозначает норму в $L_2(\mathbb{R}^n; \omega)$. Обозначая

$$\varphi(\rho) = \inf_{y_0+y_1=1} (|y_0|^2 + \rho|y_1|^2),$$

имеем

$$K(\rho, f) = \int_{\mathbb{R}^n} \inf_{f_0+f_1=f} (|f_0|^2 \omega_0 + \rho^2 |f_1|^2 \omega_1) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \omega_0 \varphi\left(\rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) dx.$$

При $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^{-2\theta} K(\rho, f) \frac{d\rho}{\rho} &= \int_0^\infty \rho^{-2\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \omega_0 \varphi\left(\rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) dx \frac{d\rho}{\rho} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \omega_0 \int_0^\infty \rho^{-2\theta} \varphi\left(\rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \frac{d\rho}{\rho} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \omega_0^{1-\theta} \omega_1^\theta \left(\int_0^\infty \left(\rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{-\theta} \varphi\left(\rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \frac{d\rho}{\rho} \right) dx = c(\theta) \|f\|_\omega^2, \end{aligned}$$

где

$$c(\theta) = \int_0^\infty \rho^{-2\theta} \varphi(\rho^2) \frac{d\rho}{\rho} < \infty$$

с учетом $\varphi(\rho) < \min(1, \rho)$, и мы обозначили $\omega = \omega_0^{1-\theta} \omega_1^\theta$.

Для $a \in (a_0, a_1)$ обозначим $\theta = (a - a_0)/(a_1 - a_0) \in (0, 1)$, $\omega = r^a$, $\omega_0 = r^{a_0}$, $\omega_1 = r^{a_1}$. По доказанному выше при $f \in L_{2, \omega}$ для нормы f имеем представление

$$\|f\|_\omega^2 = \frac{1}{c(\theta)} \int_0^\infty \rho^{-2\theta} \inf_{f_0+f_1=f} (\|f_0\|_{\omega_0}^2 + \rho^2 \|f_1\|_{\omega_1}^2) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Обозначим через $f_{0, \rho} + f_{1, \rho} = f$ то разбиение f , для которого достигается равенство

$$|f_{0, \rho}|^2 \omega_0 + \rho^2 |f_{1, \rho}|^2 \omega_1 = \inf_{f_0+f_1=f} (|f_0|^2 \omega_0 + \rho^2 |f_1|^2 \omega_1). \quad (10)$$

Ввиду линейности T для $g = Tf$ имеем $g = Tf_{0,\rho} + Tf_{1,\rho}$ при каждом ρ . Заменяя оптимальное разбиение g разбиением $Tf_{0,\rho} + Tf_{1,\rho}$ и используя оценки (8), (9), получаем

$$\begin{aligned} c(\theta)\|g\|_{\omega}^2 &= \int_0^\infty \rho^{-2\theta} \inf_{g_0+g_1=g} (\|g_0\|_{\omega_0}^2 + \rho^2\|g_1\|_{\omega_1}^2) \frac{d\rho}{\rho} \\ &\leq \int_0^\infty \rho^{-2\theta} (\|Tf_{0,\rho}\|_{\omega_0}^2 + \rho^2\|Tf_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2) \frac{d\rho}{\rho} \\ &\leq \int_0^\infty \rho^{-2\theta} (\|f_{0,\rho}\|_{\omega_0}^2 + \rho^2\|f_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2 - \rho^2 c_1 \|r^{-1}D\Delta^{-1}f_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2) \frac{d\rho}{\rho} \\ &= c(\theta)\|f\|_{\omega}^2 - c \int_0^\infty \rho^{2-2\theta} \|r^{-1}D\Delta^{-1}f_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2 \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь достаточно показать, что

$$\|r^{-1}D\Delta^{-1}f\|_{\omega}^2 \leq c \int_0^\infty \|r^{-1}D\Delta^{-1}f_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

В (10) при исследовании на минимум с помощью дифференцирования легко устанавливается, что

$$f_{1,\rho} = \frac{f}{1 + \rho^2\omega_1/\omega_0}.$$

Обозначая $F_{1,\rho} = D\Delta^{-1}f_{1,\rho}$, имеем

$$\begin{aligned} D\Delta^{-1}f &= D\Delta^{-1} \left(\left(1 + \rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \operatorname{div} F_{1,\rho} \right) \\ &= D\Delta^{-1} \operatorname{div} \left(\left(1 + \rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) F_{1,\rho} \right) - D\Delta^{-1} \left(F_{1,\rho} \rho^2 D \frac{\omega_1}{\omega_0} \right). \end{aligned}$$

Обозначая $\sigma = \sigma_\rho = r^{-2}\omega_1/(1 + \rho^2\omega_1/\omega_0)^2$, получаем

$$\begin{aligned} \|D\Delta^{-1}f\|_{\sigma} &\leq \left\| D\Delta^{-1} \operatorname{div} \left(\left(1 + \rho^2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) F_{1,\rho} \right) \right\|_{\sigma} + \left\| D\Delta^{-1} \left(F_{1,\rho} \rho^2 D \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \right\|_{\sigma} \\ &\equiv \|D\Delta^{-1} \operatorname{div} g_1\|_{\sigma} + \|D\Delta^{-1} g_2\|_{\sigma}. \end{aligned} \quad (12)$$

Временно введем дополнительное предположение $a_1 + 2(a_0 - a_1) \in (2 - n, n)$. Во втором слагаемом, заменяя σ большим весом $r^{-2}\omega_0^2/(\rho^4\omega_1)$ и учитывая, что $2a_0 - a_1 - 2 > -n$, по неравенству Харди получаем

$$\|D\Delta^{-1}g_2\|_{\sigma} \leq \frac{c}{\rho^2} \|D^2\Delta^{-1}g_2\|_{\omega_0^2/\omega_1}.$$

Поскольку $2a_0 - a_1 \in (-n, n)$, оператор $D^2\Delta^{-1}$, являясь композицией проекторов Рисса, ограничен в L_2 с весом ω_0^2/ω_1 , что дает

$$\|D\Delta^{-1}g_2\|_{\sigma} \leq \frac{c}{\rho^2} \|g_2\|_{\omega_0^2/\omega_1} \leq c \|r^{-1}F_{1,\rho}\|_{\omega_1}.$$

В первом слагаемом в (12) для $1/\sigma_\rho$ имеем

$$\frac{1}{\sigma_\rho} = \frac{r^2}{\omega_1} + 2\rho^2 \frac{r^2}{\omega_0} + \rho^4 \frac{r^2 \omega_1}{\omega_0^2} \equiv \nu_1 + \nu_2 + \nu_3.$$

Поскольку $2 - a_1, 2 - a_0, a_1 + 2 - 2a_0 \in (-n, n)$, оператор $D\Delta^{-1} \operatorname{div}$, являясь композицией проекторов Рисса, ограничен в L_{2,ν_i} , $i = 1, 2, 3$, множители ρ^2, ρ^4 не влияют на величину норм. Значит, он ограничен в $L_{2,1/\sigma}$ и его норма

$$\|D\Delta^{-1} \operatorname{div}\|_{1/\sigma} \leq \max_{i=1,2,3} \|D\Delta^{-1} \operatorname{div}\|_{\nu_i}$$

оценивается величиной, не зависящей от $\rho \in (0, \infty)$. Так как при сопряжении

$$(D\Delta^{-1} \operatorname{div})' = D\Delta^{-1} \operatorname{div}, \quad (L_{2,1/\sigma})' = L_{2,\sigma},$$

для его нормы в $L_{2,\sigma}$ справедлива та же оценка. Поэтому

$$\|D\Delta^{-1} \operatorname{div} g_1\|_\sigma \leq c \|g_1\|_\sigma = c \|r^{-1} F_{1,\rho}\|_{\omega_1}.$$

Из (12) получаем

$$\|D\Delta^{-1} f\|_\sigma \leq c \|r^{-1} D\Delta^{-1} f_{1,\rho}\|_{\omega_1}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & c \int_0^\infty \rho^{2-2\theta} \|r^{-1} D\Delta^{-1} f_{1,\rho}\|_{\omega_1}^2 \frac{d\rho}{\rho} \\ & \geq \int_0^\infty \rho^{2-2\theta} \|D\Delta^{-1} f\|_\sigma^2 \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\infty \rho^{2-2\theta} \int_{\mathbb{R}^n} |D\Delta^{-1} f|^2 \frac{r^{-2} \omega_1}{(1 + \rho^2 \omega_1 / \omega_0)^2} dx \frac{d\rho}{\rho} \\ & = \int_{\mathbb{R}^n} |D\Delta^{-1} f|^2 r^{-2} \omega_0^{1-\theta} \omega_1^\theta \left(\int_0^\infty \frac{(\rho^2 \omega_1 / \omega_0)^{1-\theta}}{(1 + \rho^2 \omega_1 / \omega_0)^2} \frac{d\rho}{\rho} \right) dx = c_1(\theta) \|r^{-1} D\Delta^{-1} f\|_\omega^2, \end{aligned}$$

где

$$c_1(\theta) = \int_0^\infty \frac{\rho^{2-2\theta}}{(1 + \rho^2)^2} \frac{d\rho}{\rho} > \frac{1}{4} \int_0^1 \rho^{2-2\theta} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{8(1-\theta)}.$$

Поскольку для $c(\theta)$ из $\varphi(\rho) < \min(1, \rho)$ следует $c(\theta) < 1/(2\theta(1-\theta))$, из (11) получаем

$$\|Tf\|_\omega^2 \leq \|f\|_\omega^2 - \theta c \|r^{-1} D\Delta^{-1} f\|_\omega^2.$$

Если $a_1 + 2(a_0 - a_1) \in (2 - n, n)$, это завершает доказательство теоремы. Если же нет, то (пусть для определенности $a_0 < a_1$) выберем $b > 0$ такое, что $a_0 - 2b > 2 - n$. По интерполяционной теореме Стейна–Вейса норма T в $L_{2,a}$ не превосходит единицы при всех $a \in (a_0, a_1)$. Предположения теоремы вместе с добавочным предположением $a_1 + 2(a_0 - a_1) \in (2 - n, n)$ выполнены при замене a_0 на $a'_0 = a_1 - 2b$, поэтому утверждение теоремы справедливо для $a \in (a'_0, a_1)$; в частности,

$$\|Tf\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - c \|D\Delta^{-1} f\|_{a-2}^2 \quad (13)$$

при $a = a_1 - b$ с некоторой константой $c > 0$. Теперь (если $a_0 < a_1 - 3b$) предположения теоремы вместе с добавочным предположением выполнены на концах интервала $(a_1 - 3b, a_1 - b)$ и, следовательно, (13) выполнено при $a = a_1 - 2b$. После конечного числа итераций получаем утверждение теоремы для всего интервала (a_0, a_1) .

5. Оценка границ интервала. Здесь мы на основании равенства (4) установим следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть $t > s$, $n \geq 3$. Тогда $a^* = 0$, $a_* \geq 3 - n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем $a^* = 0$. Возьмем $f = D^s \Delta^k u$, $k = (t - s)/2$, где $u \in C_0^\infty$. На функциях $g = D^s v$ оператор $T^{s,s}$ действует как единичный:

$$T^{s,s} g = D^s \Delta^{-s} \operatorname{div}^s(D^s v) = D^s \Delta^{-s} \Delta^s v = D^s v = g.$$

Поэтому

$$T^{t,s} f = T^{t-s,0}(T^{s,s} f) = T^{t-s,0} f = (T^{2,0})^k f$$

и по равенству (4) при $a \in (0, 2)$, отбрасывая последнее неотрицательное слагаемое, получаем

$$\begin{aligned} \|T^{t,s} f\|_a^2 &= \|(T^{2,0})^k f\|_a^2 \geq \|(T^{2,0})^{k-1} f\|_a^2 + a(a+n-3) \|D \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-1} f\|_{a-2}^2 \geq \dots \\ &\geq \|f\|_a^2 + a(a+n-3) \sum_{i=1}^k \|D \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-i} f\|_{a-2}^2 \\ &= \|f\|_a^2 + a(a+n-3) \sum_{i=0}^{k-1} \|D^{t-1-2i} \Delta^i u\|_{a-2}^2. \end{aligned}$$

Ограничимся слагаемым с $i = 0$, которое присутствует для любого $k \geq 1$, т.е. при любом $t > s$ (с учетом условия четности $t+s$). Для финитной функции u , не являющейся тождественным нулем, норма $D^{t-1} u$ больше нуля. Поэтому $T_a^{t,s} > 1$ при $a > 0$ и, следовательно, $a^* \leq 0$. Но по равенству Парсевалю в L_2 без веса $T_0^{t,s} = 1$, так что $a^* = 0$.

Докажем $a_* \geq 3 - n$. Пусть ψ_1, ψ_2 — гладкие функции на $\mathbb{R}$ с носителями на интервалах $(-1, 1)$ и $(1, 2)$ соответственно. Положим $g(x) = \psi_1(x_1)$, $\phi(x) = \psi_2(|x'|/R)$, где $x' = (x_2, \dots, x_n)$, $R > 1$ — параметр. Положим $u = g\phi$, $f = D^s \Delta^k u$, $k = (t - s)/2$. Тогда, как и при доказательстве $a^* = 0$,

$$T^{t,s} f = (T^{2,0})^k f$$

и по равенству (4)

$$\begin{aligned} \|T^{t,s} f\|_a^2 &= \|(T^{2,0})^k f\|_a^2 \\ &= \|f\|_a^2 + \sum_{i=1}^k (a(a+n-3) \|D \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-i} f\|_{a-2}^2 \\ &\quad + a(2-a) \|\partial_r \Delta^{-1} (T^{2,0})^{k-i} f\|_{a-2}^2) \\ &= \|f\|_a^2 + \sum_{i=0}^{k-1} (a(a+n-3) \|D^{t-1-2i} \Delta^i u\|_{a-2}^2 \\ &\quad + a(2-a) \|\partial_r D^{t-2-2i} \Delta^i u\|_{a-2}^2). \end{aligned} \tag{14}$$

При $a < 3 - n$ для коэффициентов имеем $a(a + n - 3) > 0$, $a(2 - a) < 0$. Рассмотрим, как будут вести себя нормы в сумме по i с ростом R . Для норм при положительном коэффициенте $a(a + n - 3)$ ограничимся слагаемым с $i = 0$, которое всегда присутствует при $t > s$. При $i = 0$ имеем

$$\|D^{t-1}u\|_{a-2}^2 \geq \|D_1^{t-1}u\|_{a-2}^2 = \|\phi D_1^{t-1}g\|_{a-2}^2.$$

Обозначим через $G_R = \{x : |x_1| < 1, R < |x'| < 2R\}$ множество, содержащее носитель u . Тогда

$$\|\phi D_1^{t-1}g\|_{a-2}^2 \geq \inf_{G_R} r^{a-2} \int_{\mathbb{R}} |D_1^{t-1}g|^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\phi|^2 dx' \geq c_0 R^{a+n-3}$$

с некоторой константой $c_0 > 0$.

Нормы при коэффициенте $a(2 - a)$ оценим сверху. Имеем

$$|\partial_r D^{t-2-2i} \Delta^i u| \leq c |\phi \partial_r D_1^{t-2}g| + c \sum_{j=1}^{t-1} |D^j \phi| \cdot |D_1^{t-1-j}g|.$$

В первом слагаемом

$$\partial_r D_1^{t-2}g = \frac{x_1}{r} D_1^{t-1}g$$

и, поскольку $|x_1| < 1$ на носителе u , находим

$$\|\phi \partial_r D_1^{t-2}g\|_{a-2}^2 \leq \|\phi D_1^{t-1}g\|_{a-4}^2 \leq c |G_R| \sup_{G_R} r^{a-4} \leq c R^{a+n-5}.$$

Для слагаемых, содержащих производные ϕ , учитывая $|D^j \phi| \leq c_j R^{-j}$, получаем

$$\sum_{j=1}^{t-1} \|D^j \phi D_1^{t-1-j}g\|_{a-2}^2 \leq c R^{-2} |G_R| \sup_{G_R} r^{a-2} \leq c R^{a+n-5}.$$

В (14) это дает при $a < 3 - n$

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \geq \|f\|_a^2 + a(a + n - 3)c_0 R^{a+n-3} + a(2 - a)c R^{a+n-5}.$$

Выбирая R столь большое, что

$$(3 - n - a)c_0 > (2 - a)c R^{-2},$$

получаем

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 > \|f\|_a^2,$$

откуда следует $T_a^{t,s} > 1$. Поскольку неравенство установлено при произвольном $a < 3 - n$, это дает $a_* \geq 3 - n$.

6. Доказательство теоремы 1. По лемме 2 $a_* \geq 3 - n$, $a^* = 0$, а по лемме 1 $a_* < 0$, $a_*(t, 0, n) \leq 3 - n$.

Из леммы 1 и теоремы 3 с учетом того, что $a_* \geq 3 - n$, следует оценка

$$\|T^{t,s} f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - ca(a_* - a)\|D\Delta^{-1}f\|_{a-2}^2$$

на интервале $a \in (a_*, 0)$. Поскольку $I_1 f = I_1 \operatorname{div}(D\Delta^{-1}f)$ и оператор $I_1 \operatorname{div}$ ограничен в $L_{2,b}$ равномерно по b на каждом внутреннем подынтервале интервала $(-n, n)$, имеем

$$\|I_1 f\|_{a-2} \leq c\|D\Delta^{-1}f\|_{a-2}$$

с константой c , не зависящей от $a \in (a_*, 0)$, что влечет оценку (2).

7. Оценка оператора $T^{0,2}$. Установим для оператора $T^{0,2}$ при $n > 3$ оценку

$$\|T^{0,2}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - ca\|I_1 f\|_{a-2}^2 \quad (15)$$

для $f \in L_{2,a}$ на малом интервале $a \in (0, b)$, $b > 0$, где b, c зависят только от n .

Используем декомпозицию Ходжа второго порядка для функций размерности n^2 , на которых действует $T^{0,2}$:

$$f = D^2u + Dv_1 + Dv_2 + w$$

в том смысле, что для $f = (f_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$,

$$f_{ij} = D_i D_j u + D_j v_{1i} + D_i v_{2j} + w_{ij},$$

где $\operatorname{div} v_1 = 0$, $\operatorname{div} v_2 = 0$ и $\operatorname{div} w = 0$ в обоих вариантах: $D_i w_{ij} = 0$, $D_j w_{ij} = 0$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до n . Существование такой декомпозиции легко усмотреть: для $f = (f_{ij}) \in L_{2,a}$, $a \in (-n, n)$, достаточно положить $u = \Delta^{-2} \operatorname{div}^2 f$, $v_{1i} = \Delta^{-1} D_j f_{ij} - D_i u$, $v_{2j} = \Delta^{-1} D_i f_{ij} - D_j u$. Тогда, очевидно, $D^2u, Dv_1, Dv_2, w \in L_{2,a}$.

Имеем

$$T^{0,2}f = \Delta^{-1} \operatorname{div}^2(D^2u + Dv_1 + Dv_2 + w) = \Delta u$$

и по (4)

$$\|T^{0,2}f\|_a^2 = \|\Delta u\|_a^2 = \|D^2u\|_a^2 - a(a + n - 3)\|Du\|_{a-2}^2 - a(2 - a)\|\partial_r u\|_{a-2}^2.$$

Для нормы f имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_a^2 &= \|D^2u\|_a^2 + \|Dv_1\|_a^2 + \|Dv_2\|_a^2 + \|w\|_a^2 \\ &+ 2 \int (D^2u Dv_1 + D^2u Dv_2 + D^2u w + Dv_1 Dv_2 + Dv_1 w + Dv_2 w) r^a dx, \end{aligned}$$

так что при $a > 0$

$$\|f\|_a^2 - \|T^{0,2}f\|_a^2 \geq a(n - 3)\|Du\|_{a-2}^2 + \|Dv_1\|_a^2 + \|Dv_2\|_a^2 + \|w\|_a^2 + 2 \int \dots \quad (16)$$

При интегрировании по частям с учетом равенства нулю дивергенций v_1, v_2, w находим

$$2 \int \dots = -2 \int \left(DuDv_1 + DuDv_2 + Duw + \frac{1}{2}(v_1Dv_2 + Dv_1v_2) + v_1w + v_2w \right) Dr^a dx.$$

Учитывая, что $|Dr^a| = ar^{a-1}$, по неравенству Юнга получаем

$$\begin{aligned} \left| 2 \int \dots \right| &\leq 3a^{3/2} \|Du\|_{a-2}^2 + \frac{3}{2}a^{1/2} (\|Dv_1\|_a^2 + \|Dv_2\|_a^2) \\ &\quad + \frac{3}{2}a^{3/2} (\|v_1\|_{a-2}^2 + \|v_2\|_{a-2}^2) + 3a^{1/2} \|w\|_a^2. \end{aligned}$$

По неравенству Харди

$$\|Dv\|_a \geq \frac{a+n-2}{2} \|v\|_{a-2},$$

так что при $a \in (0, 1)$

$$\left| 2 \int \dots \right| \leq 3a^{3/2} \|Du\|_{a-2}^2 + 3a^{1/2} (\|Dv_1\|_a^2 + \|Dv_2\|_a^2 + \|w\|_a^2).$$

Из (16) получаем

$$\|f\|_a^2 - \|T^{0,2}f\|_a^2 \geq (1 - 3a^{1/2})(a\|Du\|_{a-2}^2 + \|Dv_1\|_a^2 + \|Dv_2\|_a^2 + \|w\|_a^2). \quad (17)$$

Для I_1f имеем

$$\|I_1f\|_{a-2} \leq \|I_1D^2u\|_{a-2} + \|I_1Dv_1\|_{a-2} + \|I_1Dv_2\|_{a-2} + \|I_1w\|_{a-2}.$$

В трех последних слагаемых применим неравенство Харди

$$\frac{a+n-2}{2} \|I_1z\|_{a-2} \leq \|DI_1z\|_a,$$

и в силу ограниченности оператора DI_1 в $L_{2,b}$, $b \in (-n, n)$, получаем

$$\|I_1f\|_{a-2}^2 \leq c(\|Du\|_{a-2} + \|Dv_1\|_a + \|Dv_2\|_a + \|w\|_a).$$

Теперь из (17) для достаточно малого $b > 0$ при $a \in (0, b)$ следует (15).

8. Доказательство теоремы 2. Утверждения теоремы 2 о величине a_* , a^* следуют из теоремы 1 по двойственности.

На малом интервале $a \in (0, b)$ оценка (3) устанавливается на основании оценок (15), (5) аналогично доказательству леммы 1. Обозначая $g = T^{0,s-t}f$, по (5) находим

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 = \|(T^{1,1})^t g\|_a^2 \leq \|g\|_a^2 + a^2 \sum_{i=1}^t \|\Delta^{-1} \operatorname{div}(T^{1,1})^{t-i} g\|_{a-2}^2$$

и далее, поскольку проекторы Рисса ограничены в $L_{2,a-2}$ равномерно по $a \in (0, a^*)$,

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|g\|_a^2 + ca^2\|I_1g\|_{a-2}^2.$$

Для нормы g в силу (15) при $a \in (0, b)$, обозначая $k = (s - t)/2$, имеем

$$\|g\|_a^2 = \|(T^{0,2})^k f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - c_1 a \sum_{j=1}^k \|I_1(T^{0,2})^{k-j} f\|_{a-2}^2.$$

Теперь для нормы $T^{t,s}$ получаем

$$\|T^{t,s}f\|_a^2 \leq \|f\|_a^2 - c_1 a \sum_{j=1}^k \|I_1(T^{0,2})^{k-j} f\|_{a-2}^2 + ca^2\|I_1(T^{0,2})^k f\|_{a-2}^2,$$

откуда следует (3) для $a \in (0, b)$ при достаточно малом $b > 0$ (вообще говоря, гораздо меньшем, чем в (15)).

На интервале $a \in (b, a^*)$ оценка (3) следует из теоремы 3, поскольку для $a_0 = a^*$ имеем $T_{a_0}^{t,s} = 1$, а для $a_1 = b$ установлено (9) (отметим, что операторы I_1 и $D\Delta^{-1}$, очевидно, оценивают друг друга в $L_{2,a-2}$ при $a \in (2 - n, n + 2)$) и оба числа a_0, a_1 лежат в интервале $(2 - n, n)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Iwaniec T., Gaven M. Riesz transforms and related singular integrals // J. Reine Angew. Math. 1996. V. 473. P. 25–59.
- [2] Калита Е. А. Разрешимость нелинейных эллиптических систем в пространствах слабее естественного энергетического // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 2. С. 53–80.
- [3] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: kalita@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило
29.03.2001