Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Паньженский, Максимально подвижные римановы пространства с кручением, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 754–757

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4730>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 15:48:39

Максимально подвижные римановы пространства с кручением

В. И. Паньженский

Доказано, что среди всех римановых пространств постоянной кривизны только трехмерные пространства имеют кручение, инвариантное относительно группы движений. Тензор кручения в этих пространствах ковариантно постоянен и определяет форму кручения. Отношение интеграла от этой формы по ограниченной области к ее объему есть величина постоянная, определяющая кручение пространства. Вводятся понятия объемного кручения и скалярного кручения.

Библиография: 3 названия.

Доказано, что среди всех римановых пространств постоянной кривизны только трехмерные пространства имеют кручение, инвариантное относительно группы движений. Тензор кручения в этих пространствах ковариантно постоянен и определяет форму кручения. Отношение интеграла от этой формы по ограниченной области к ее объему есть величина постоянная, определяющая кручение пространства. Вводятся понятия объемного кручения и скалярного кручения.

1. Пусть M – гладкое n -мерное многообразие, g – риманова метрика на M , ∇ – связность Леви-Чивита, $\tilde{\nabla}$ – метрическая связность с кручением: $\tilde{\nabla}g = 0$, S – тензор кручения связности $\tilde{\nabla}$, T – тензор деформации связности ∇ . Если (x^i) – локальные координаты на M , $\partial_i = \partial/\partial x^i$ – естественный локальный базис векторных полей и $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k\partial_k$, $\tilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \tilde{\Gamma}_{ij}^k\partial_k$, $S_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ji}^k$, $T_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$, то, очевидно, имеем

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{(ij)}^k + \frac{1}{2}S_{ij}^k, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k, \quad S_{ij}^k + S_{ji}^k = 0, \quad T_{ijk} + T_{ikj} = 0,$$

где $T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}$, а g_{kp} – компоненты метрического тензора. Кроме того, нетрудно убедиться [1; гл. VII, § 1], что

$$T_{ijk} = \frac{1}{2}(S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji}), \quad S_{ijk} = T_{ijk} + T_{jki},$$

где $S_{ijk} = S_{ij}^p g_{kp}$, а симметрическая часть связности $\tilde{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита тогда и только тогда, когда компоненты S_{ijk} тензора кручения и, следовательно, компоненты T_{ijk} тензора деформации, кососимметричны по всем индексам. В этом случае $T_{ijk} = (1/2)S_{ijk}$. Такое кручение назовем *каноническим*, а 3-форму $\Omega = S_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, $i < j < k$, – *фундаментальной формой кручения*.

2. Векторное поле $X = \xi^i \partial_i$ является инфинитезимальным движением риманова пространства $V^n = (M, g)$ тогда и только тогда, когда производная Ли вдоль X от метрического тензора равна нулю: $\mathcal{L}_X g = 0$. Как следствие нетрудно получить [2; гл. V, § 53], что и $\mathcal{L}_X \nabla = 0$. Потребуем, чтобы любое движение сохраняло и связность $\tilde{\nabla}$: $\mathcal{L}_X \tilde{\nabla} = 0$, что равносильно $\mathcal{L}_X T = 0$ или $\mathcal{L}_X S = 0$.

Уравнения движений (уравнения Киллинга) имеют вид [2; гл. V, § 51]

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \quad (1)$$

где $\xi_{ij} = \xi_i^p g_{jp}$, $\xi_i^j = \nabla_i \xi^j$. Равенство нулю производной Ли от тензора деформации запишем в ковариантных производных

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0 \quad (2)$$

или

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq} \{ \delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} \} = 0, \quad (3)$$

где δ_i^j – символ Кронекера, g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора g : $g_{ip} g^{pj} = \delta_i^j$.

Пусть V^n является максимально подвижным, т.е. допускает группу движений G^r размерности $r = n(n+1)/2$. Тогда (3) должны выполняться при любых ξ^p и ξ_{rq} , удовлетворяющих (1). Поэтому из (3) следует

$$\nabla_p T_{ijk} = 0, \quad (4)$$

$$\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0. \quad (5)$$

Умножая (5) на $g_{lr} g_{mq}$ и учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, получаем равносильные (5) соотношения

$$g_{il} T_{mjk} - g_{jl} T_{ikm} + g_{kl} T_{ijm} - g_{im} T_{ljk} + g_{jm} T_{ikl} - g_{km} T_{ijl} = 0. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (6) являются условием интегрируемости системы дифференциальных уравнений (4).

3. Рассмотрим подробнее условия интегрируемости (6). Перепишем (6), умножив на $g^{ql} g^{rm}$:

$$\delta_i^q T^r_{jk} - \delta_j^q T^r_{ik} + \delta_k^q T^r_{ij} - \delta_i^r T^q_{jk} + \delta_j^r T^q_{ik} - \delta_k^r T^q_{ij} = 0, \quad (7)$$

где $T^r_{jk} = T_{sjk} g^{sr}$, $T^r_{ik} = T_{iks} g^{sr}$. В (7) свернем индексы q и i ; в результате получим

$$n T^r_{jk} - T_{jk}^r + T_{kj}^r - T^r_{jk} + \delta_j^r T_{*k}^* - \delta_k^r T_{*j}^* = 0 \quad (8)$$

или

$$(n-1) T^r_{jk} - T_{jk}^r + T_{kj}^r + \delta_j^r T_{*k}^* - \delta_k^r T_{*j}^* = 0, \quad (9)$$

где $T_{*k}^* = T_{sk}^s$. Умножив (9) на g_{ir} , будем иметь

$$(n-1) T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + g_{ji} T_{*k}^* - g_{ki} T_{*j}^* = 0. \quad (10)$$

Циклируя (10), получим еще два равенства

$$(n-1) T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + g_{kj} T_{*i}^* - g_{ij} T_{*k}^* = 0, \quad (11)$$

$$(n-1) T_{kij} - T_{ij k} + T_{jik} + g_{ik} T_{*j}^* - g_{jk} T_{*i}^* = 0. \quad (12)$$

Складывая (10), (11) и (12), получим

$$(n-1)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) - T_{jki} - T_{kij} - T_{ijk} + T_{kji} + T_{ikj} + T_{jik} = 0 \quad (13)$$

или, учитывая косую симметрию тензора деформации,

$$(n-3)(T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}) = 0, \quad (14)$$

откуда для $n \neq 3$

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0. \quad (15)$$

Учитывая (15), равенства (10) примут вид

$$nT_{ijk} + g_{ji}T_{*k}^* - g_{ki}T_{*j}^* = 0. \quad (16)$$

Умножая (16) на g^{kl} , получим

$$nT_{ij}^l + g_{ji}g^{kl}T_{*k}^* - \delta_i^l T_{*j}^* = 0. \quad (17)$$

В (17) свернем индексы l и i . В результате будем иметь $nT_{*j}^* + T_{*j}^* - nT_{*j}^* = 0$, откуда $T_{*j}^* = 0$. Теперь (10) примет вид $(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} = 0$ или, учитывая опять (15), $nT_{ijk} = 0$, т.е. $T_{ijk} = 0$ и, следовательно, $S_{ijk} = 0$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Если риманово пространство V^n , $n \neq 3$, допускает группу движений максимальной размерности, то оно не имеет инвариантного относительно этой группы кручения.*

4. Рассмотрим случай $n = 3$. Существует система координат, в которой метрика риманова пространства V^3 постоянной кривизны k имеет вид [2; гл. V, § 53]

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{[1 + (k/4)((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)]^2}. \quad (18)$$

Можно убедиться, что условия интегрируемости (6) для метрики (18) выполняются тождественно тогда и только тогда, когда тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, т.е. когда кручение является каноническим.

Далее, интегрируя уравнения движений $\mathcal{L}_X g = 0$ для метрики (18), находим базисные векторные поля (операторы) алгебры Ли инфинитезимальных движений. Затем для каждого оператора выписываем уравнения инвариантности тензора деформации $\mathcal{L}_X T = 0$.

Интегрируя полученную систему, находим ее общее решение

$$T_{ijk} = c_{ijk} \left[1 + \frac{k}{4}((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right]^{-3},$$

где c_{ijk} – постоянные, из которых в силу косой симметрии существенной является лишь одна. Нетрудно убедиться, что тензор деформации, как и тензор кручения, ковариантно постоянен.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Трехмерное риманово пространство постоянной кривизны обладает ковариантно постоянным каноническим кручением, инвариантным относительно группы движений.*

5. Обозначив $s = 2c_{123}$, выпишем фундаментальную форму кручения:

$$\Omega = s \left[1 + \frac{k}{4} ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right]^{-3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Пусть D – ограниченная область в пространстве V^3 . Тогда инвариантным образом определен интеграл [3; гл. III, § 3] $v = \int_D \Omega$. С другой стороны, в римановом пространстве определен объем области D интегралом $v_0 = \int_D \Omega_0$, где $\Omega_0 = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $g = \det \|g_{ij}\|$. Для метрики (18)

$$\sqrt{g} = \left[1 + \frac{k}{4} ((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2) \right]^{-3}.$$

Поэтому отношение v/v_0 объемов, как и отношение $S_{123}/\sqrt{g}$ плотностей, есть постоянная величина s , определяющая кручение пространства.

Пусть теперь $V^3 = (M, g)$ – произвольное трехмерное риманово пространство, и пусть кроме метрического тензора $g(g_{ij})$ – симметрического тензорного поля на M , задано кососимметрическое тензорное поле $S(S_{ijk})$. Тогда, кроме связности Леви-Чивита $\nabla(\Gamma_{ij}^k)$, мы имеем метрическую связность $\tilde{\nabla}(\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + (1/2)S_{ij}^k)$ с каноническим кручением S . Пусть, как и ранее, D – некоторая ограниченная область в пространстве V^3 . Тогда мы можем вычислить интегралы от плотностей S_{123} и $\sqrt{g}$:

$$v = \int_D S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad v_0 = \int_D \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и инвариантным образом определить *объемное кручение*, как отношение v/v_0 , и *скалярное кручение*, как отношение $S_{123}/\sqrt{g}$ плотностей. Объемное кручение является функционалом, заданным на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки.

Таким образом, *если V^3 является римановым пространством постоянной кривизны и кручение инвариантно относительно его группы движений, то его объемное кручение совпадает со скалярным кручением и является постоянной величиной.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] К. Яно, С. Бохнер, *Кривизна и числа Бетти*, ИЛ, М., 1957.
- [2] Л. П. Эйзенхарт, *Непрерывные группы преобразований*, ИЛ, М., 1947.
- [3] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.

В. И. Паньженский

Пензенский государственный педагогический университет

E-mail: geometry@spu-penza.ru

Поступило

17.04.2008