Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Сухова, Кривизны касательного расслоения со специальной метрикой структуры почти произведения, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 4, 603–607

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4731>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:25:39

Кривизны касательного расслоения со специальной метрикой структуры почти произведения

О. В. Сухова

На касательном расслоении гладкого многообразия изучается класс римановых метрик структуры почти произведения, содержащий как частный случай метрику Сасаки и метрику Чигера–Громола. Для введенного класса метрик получена зависимость скалярной кривизны касательного расслоения от объектов базисного многообразия. В случае, когда базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны, найдены условия на метрику и размерность базы, при которых скалярная кривизна касательного расслоения является постоянной величиной. Для частных случаев метрик рассматриваемого класса найдены промежутки знакопостоянства скалярной кривизны касательного расслоения.

Библиография: 4 названия.

На касательном расслоении гладкого многообразия изучается класс римановых метрик структуры почти произведения, содержащий как частный случай метрику Сасаки [1] и метрику Чигера–Громола [2], [3]. Для введенного класса метрик получена зависимость скалярной кривизны касательного расслоения от объектов базисного многообразия. В случае, когда базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны, найдены условия на метрику и размерность базы, при которых скалярная кривизна касательного расслоения является постоянной величиной. Для частных случаев метрик рассматриваемого класса найдены промежутки знакопостоянства скалярной кривизны касательного расслоения.

1. Пусть M – гладкое n -мерное многообразие, g – риманова метрика на M , ∇ – связность Леви–Чивита, TM – касательное расслоение над M . Связность ∇ определяет горизонтальное распределение $H: z \in TM \rightarrow H_z \subset T_z(TM)$ и, следовательно, структуру почти произведения на TM : $T_z(TM) = H_z \oplus V_z$, где $V: z \in TM \rightarrow V_z \subset T_z(TM)$ – вертикальное распределение, касающееся слоев. Определим на TM риманову метрику $\tilde{g}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(X^h, Y^h) &= g(X, Y), & \tilde{g}(X^h, Y^v) &= \tilde{g}(X^v, Y^h) = 0, \\ \tilde{g}(X^v, Y^v) &= \varphi(z)g(X, Y) + \psi(z)g(X, y)g(Y, y),\end{aligned}$$

где φ и ψ – некоторые функции аргумента $z = (1/2)\|y\|^2 = (1/2)g(y, y)$ такие, что $\varphi > 0$ и $\varphi + 2z\psi > 0$; X^h, Y^h и X^v, Y^v – соответственно горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей X, Y с базы на касательное расслоение в связности ∇ .

Очевидно, что метрика $\tilde{g}$ является римановой метрикой структуры почти произведения.

Далее для отличия объектов, заданных на базе, от объектов, заданных на касательном расслоении, будем использовать для последних символ “ $\sim$ ”. Также будем обозначать символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ метрику g или метрику $\tilde{g}$, в зависимости от того, векторные поля базы или касательного расслоения указаны в качестве аргументов.

2. Секционная кривизна касательного расслоения TM с метрикой $\tilde{g}$ в 2-мерном направлении, определяемом в каждой точке значениями векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, вычисляется по известной формуле [4; § 3, п. 3.6]:

$$\tilde{K}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{\langle \tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Y}, \tilde{X} \rangle}{\tilde{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y})}, \quad (1)$$

где $\tilde{R}$ – тензор кривизны пространства $(TM, \tilde{g})$, $\tilde{Q} = \langle \tilde{X}, \tilde{X} \rangle \langle \tilde{Y}, \tilde{Y} \rangle - \langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle^2$ – определитель Грамма.

Вычисляя связность Леви–Чивита и тензор кривизны метрики $\tilde{g}$, из (1) находим

$$\tilde{K}(X^h, Y^h) = K(X, Y)^v - \frac{3\varphi}{4} \cdot \frac{\|R(X, Y)y\|^2}{Q(X, Y)^v}, \quad (2)$$

$$\tilde{K}(X^h, Y^v) = \frac{\varphi^2}{4} \cdot \frac{\|R(y, Y)X\|^2}{\|X\|^2(\varphi\|Y\|^2 + \psi\langle Y, y \rangle^2)}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}(X^v, Y^v) &= \frac{3\varphi'^2 - 2\varphi\varphi''}{4\varphi^2\psi} - \frac{(2\varphi'\psi - \varphi\psi')(\varphi + z\varphi')}{2\varphi^2\psi(\varphi + 2z\psi)} \\ &\quad + \left(\frac{2\varphi\varphi'' - 3\varphi'^2}{4\psi} + \frac{\varphi(2\psi^2 - \varphi\psi' - z\varphi'\psi') + z\varphi'^2\psi}{2\psi(\varphi + 2z\psi)} \right) \\ &\quad \times \frac{Q(X, Y)^v}{\varphi^2 Q(X, Y)^v + \varphi\psi(\|X\|^2\langle Y, y \rangle^2 - 2\langle X, Y \rangle\langle X, y \rangle\langle Y, y \rangle + \|Y\|^2\langle X, y \rangle^2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Построим в точке $z = (x, y) \in TM$ ортонормированный относительно метрики $\tilde{g}$ репер $\{\tilde{e}_I\} = \{\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i^*}\}$, состоящий из лифтированных векторов репера $\{e_1 = y/\|y\|, e_2, \dots, e_n\}$, заданного в точке $x \in M$ и ортонормированного относительно метрики g . Положим

$$\tilde{e}_i = e_i^h, \quad \tilde{e}_{1^*} = \frac{e_1^v}{\sqrt{\varphi + 2z\psi}}, \quad \tilde{e}_{p^*} = \frac{e_p^v}{\sqrt{\varphi}}, \quad p = 2, \dots, n.$$

Используя полученные равенства (2)–(4), вычислим секционные кривизны $\tilde{K}_{IJ}$ вдоль 2-мерных направлений, определяемых парами векторов репера $\{\tilde{e}_I\}$. Имеем

$$\tilde{K}_{ij} = K_{ij} - \frac{3\varphi}{4} \|R(e_i, e_j)y\|^2, \quad i \neq j, \quad (5)$$

$$\tilde{K}_{i1^*} = 0, \quad \tilde{K}_{ip^*} = \frac{\varphi}{4} \|R(y, e_p)e_i\|^2, \quad (6)$$

$$\tilde{K}_{1^*p^*} = -\frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2}, \quad (7)$$

$$\tilde{K}_{p^*q^*} = \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)}, \quad p \neq q, \quad (8)$$

где K_{ij} – секционная кривизна базы (M, g) вдоль 2-мерного направления, определяемого векторами e_i, e_j ортонормированного базиса $\{e_i\}$ касательного пространства $T_x M$. Анализируя полученные равенства (5)–(8), приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1. *Среди пространств $(TM, \tilde{g})$ нет пространств постоянной ненулевой секционной кривизны.*

Скалярная кривизна $\tilde{S}$ многообразия TM в точке $z = (x, y) \in TM$ может быть вычислена как сумма секционных кривизн $\tilde{K}_{IJ}$:

$$\tilde{S} = 2 \sum_{i < j} \tilde{K}_{ij} + 2 \sum_{i, j^*} \tilde{K}_{ij^*} + 2 \sum_{i^* < j^*} \tilde{K}_{i^*j^*}. \quad (9)$$

В соответствии с (5)–(8) находим

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x, y) = S(x) - \frac{3\varphi}{2} \sum_{i < j} \|R(e_i, e_j)y\|^2 + \frac{\varphi}{2} \sum_{i, p} \|R(y, e_p)e_i\|^2 \\ + 2(n-1) \left\{ -\frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} + \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} \right. \\ \left. + (n-2) \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{4\varphi^2(\varphi + 2z\psi)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $S(x)$ – скалярная кривизна базисного многообразия (M, g) .

4. Пусть базисное многообразие M имеет постоянную секционную кривизну k . Тогда

$$R(X, Y)Z = k(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y), \quad S = k \cdot n(n-1).$$

Вычисляя в этом случае все суммы правой части равенства (10), получаем формулу, выражающую зависимость скалярной кривизны $\tilde{S}$ касательного расслоения с метрикой $\tilde{g}$ от кривизны k , размерности n базы и функций φ и ψ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(x, y) = n(n-1)k - \varphi z(n-1) \cdot k^2 \\ + 2(n-1) \left\{ \frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} - \frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} \right\} \\ + (n-1)(n-2) \frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выясним, в каком случае $\tilde{S} = \text{const}$. Из (11) следует, что для того, чтобы скалярная кривизна касательного расслоения с метрикой $\tilde{g}$ была величиной постоянной, достаточно выполнения условий

$$\varphi \cdot z = c_1, \quad (12)$$

$$\frac{z\varphi'^2(\varphi + z\psi) + z\varphi\psi'(\varphi + z\varphi') + \varphi^2\psi}{\varphi^2(\varphi + 2z\psi)^2} - \frac{\varphi''z + \varphi'}{\varphi(\varphi + 2z\psi)} = c_2, \quad (13)$$

$$\frac{2\varphi\psi - 2\varphi\varphi' - z\varphi'^2}{2\varphi^2(\varphi + 2z\psi)} = c_3, \quad (14)$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые постоянные, $c_1 \neq 0$. Из требования (12), учитывая, что $\varphi > 0$, находим $\varphi = a^2/z$, где $a = \text{const} \neq 0$. Нетрудно проверить, что условия (13), (14) в этом случае также выполняются, поэтому имеет место

ТЕОРЕМА 2. Если базисное многообразие является пространством постоянной секционной кривизны k , а функции φ и ψ таковы, что $\varphi = a^2/z$ ($a = \text{const} \neq 0$), $\varphi + 2z\psi > 0$, то касательное расслоение с метрикой $\tilde{g}$ имеет постоянную скалярную кривизну

$$\tilde{S} = (n-1) \left(-a^2 k^2 + nk + \frac{1}{2a^2} (n-2) \right).$$

Исследуя знак скалярной кривизны $\tilde{S}$ как функции аргумента $k \in \mathbb{R}$ приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (M, g) – риманово многообразие размерности $n \geq 2$, имеющее постоянную секционную кривизну k . Если функции φ и ψ таковы, что $\varphi = a^2/z$ ($a = \text{const} \neq 0$), $\varphi + 2z\psi > 0$, то для скалярной кривизны $\tilde{S}$ пространства $(TM, \tilde{g})$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $\tilde{S} > 0$ при $k \in \left(\frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, \frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2} \right)$;
- 2) $\tilde{S} = 0$ при $k = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}$;
- 3) $\tilde{S} < 0$ при $k \in \left(-\infty, \frac{n - \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2} \right) \cup \left(\frac{n + \sqrt{n^2 + 2(n-2)}}{2a^2}, +\infty \right)$.

5. Пусть M – многообразие постоянной секционной кривизны k . Рассмотрим следующий случай:

$$\varphi = 1, \quad \psi = c, \quad \text{где } c = \text{const} > 0.$$

Тогда скалярная кривизна $\tilde{S}$ пространства $(TM, \tilde{g})$ имеет вид

$$\tilde{S} = n(n-1)k - z(n-1)k^2 + (n-1) \left[\frac{2c}{(1+2zc)^2} + (n-2) \frac{c}{1+2zc} \right].$$

Для $n \geq 2$ исследуем знак скалярной кривизны $\tilde{S}$ как функции аргументов $(z, k) \in D = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. График уравнения $\tilde{S}(z, k) = 0$ определяется в плоскости (z, k) уравнением второго порядка относительно k

$$-k^2 z + kn + \frac{c(n + 2nzc - 4zc)}{(1 + 2zc)^2} = 0,$$

дискриминант которого всегда положителен. Разрешая его относительно k , находим

$$k_{1,2} = \frac{n(1 + 2zc) \pm \sqrt{n^2(1 + 2zc)^2 + 4zc(n + 2nzc - 4zc)}}{2z(1 + 2zc)}.$$

Анализируя поведение решений $k_1(z)$ и $k_2(z)$, заключаем, что $\tilde{S} < 0$ при $k \in (-\infty, -c]$ и знакопеременна при других значениях k . Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть (M, g) – риманово многообразие постоянной секционной кривизны k , $\varphi = 1$, $\psi = c$, где $c = \text{const} > 0$. Тогда касательное расслоение $(TM, \tilde{g})$ имеет отрицательную скалярную кривизну, если и только если $k \in (-\infty, -c]$. При других значениях k скалярная кривизна знакопеременна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Sasaki, “On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J.* (2), **10**:3 (1958), 338–354.
- [2] M. Sekizawa, “Curvatures of tangent bundles with Cheeger–Gromoll metric”, *Tokyo J. Math.*, **14**:2 (1991), 407–417.
- [3] S. Gudmundsson, E. Kappos, “On the geometry of the tangent bundle with the Cheeger–Gromoll metric”, *Tokyo J. Math.*, **25**:1 (2002), 75–83.
- [4] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир, М., 1971.

О. В. Сухова

Пензенский государственный педагогический университет

E-mail: Suhova_o@list.ru

Поступило

17.04.2008