Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. Галандарзаде, З. Хоцере, n -Расширенные квазиб-
эровские кольца, *Матем. заметки*, 2009, том 85, вы-
пуск 6, 826–839

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:52:42

n -Расширенные квазибэровские кольца

Ш. Галандарзаде, Ф. Заре Хошере

Кольцо с единицей называется n -расширенным квазибэровским кольцом (относительно главных идеалов), если для любых собственных (главных) правых идеалов $I_1, \dots, I_n$, где $n \geq 2$, правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом. Кольцо с единицей называется n -расширенным правым (левым) РР-кольцом, если правый (соответственно левый) аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$, где $n \geq 2$, порожден идемпотентом для любых неединичных элементов $x_1, \dots, x_n$. Рассматривается поведение n -расширенных правых (главных) квазибэровских колец относительно правых РР-колец при применении различных конструкций и расширений. Эти классы колец замкнуты относительно прямых произведений и эквивалентностей Мориты. Приводятся примеры, которые иллюстрируют саму теорию и намечают ее границы.

Библиография: 3 названия.

1. Введение. В этой статье под кольцами всегда подразумеваются ассоциативные кольца с единицей и все модули предполагаются унитарными. Кольцо R называется *правым (левым) РР-кольцом*, если правый (соответственно левый) аннулятор любого элемента R порожден идемпотентом. Кольцо R называется *обобщенным правым (левым) РР-кольцом*, если для любого $x \in R$ найдется натуральное число n такое, что правый (левый) аннулятор элемента x^n порожден идемпотентом. Для заданного натурального n кольцо R называется *n -обобщенным правым (левым) РР-кольцом*, если для любого $x \in R$ правый (соответственно левый) аннулятор элемента x^n порожден идемпотентом.

Кольцо R называется *квазибэровским*, если правый аннулятор каждого непустого подмножества R (правого идеала) порожден идемпотентом как правый идеал. Кольцо R называется *квазибэровским относительно правых главных идеалов*, если правые аннуляторы правых главных идеалов порождены идемпотентами. Аналогично определяются *квазибэровские кольца относительно левых главных идеалов*. Будем говорить, что кольцо R является *обобщенным квазибэровским относительно правых (главных) идеалов*, если для любого правого (главного) идеала I в кольце R найдется такое натуральное n (зависящее от I), что правый аннулятор идеала I^n порожден идемпотентом. Мы говорим, что кольцо R является *n -обобщенным квазибэровским относительно правых (главных) идеалов* для данного натурального n , если для любого правого (главного) идеала I в кольце R правый аннулятор идеала I^n порожден идемпотентом. *Квазибэровские* и *обобщенные квазибэровские кольца относительно левых идеалов* определяются аналогично.

В этой статье вводятся новые понятия n -расширенных квазибэровских колец (относительно главных идеалов) и n -расширенных РР-колец. Мы докажем ряд специальных теорем и утверждений; например, одна из теорем гласит, что кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля над n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов само является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов; в частности, свойство быть n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов инвариантно относительно эквивалентностей Мориты. Центр n -расширенного квазибэровского кольца относительно правых (главных) идеалов и правого РР-кольца является n -расширенным РР-кольцом.

2. Предварительные сведения и примеры. Пусть R – кольцо. Идемпотент $e \in R$ называется *левым (правым) полуцентральным идемпотентом*, если $xe = exe$ ($ex = exe$) для всех $x \in R$ (это понятие ввел Биркенмейер в 1983 г). Мы используем обозначения $Z(R)$, $B(R)$, $S_l(R)$ и $\text{Mat}_n(R)$ для центра кольца R , множества всех центральных идемпотентов в R , множества всех левых полуцентральных идемпотентов в R и кольца матриц размера $n \times n$ над R соответственно. Для непустого подмножества X кольца R правый (левый) аннулятор множества X над R обозначается через $r_R(X)$ (соответственно $l_R(X)$). Когда из контекста ясно, о каком кольце идет речь, мы опускаем индекс. Символы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$ обозначают кольца целых чисел и вычетов по модулю n соответственно. Кольцо R называется *абелевым*, если любой идемпотент в этом кольце централен. Очевидно, если R – абелево или полупростое кольцо, то $S_l(R) = B(R)$; обратное неверно [1; предложение 1.17].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть R – кольцо и $n \geq 2$ – целое. Тогда R является квазибэровским относительно правых идеалов, если и только если правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом для любых правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – квазибэровское кольцо относительно правых идеалов. Тогда аннулятор $r_R(I)$ порожден идемпотентом для любого правого идеала I в R . Пусть $I_1, \dots, I_n$ – правые идеалы в кольце R . Поскольку произведение $I_1 \cdots I_n$ тоже является правым идеалом в R , имеем $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$ для некоторого идемпотента e в R .

Обратно, покажем, что $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$ для любых правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R . Пусть I – правый идеал в R , и пусть $I_1 = I$ и $I_j = R$ для $j = 2, \dots, n$. Тогда $r_R(I) = r_R(IR \cdots R) = eR$ для некоторого $e^2 = e \in R$, а значит, кольцо R является квазибэровским относительно правых идеалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть R – кольцо, $n \geq 2$ – целое число и правый аннулятор произведения $I_1 \cdots I_n$ порожден идемпотентом для любых правых главных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R . Тогда R является квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО стандартно.

То же самое верно и для квазибэровских колец относительно левых (главных) идеалов, а значит, и для квазибэровских колец (относительно главных идеалов).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть R – кольцо и $n \geq 2$ – целое. Кольцо R называется *n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов*,

если для любых собственных правых (главных) идеалов $I_1, I_2, \dots, I_n$ в кольце R правый аннулятор произведения $I_1 I_2 \cdots I_n$ порожден идемпотентом. Аналогично определяется n -расширенное квазибэровское кольцо относительно левых идеалов.

Кольцо R называется n -расширенным квазибэровским кольцом (относительно главных идеалов), если оно является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых и левых (главных) идеалов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $n \geq 2$ – целое число. Кольцо R является правым РР-кольцом, если и только если правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом для любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – правое РР-кольцо. Поскольку произведение $x_1 \cdots x_n$ любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R само является элементом кольца R , правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом.

Обратно, покажем, что аннулятор $r_R(x_1 \cdots x_n)$ порожден идемпотентом для любых n элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R . Возьмем $x \in R$. Положим $x_1 = x$ и $x_j = 1$ для $j = 2, \dots, n$. Тогда $r_R(x) = r_R(x_1 \cdots 1) = eR$ для некоторого идемпотента e в кольце R . Значит, R является правым РР-кольцом.

То же утверждение верно для левых РР-колец и, следовательно, для РР-колец.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $n \geq 2$ – целое число. Кольцо R называется n -расширенным правым РР-кольцом, если для любых неединичных элементов $x_1, \dots, x_n$ кольца R правый аннулятор произведения $x_1 \cdots x_n$ порожден идемпотентом. n -Расширенное левое РР-кольцо определяется аналогично.

Кольцо R называется n -расширенным РР-кольцом, если оно одновременно является n -расширенным правым и левым РР-кольцом.

Следующий пример демонстрирует разницу между n -расширенными и $(n-1)$ -расширенными кольцами.

ПРИМЕР 1. Пусть $R = \mathbb{Z}_{27}$ и $I = \langle 3 \rangle$. Поскольку произведение любых трех неединичных элементов кольца R равно нулю, R является 3-расширенным квазибэровским кольцом и 3-расширенным РР-кольцом. Единственные идемпотенты кольца R – это элементы 0 и 1. Следовательно, аннуляторы $r_R(I^2)$ и $r_R(3^2)$ не порождены идемпотентами, потому что $3 \in r_R(I^2)$ и $3 \in r_R(3^2)$, тогда как 2 не принадлежит ни одному из аннуляторов $r_R(I^2)$ и $r_R(3^2)$. Таким образом, R не является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов или 2-расширенным РР-кольцом. Заметим, что $r_R(I) \neq 0$, $r_R(3) \neq 0$, $2 \notin r_R(I)$ и $2 \notin r_R(3)$. Значит, R не является ни квазибэровским кольцом относительно главных идеалов, ни РР-кольцом.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вообще, кольцо $\mathbb{Z}_{p^p}$, где p – простое число, большее двух, является p -расширенным квазибэровским кольцом и p -расширенным РР-кольцом, но не является ни $(p-1)$ -расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов, ни $(p-1)$ -расширенным РР-кольцом. Не является оно и квазибэровским кольцом относительно главных идеалов или РР-кольцом. Наконец, $\mathbb{Z}_{2^2} = \mathbb{Z}_4$ является 2-расширенным квазибэровским кольцом и 2-расширенным РР-кольцом, но не является ни квазибэровским относительно главных идеалов, ни РР-кольцом.

Ниже мы приводим пример n -обобщенного РР-кольца, которое не является n -расширенным РР-кольцом.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbb{Z}_2$ – поле из двух элементов, и пусть

$$R = \{a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \mid a_i \in \mathbb{Z}_2 \text{ для } i = 1, 2, 3, 4\}$$

– кольцо гамильтоновых кватернионов над $\mathbb{Z}_2$. Согласно [2; пример 1] R является 2-обобщенным РР-кольцом, но аннулятор $r_R((1+i)i) = r_R(1+i)$ не порождается идемпотентом, так что R не является 2-расширенным РР-кольцом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть R – n -расширенное правое РР-кольцо. Тогда R не содержит центральных нильпотентов порядка $m > n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $0 \neq a \in R$ – центральный нильпотент порядка $m > n$. Если $m-1 = n$, то $r_R(a^{m-1}) = eR$ для некоторого $e^2 = e \in R$. Если $m-1 > n$, то

$$r_R(a^{m-1}) = r_R(a^{m-n} \underbrace{a \cdots a}_{n-1}) = eR$$

для некоторого $e^2 = e \in R$. Но $a \in r_R(a^{m-1})$ и $a^{m-1} \neq 0$; значит, ни одно из равенств $e = 0$ и $e = 1$ не может выполняться. Поскольку $a \in Z(R)$ и $a \in r_R(a^{m-1})$, имеем $ea = a = ae$. Следовательно,

$$0 = a^{m-1}e = a^{m-2}ae = a^{m-2}a = a^{m-1}$$

– мы пришли к противоречию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для кольца R следующие условия равносильны:

- (i) R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов;
- (ii) для любых собственных конечно порожденных правых идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$;
- (iii) для любых собственных главных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$;
- (iv) для любых собственных конечно порожденных идеалов $I_1, \dots, I_n$ в кольце R найдется идемпотент $e \in R$ со свойством $r_R(I_1 \cdots I_n) = eR$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что (ii) влечет (i). Импликации (i) $\Leftrightarrow$ (iii) и (ii) $\Leftrightarrow$ (iv) вытекают из того, что $r_R(I_1 \cdots I_n) = r_R(RI_1 \cdots RI_n)$. Предположим, что выполнено (i) и $I_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} a_{ij_i} R$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $m = \max\{m_1, \dots, m_n\}$ и $a_{ij_i} = 0$ для $j_i \geq m_i$. Тогда

$$I_1 \cdots I_n = \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} a_{1j_1} R \cdots a_{nj_n} R.$$

Поскольку R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, имеем $r_R(a_{1j_1} R \cdots a_{nj_n} R) = e_{j_1, \dots, j_n} R$, где $e_{j_1, \dots, j_n}$ – идемпотент кольца R для $j_i = 1, \dots, m$ и $i = 1, \dots, n$. Каждый идемпотент $e_{j_1, \dots, j_n}$ является левым полуцентральный; значит,

$$\begin{aligned} r_R(I_1 \cdots I_n) &= r_R\left(\sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} a_{1j_1} R \cdots a_{nj_n} R\right) \\ &= \bigcap_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} r_R(a_{1j_1} R \cdots a_{nj_n} R) = \bigcap_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq m} e_{j_1, \dots, j_n} R = eR \end{aligned}$$

для некоторого идемпотента e кольца R .

3. n -Расширенные квазибэровские кольца и РР-кольца. Для кольца R положим

$$R_n = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right) \right\}.$$

Если R – абелево обобщенное правое РР-кольцо, то согласно [2; предложение 3] R_n – тоже обобщенное правое РР-кольцо. Кроме того, если $S_l(R) = B(R)$ и R – квазибэровское кольцо (относительно правых главных идеалов), то согласно [3; теорема 3.2] для любого $n \geq 2$ кольцо R_n является n -обобщенным квазибэровским кольцом (относительно правых главных идеалов). Используя примеры 2 и 3, мы покажем, что для n -расширенных колец эти утверждения могут быть неверными.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R_n – m -расширенное правое РР-кольцо. Тогда R тоже является m -расширенным правым РР-кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – m -расширенное РР-кольцо. Возьмем матрицу

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \in R_n,$$

где a_i – неединичный элемент кольца R для каждого $i = 1, 2, \dots, m$. Для некоторого $e^2 = e \in R_n$ имеем $r_R(A_1 \cdots A_m) = eR_n$, причем

$$e = \begin{pmatrix} f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f \end{pmatrix},$$

где $f^2 = f \in R$. Следовательно, $fR \subseteq r_R(a_1 \cdots a_m)$. Пусть $b \in r_R(a_1 \cdots a_m)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix} \in R_n$$

содержится в $r_R(A_1 \cdots A_m) = eR_n$. Значит, $b \in fR$ и R является m -расширенным правым РР-кольцом.

Следующий пример показывает, что обратное неверно.

ПРИМЕР 3. Пусть $R = \mathbb{Z}$. Тогда аннулятор

$$r_{R_2} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid d \in R \right\}$$

не порождается идемпотентом. Пусть

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} R_2$$

для некоторого $f^2 = f \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af & bf \\ 0 & af \end{pmatrix},$$

где $a, b \in R$. Следовательно, $d = 0$. Это противоречие показывает, что R_2 не является 2-расширенным правым РР-кольцом.

Ниже мы приводим пример n -обобщенного квазибэровского кольца относительно правых идеалов, которое не является ни n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, ни квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.

ПРИМЕР 4. Пусть $R = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда

$$\{I_1 = \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = R, I_2 = \langle 4 \rangle = \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}, I_3 = \langle 3 \rangle = \{0, 3\}, I_4 = \langle 0 \rangle = 0\}$$

и $\{0, 1, 3, 4\}$ – множества всех идеалов и всех идемпотентных элементов кольца R соответственно. Имеем $r_R(I_1) = I_4$, $r_R(I_2) = I_3$, $r_R(I_3) = I_2$ и $r_R(I_4) = I_1$. Следовательно, кольцо $\mathbb{Z}_6$ является квазибэровским. Согласно [3; теорема 3.2]

$$R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$$

– 2-обобщенное квазибэровское кольцо. Пусть

$$J_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \langle 2 \rangle \right\}, \quad J_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \langle 3 \rangle \right\}.$$

Тогда

$$J_1 J_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r_{R_2}(J_1 J_2) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} R_2$$

для некоторого $f^2 = f \in R$. Тогда

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, $f = f1 = 1$. Но

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

для каждого $0 \neq y \in \mathbb{Z}_6$. Это противоречие показывает, что кольцо R_2 не является 2-расширенным квазибэровским.

Кроме того, поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2,$$

кольцо R_2 не является 2-расширенным квазибэровским кольцом.

Из того, что

$$r_{R_2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_2 \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & xz \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{Z}_6 \right\} = r_{R_2} \left(\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right),$$

вытекает, что R_2 не является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно главных идеалов.

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, подкольца n -расширенных квазибэровских колец относительно правых (главных) идеалов не обязано быть n -расширенным квазибэровским кольцом относительно (правых) главных идеалов.

ПРИМЕР 5. Кольцо $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов для каждого $n \geq 2$. Для простого p положим

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{p}\}.$$

Кольцо R – подкольцо кольца $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, не являющееся n -расширенным квазибэровским кольцом относительно (правых) главных идеалов ни для какого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку единственные идемпотенты в R – это $(0, 0)$ и $(1, 1)$, аннулятор $r_R(((p, 0)R)^n) = (0, p)R$ не порождается идемпотентом ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

Приведем теперь пример n -расширенного квазибэровского кольца, которое содержит полупростое n -расширенное РР-подкольцо, не являющееся n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых или левых идеалов ни для какого целого $n \geq 2$.

ПРИМЕР 6. Для поля F и $n = 1, 2, \dots$ положим $F_n = F$ и определим S как кольцо матриц размера 2×2 над кольцом $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$. Кольцо S квазибэровское, а потому и n -расширенное квазибэровское для каждого целого $n \geq 2$ [1; предложение 2.1, теорема 2.2]. Положим

$$R = \begin{pmatrix} \prod_{n=1}^{\infty} F_n & \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n \\ \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n & \left\langle \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, 1 \right\rangle \end{pmatrix},$$

где $\langle \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n, 1 \rangle$ – F -алгебра, порожденная суммой $\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$ и 1 и $n \geq 2$ – целое. Кольцо R является подкольцом кольца S . Согласно [3; пример 2.3] R является полупростым n -расширенным РР-кольцом, но не является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых или левых идеалов.

ПРИМЕР 7. Пусть $A = R \oplus \text{Mat}_2(\mathbb{Z}[X])$, где R – кольцо из примера 5. Тогда согласно [3; пример 2.4] A является полупростым кольцом, причем его центр – n -расширенное РР-кольцо, не являющееся n -расширенным квазибэровским кольцом относительно левых или правых идеалов ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

Следующий пример – простое n -расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов, которое не является n -расширенным правым или левым РР-кольцом.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a \equiv d, b \equiv 0, c \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

Поскольку кольцо R – простое, оно является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов. При этом согласно [3; пример 2.9] R не является обобщенным правым или левым РР-кольцом, а значит, и n -расширенным правым или левым РР-кольцом ни для какого $n \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если R – n -расширенное правое квазибэровское кольцо относительно главных идеалов, то центр R является n -расширенным правым РР-кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z(R)$ – центр R , и пусть $a_1, \dots, a_n \in Z(R)$ – отличные от единицы элементы. Тогда

$$l_R(a_1 \cdots a_n) = l_R(Ra_1 \cdots Ra_n) = r_R(a_1 \cdots a_n) = r_R(a_1 R \cdots a_n R) = eR,$$

где $e \in S_l(R)$.

Поскольку

$$l_R(Ra_1 \cdots Ra_n) = l_R r_R l_R(Ra_1 \cdots Ra_n) = l_R r_R(eR)$$

и $r_R(eR) = r_R(eR \cdots eR) = fR$ для некоторого $f \in S_l(R)$, имеем $1 - f \in S_r(R)$; значит,

$$eR = l_R(Ra_1 \cdots Ra_n) = l_R(fR) = R(1 - f).$$

Итак, $e = x(1 - f)$ для некоторого $x \in R$. Следовательно, $ef = x(1 - f)f = 0$. Из того, что $e \in S_l(R)$, вытекают равенства $fe = efe = 0$, откуда $ef = 0$. Из $eR = R(1 - f)$ получаем $1 - f = ey$ для некоторого $y \in R$; значит, $e = e(1 - f) = ey = 1 - f$. Таким образом, $e \in S_l(R) \cap S_r(R) = B(R)$. Следовательно,

$$r_{Z(R)}(a_1 \cdots a_n) = r_R(a_1 \cdots a_n) \cap Z(R) = eR \cap Z(R) = eZ(R).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любого кольца R верны следующие утверждения:

- (i) если R – n -расширенное РР-кольцо, то $Z(R)$ – n -расширенное РР-кольцо;
- (ii) если R – абелево n -расширенное правое РР-кольцо, то $Z(R)$ – n -расширенное РР-кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $x_1, \dots, x_n$ – неединичные элементы кольца $Z(R)$. Тогда $r_R(x_1 \cdots x_n) = eR$ и $l_R(x_1 \cdots x_n) = Rf$ для некоторых $e^2 = e$ и $f^2 = f$ в R . Из равенства $r_R(x_1 \cdots x_n) = l_R(x_1 \cdots x_n)$ вытекает, что $r_R(x_1 \cdots x_n)$ является двусторонним идеалом в R . Значит, $re = ere = frf = fr = er$ для каждого $r \in R$, откуда $e = f \in Z(R)$. Поскольку $r_{Z(R)}(x_1 \cdots x_n) = r_R(x_1 \cdots x_n) \cap Z(R)$, имеем $r_{Z(R)}(x_1 \cdots x_n) = eZ(R)$.

(ii) Пусть $x_1, \dots, x_n$ – неединичные элементы кольца $Z(R)$. Тогда $r_R(x_1 \cdots x_n) = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$. Поскольку кольцо R абелево, идемпотент e централен, и

$$l_{Z(R)}(x_1 \cdots x_n) = r_{Z(R)}(x_1 \cdots x_n) = r_R(x_1 \cdots x_n) \cap Z(R) = eZ(R).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Класс n -расширенных правых РР-колец замкнут относительно прямого произведения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R_i , где $i \in I$, – n -расширенное правое РР-кольцо и $R = \prod_{i \in I} R_i$. Рассмотрим неединичные элементы $x^1 = (x_i^1), \dots, x^n = (x_i^n)$ кольца R . Имеем $r_{R_i}(x_i^1 \cdots x_i^n) = e_i R_i$, где $e_i^2 = e_i \in R_i$ для каждого $i \in I$. Пусть $e = (e_i) \in R$. Тогда $e^2 = e$ и $r_R(x^1 \cdots x^n) = eR$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Класс n -расширенных квазибэровских колец относительно правых (главных) идеалов замкнут относительно прямого произведения.*

Ниже мы приводим пример абелева квазибэровского кольца относительно правых главных идеалов, которое содержит обобщенное квазибэровское подкольцо относительно правых главных идеалов, не являющееся n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов.

ПРИМЕР 9. Пусть R – абелево квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов с нулевой характеристикой, и пусть $S = \prod_{n=1}^{\infty} R$. Согласно [3; пример 4.10] подкольцо T кольца S , порожденное суммой $\bigoplus_{n=1}^{\infty} R$ и $1 \in S$, является обобщенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, но не является n -обобщенным правым квазибэровским кольцом относительно главных идеалов ни для какого целого $n \geq 2$. Значит, оно не является n -расширенным правым квазибэровским кольцом относительно главных идеалов ни для какого целого $n \geq 2$.

Следующий пример доказывает существование квазибэровского кольца относительно главных идеалов, которое не является n -расширенным правым РР-кольцом, но содержит n -расширенное правое РР-подкольцо.

ПРИМЕР 10. Обозначим кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}[X]$ через S и кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}$ через R . Согласно [3; пример 4.11, (ii)] R – n -расширенное правое РР-кольцо, а S – квазибэровское кольцо относительно главных идеалов, не являющееся n -расширенным правым РР-кольцом ни для какого целого $n \geq 2$.

ПРИМЕР 11. Пусть S – кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}[x]$, и пусть T – кольцо всех матриц размера 2×2 над $\mathbb{Z}_n[x]$. Тогда $S \oplus T$ – обобщенное квазибэровское кольцо, которое не является n -расширенным РР-кольцом.

4. n -Расширенные матричные кольца. В этом пункте T обозначает кольцо обобщенных (или формальных) треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

размера 2×2 , где R и S – кольца, а M – (S, R) -бимодуль. Для (S, R) -подмодуля N бимодуля M мы полагаем

$$\text{Ann}_R(N) = \{r \in R \mid Nr = 0\} \quad \text{и} \quad \text{Ann}_S(N) = \{s \in S \mid sN = 0\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

где R и S – кольца и M – (S, R) -бимодуль. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) T является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов;
- (2) (i) R и S являются n -расширенными квазибэровскими кольцами относительно правых (главных) идеалов;
- (ii) $r_M(I_1 I_2 \cdots I_n) = (r_S(I_1 I_2 \cdots I_n))M$, где $I_1, I_2, \dots, I_n$ – собственные (главные) идеалы кольца S ;
- (iii) если

$$\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_2 & N_2 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$$

– собственные (главные) правые идеалы кольца T , то

$$r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n) \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-2} N_{n-1} J_n) \cap \cdots \\ \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{i-1} N_i J_{i+1} \cdots J_n) \cap \cdots \cap \text{Ann}_R(N_1 J_2 \cdots J_n) = eR$$

для некоторого $e = e^2 \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). (i) Пусть T – n -расширенное квазибэровское кольцо, и пусть $J_1, \dots, J_n$ – идеалы в кольце R .

Положим

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & M J_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad I_k = \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & J_k \end{pmatrix} \quad \text{для } k = 2, \dots, n.$$

Поскольку T является n -расширенным квазибэровским кольцом и $r_R(J_1 \cdots J_n) \subseteq \text{Ann}_R(M J_1 \cdots J_n)$, имеем

$$\begin{aligned} r_T(I_1 \cdots I_n) &= r_T \left(\begin{pmatrix} 0 & M J_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & J_n \end{pmatrix} \right) = r_T \left(\begin{pmatrix} 0 & M J_1 \cdots J_n \\ 0 & J_1 \cdots J_n \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(M J_1 \cdots J_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} e_1 S & e_1 M \\ 0 & e_2 R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для некоторых $e_1 \in S_l(S)$ и $e_2 \in S_l(R)$. Значит, $r_R(J_1 \cdots J_n) = e_2 R$ для некоторого $e_2 \in S_l(R)$. Остальные случаи очевидны.

(ii) Пусть $I_1, I_2, \dots, I_n$ – собственные (главные) идеалы в кольце S . Тогда

$$\begin{pmatrix} I_j & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots, n,$$

являются идеалами в кольце T . Поскольку T является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, имеем

$$r_T \left(\begin{pmatrix} I_1 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} T,$$

где $e_1 \in S_l(S)$ и $e_2 \in S_l(R)$. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1}M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 S & e_1 M \\ 0 & e_2 R \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$r_M(I_1 \cdots I_n) = e_1 M = e_1 S M = (r_S(I_1 \cdots I_n)) M.$$

(iii) Пусть

$$\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix}$$

– собственные (главные) идеалы кольца T .

Поскольку T является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, имеем

$$r_T \left(\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix} \right) = eT$$

для некоторого $e^2 = e \in T$.

Положим

$$A = I_1 \cdots I_{n-1} N_n + I_1 \cdots I_{n-2} N_{n-1} J_n + \cdots + I_1 \cdots I_{i-1} N_i J_{i+1} \cdots J_n + \cdots + N_1 J_2 \cdots J_n.$$

Имеем

$$r_T \begin{pmatrix} I_1 \cdots I_n & A \\ 0 & J_1 \cdots J_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(A) \end{pmatrix} = eT.$$

Значит,

$$\begin{aligned} & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n) \cap \cdots \\ & \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{i-1} N_i J_{i+1} \cdots J_n) \cap \cdots \cap \text{Ann}_R(N_1 J_2 \cdots J_n) = e_2 R, \end{aligned}$$

где $e_2^2 = e_2 \in R$. Отсюда

$$eT = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 S & e_1 M \\ 0 & e_2 R \end{pmatrix},$$

где $e_1 \in S_l(S)$ и $e_2 \in S_l(R)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что R и S – n -расширенные квазибэровские кольца относительно правых (главных) идеалов. Пусть

$$\begin{pmatrix} I_k & N_k \\ 0 & J_k \end{pmatrix}$$

– собственные (главные) идеалы кольца T для $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$r_S(I_1 \cdots I_n) = e_1 S, r_M(I_1 \cdots I_n) = e_1 M$$

для некоторого $e_1 \in S_l(S)$ и

$$\begin{aligned} & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n) \cap \cdots \\ & \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{i-1} N_i J_{i+1} \cdots J_n) \cap \cdots \cap \text{Ann}_R(N_1 J_2 \cdots J_n) = e_2 R \end{aligned}$$

для некоторого $e_2 \in S_l(R)$. Имеем

$$\begin{aligned} & r_T \left(\begin{pmatrix} I_1 & N_1 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} I_n & N_n \\ 0 & J_n \end{pmatrix} \right) \\ & = \begin{pmatrix} r_S(I_1 \cdots I_n) & r_M(I_1 \cdots I_n) \\ 0 & r_R(J_1 \cdots J_n) \cap \text{Ann}_R(I_1 \cdots I_{n-1} N_n + \cdots + N_1 J_2 \cdots J_n) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} e_1 S & e_1 M \\ 0 & e_2 R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & R \end{pmatrix} = eT, \end{aligned}$$

где $e \in S_l(T)$.

Ниже мы приводим пример n -расширенного квазибэровского кольца относительно правых идеалов, не являющееся квазибэровским кольцом. Тот же пример показывает, что определение n -расширенных квазибэровских колец несимметрично.

ПРИМЕР 12. Пусть

$$T = \begin{pmatrix} R & S \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– квазибэровское кольцо и

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– (R, R) -бимодуль. Тогда T является 2-расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, но не является квазибэровским кольцом или квазибэровским кольцом относительно левых идеалов ни для какого целого $n \geq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть e – ненулевой идемпотент в кольце R .

(i) Если R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов, то eRe тоже является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов.

(ii) Если R является n -расширенным правым РР-кольцом, то eRe тоже является n -расширенным правым РР-кольцом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Сначала предположим, что R – n -расширенное квазибэровское кольцо. Покажем, что eRe является n -расширенным квазибэровским кольцом. Пусть $I_1, \dots, I_n$ – собственные правые идеалы в eRe . Тогда $I_j R$ – собственные

правые идеалы в R для $j = 1, \dots, n$. Поскольку R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, имеем $r_R(I_1 R \cdots I_n R) = fR$ для некоторого полуцентрального идемпотента f в кольце R . Покажем, что

$$r_{eRe}(I_1 \cdots I_n) = (efe)eRe.$$

Поскольку идемпотент f полуцентрален, имеем $(efe)eRe \subseteq r_{eRe}(I_1 \cdots I_n)$. Пусть $x = exe \in r_{eRe}(I_1 \cdots I_n)$. Тогда

$$0 = I_1 \cdots I_n x = I_1 eRe \cdots I_n eRe x = I_1 R \cdots I_n R x.$$

Значит, $x = fx = ef x e = (efe)(exe)$.

Теперь предположим, что R – n -расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов. Покажем, что eRe тоже является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов. Пусть $a_1(eRe), \dots, a_n(eRe)$ – собственные главные правые идеалы в eRe . Поскольку R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых главных идеалов, имеем $r_R(a_1 R \cdots a_n R) = fR$ для некоторого полуцентрального идемпотента f в R . Покажем, что

$$r_{eRe}(a_1(eRe) \cdots a_n(eRe)) = (efe)(eRe).$$

Пусть $x \in r_{eRe}(a_1(eRe) \cdots a_n(eRe))$. Тогда

$$0 = a_1(eRe) \cdots a_n(eRe)x = a_1 R \cdots a_n R x.$$

Значит, $x = fx = (efe)(exe)$.

(ii) Пусть $x_1, \dots, x_n \in eRe$ – неединичные элементы. Тогда $r_R(x_1 \cdots x_n) = fR$ для некоторого идемпотента $f \in R$. Поскольку $r_{eRe}(x_1 \cdots x_n) = r_R(x_1 \cdots x_n) \cap eRe$ и $1 - e \in r_R(x_1 \cdots x_n)$, имеем $1 - e = f(1 - e)$, откуда $0 = e(1 - e) = ef(1 - e)$. Таким образом, $ef = efe$. Пусть $g = ef$. Тогда $g^2 = g \in eRe$ и

$$x_1 \cdots x_n g = x_1 \cdots x_n ef = x_1 \cdots x_n f = 0.$$

Для $y \in r_{eRe}(x_1 \cdots x_n)$ имеем $y = ey = ef y = gy \in geRe$. Значит, $r_{eRe}(x_1 \cdots x_n) = geRe$.

ТЕОРЕМА 3. *Кольцо эндоморфизмов конечно порожденного проективного модуля над n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов. В частности, свойство быть n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых (главных) идеалов инвариантно относительно эквивалентностей Мориты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение вытекает непосредственно из предложения 6. Пусть m – натуральное число, R – n -расширенное квазибэровское кольцо относительно правых идеалов и $I_1, \dots, I_n$ – собственные идеалы в $\text{Mat}_m(R)$. Тогда $I_k = \text{Mat}_m(J_k)$ для некоторых идеалов J_k кольца R , где $k = 1, \dots, n$. Поскольку R является n -расширенным квазибэровским кольцом относительно правых идеалов, имеем $r_R(J_1 \cdots J_n) = eR$ для некоторого $e \in S_l(R)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} r_R(I_1 \cdots I_n) &= r_R(\text{Mat}_m(J_1) \cdots \text{Mat}_m(J_n)) = r_R(\text{Mat}_m(J_1 \cdots J_n)) \\ &= \text{Mat}_m(r_R(J_1 \cdots J_n)) = \text{Mat}_m(eR) = e\text{Mat}_m(R). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что R – n -расширенное квазибэровское кольцо относительно правых главных идеалов и $a_k \in \text{Mat}_m(R)$ для $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\text{Mat}_m(R)a_k\text{Mat}_m(R) = \text{Mat}_m(J_k),$$

где J_k – конечно порожденные идеалы кольца R для $k = 1, \dots, n$. Из предложения 5 вытекает, что $r_R(J_1 \cdots J_n) = eR$ для некоторого $e \in S_l(R)$. Значит,

$$\begin{aligned} r_R(\text{Mat}_m(R)a_1\text{Mat}_m(R) \cdots \text{Mat}_m(R)a_n\text{Mat}_m(R)) \\ = r_R(\text{Mat}_m(J_1 \cdots J_n)) = \text{Mat}_m(eR) = e\text{Mat}_m(R). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. F. Birkenmeier, J. Y. Kim, J. K. Park, “Principally quasi-Baer rings”, *Comm. Algebra*, **29**:2 (2001), 639–660.
- [2] C. Huh, H. K. Kim, Y. Lee, “p.p. rings and generalized p.p. rings”, *J. Pure Appl. Algebra*, **167**:1 (2002), 37–52.
- [3] A. Moussavi, H. Haj Seyyed Javadi, E. Hashemi, “Generalized quasi-Baer rings”, *Comm. Algebra*, **33**:7 (2005), 2115–2129.

Ш. Галандарзаде

Технический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран
E-mail: ghalandarzadeh@kntu.ac.ir

Поступило

11.03.2008

Ф. Заре Хошере

Технический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран