Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Параметр сходимости, ассоциированный с цепью Маркова и семейством функций, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 2, 294–304

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:36:08

Параметр сходимости, ассоциированный с цепью Маркова и семейством функций

М. Г. Шур

Предложенное здесь определение параметра сходимости $R(W)$, отвечающего цепи Маркова X с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$ и любому непустому набору W ограниченных снизу измеримых функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, шире известного определения параметра сходимости R по Твиди или Нуммелину. Весьма часто $R(W) < \infty$ и существует множество, играющее роль поглощающего множества из определения R по Нуммелину. Особо изучается случай, когда E локально компактно, X является феллеровской цепью на E и W совпадает с семейством $\mathcal{C}_0^+$ всех непрерывных функций $f \geq 0$ ($f \not\equiv 0$) с компактными носителями. В частности, найдены условия совпадения $R(\mathcal{C}_0^+)^{-1}$ с нормой подходящей модификации переходного оператора цепи.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. В работе обобщено и упрощено определение параметра сходимости цепи Маркова, причем особое внимание уделено цепям в локально компактных пространствах.

Этот параметр – мы его обозначим R_1 – играет ключевую роль в современной теории (однородных) неприводимых цепей Маркова [1]–[3]. Применительно к счетным цепям его ввел Вир-Джоунс [1] в 1962 г., а применительно к цепям с произвольными измеримыми пространствами состояний – Твиди [2] в 1974 г.; близкое понятие можно найти в [4]. Для широкого класса цепей Маркова определение R_1 было удачно модифицировано в [3], где указаны также соответствующие приложения.

С другой стороны, работая со случайными блужданиями на локально компактных группах, вместо R_1 нередко вводят величину, обратную спектральному радиусу блуждания (см. п. 5 и [5]). Она часто совпадает с R_1 , но может существовать и тогда, когда последний параметр не определен (например, когда нарушено условие (I) из п. 2; ср. также [6; п. 4]).

Стремясь к унификации, мы вводим понятие параметра сходимости $R(W)$, ассоциированного с заданной цепью Маркова и некоторым семейством функций W (см. (1)). Именно, пусть имеется (однородная) цепь Маркова $X = (X_n; n \geq 1)$ с измеримым пространством состояний $(E, \mathcal{B})$, марковской переходной вероятностью $p(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и переходным оператором P , определяемым стандартным образом [3] в пространстве $\mathcal{D}$ ограниченных снизу $\mathcal{B}$ -измеримых функций $f: E \rightarrow (-\infty, \infty]$ (здесь и далее символ ∞ обозначает $+\infty$). С оператором P мы

связываем его α -потенциалы $G^\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha^n P^n$, $\alpha > 0$, и для $W \subset \mathcal{D}$ полагаем

$$R(W) = \inf\{\alpha > 0 : G^\alpha f \equiv \infty \text{ для всех } f \in W\}, \quad (1)$$

приравняв нижнюю грань пустого множества к ∞ . Подчеркнем, что при надлежащих требованиях из [3] (см. далее условие (I)) или [2] параметр R_1 совпадает с $R(W_1)$ или $R(W_2)$ соответственно, где семейство W_1 состоит из всевозможных малых функций (см. [3], а также п. 2), а W_2 – из функций-индикаторов 1_A множеств A , описанных в [2; теорема 1].

Что касается последующего содержания статьи, то оно таково. В п. 2 указаны основные типы требуемых нам цепей Маркова. Теорема 1 из п. 3 содержит условия, обеспечивающие конечность $R(W)$, а с ними условия, позволяющие связать с W некоторое поглощающее множество K_0 (т.е. непустое $K_0 \in \mathcal{B}$, на котором $p(\cdot, K_0) \equiv 1$) и возложить на него роль его аналога из определения параметра сходимости в [3]. В п. 4 речь идет, в основном, о цепях в локально компактных пространствах (точнее, считается выполненным условие (II)). Теорема 2 утверждает, что в широком диапазоне случаев $R_1 = \mathcal{R}$ с $\mathcal{R} = R(\mathcal{C}_0^+)$, где $\mathcal{C}_0^+$ – семейство всех непрерывных в E функций $f \geq 0$ с компактными носителями, кроме $f \equiv 0$. Теорема 3 предлагает условия, влекущие соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [P^n f(x)]^{1/n} = \mathcal{R}^{-1} \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [P^n f(x)]^{1/n} = \mathcal{R}^{-1} \quad (2)$$

с $f \in \mathcal{C}_0^+$, в первом из которых x пробегает E , а во втором – некоторое поглощающее множество. Аналоги этой теоремы при требовании сепарабельности E или при требовании (I) см. в [6] и [7] (отказ от таких условий существен, например, в связи с п. 5). В теореме 4 описано семейство симметричных цепей Маркова, для которых $\mathcal{R}^{-1} = \|P\|$, где P трактуется в подходящем смысле; родственная проблематика ранее затрагивалась лишь для случайных блужданий на некоторых группах [5], [8].

Наконец, в п. 5 показано, как из наших результатов вывести некоторые известные свойства подобных блужданий.

2. Основные условия. За основу взята терминология, типичная для общей теории цепей Маркова (см. [3], [9], [10]) и дополненная для неприводимых цепей согласно [3]. В дальнейшем используются уже введенные обозначения, причем цепь Маркова X с пространством состояний $(E, \mathcal{B})$ считается фиксированной, а σ -алгебра $\mathcal{B}$ – содержащей все одноточечные множества в E . Мы полагаем

$$\mathcal{D}_+ = \{f \in \mathcal{D} : f \geq 0\} \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_+^b = \left\{f \in \mathcal{D}_+ : \sup_E f < \infty\right\}.$$

В семействе $\mathcal{M}$ всех мер на E выделяются подсемейства $\mathcal{M}^*$ и $\mathcal{M}_1$, образованные σ -конечными и вероятностными мерами соответственно. Понятия неприводимой (точнее, η -неприводимой с $\eta \in \mathcal{M}^*$) и аperiodической цепей см. [3], [9].

В работе неоднократно используется

УСЛОВИЕ (I). σ -Алгебра $\mathcal{B}$ счетнопорождена, а цепь X η -неприводима и аperiodична, где η – некоторая мера из $\mathcal{M}^*$.

Привлекая это условие, мы без ограничения общности можем и будем предполагать меру η обладающей следующим свойством максимальности: если $\mu \in \mathcal{M}^*$

цепь X μ -неприводима, то μ абсолютно непрерывна относительно η [3]. При осуществлении (I) назовем функцию $f \in \mathcal{D}_+^b$ *малой*, коль скоро для любой функции $g \in \mathcal{D}_+^b$ с $\eta(g) \equiv \int g d\eta > 0$ найдутся такие $a > 0$ и целое $m \geq 0$, что $f \leq aP^m g$. Сославшись на [3; предложение 2.7] легко установить равносильность этого определения и его аналога из [3].

При наличии топологии в E оказывается полезным

УСЛОВИЕ (II). Пространство E является хаусдорфовым и локально компактным, а $\mathcal{B}$ совпадает с борелевской σ -алгеброй в нем. Цепь X является феллеровской (т.е. P отображает в себя семейство всех ограниченных и непрерывных в E функций) и топологически связной (т.е. $G^\alpha f > 0$ в E при некотором, а значит, и любом $\alpha > 0$ и всех $f \in \mathcal{C}_0^+$; см. [11]).

В дополнение к (II) иногда требуют, чтобы $G^1 f \equiv \infty$, если $f \in \mathcal{C}_0^+$. Последнее свойство присуще всем топологически возвратным цепям Маркова [11].

Оставаясь в рамках условия (II), обозначим $\mathcal{T}_0$ семейство всех непустых открытых множеств $A \subset E_0$ компактными замыканиями. Назовем меру $\mu \in \mathcal{M}$ *локально конечной*, если $\mu(A) < \infty$ для всех $A \in \mathcal{T}_0$ и *регулярной* (в смысле [12]), если

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \subset A, A \text{ компактно}\} = \inf\{\mu(V) : A \subset V, V \text{ открыто}\}$$

для $A \in \mathcal{B}$. Все $\mu \in \mathcal{M}_1$ регулярны, коль скоро E является полным сепарабельным метрическим пространством (см., например, [13], хотя там регулярность меры понимается несколько иначе).

Рассматривая случайные блуждания на группах, вместо (II) будем использовать

УСЛОВИЕ (IIa). Выполняется (II), причем E является локально компактной группой с групповой операцией, записываемой как умножение [12]. Цепь X является правым случайным блужданием на E с регулярным законом μ (иными словами, $p(x, A) = \mu(x^{-1}A)$ для $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, где мера $\mu \in \mathcal{M}_1$ регулярна).

В этом случае феллеровское свойство цепи X следует из остальной части условий (II) и (IIa) [10; упражнение 5.4].

Помимо уже введенных условий, нам потребуется

УСЛОВИЕ (Ia). Пересечение любых поглощающих множеств $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ непусто (и потому является поглощающим множеством).

Это условие вытекает, например, из каждого из условий:

- 1) справедливо (I);
- 2) существуют $c > 0$ и $\mu \in \mathcal{M}_1$ такие, что $\mu(K) \geq c$ для всякого поглощающего $K \subset E$;
- 3) справедливо (II) и при этом меры $p(x, \cdot)$, $x \in E$, регулярны, а функция Pf непрерывна, если $f \in \mathcal{D}_+^b$ и $\{x \in E : f(x) > 0\} \in \mathcal{T}_0$.

Первое из этих условий влечет второе [3; предложение 2.5], а по поводу третьего см. [6; лемма 1.1].

3. Конечность параметра $R(W)$. Всюду в этом пункте мы имеем дело с некоторым семейством $W \subset \mathcal{D}_+^b$, и ясно, что $R(W) \geq 1$ (см. (1)). Помимо конечности $R(W)$ (см. теорему 1), нас будут интересовать и другие обстоятельства, включая связь $R(W)$ с некоторыми характеристиками оператора P (см. предложение 1).

Сначала обсудим несколько определений, первое из которых тесно связано с определением 3.2 из [3]. Множество $K \in \mathcal{B}$ назовем *адаптированным* к W , если оно является поглощающим и на нем $G^\alpha f < \infty$ всякий раз, когда $0 < \alpha < R(W)$ и $f \in W$, а совокупность всех таких множеств обозначим $\mathcal{S}(W)$. Если $K \in \mathcal{S}(W)$, то

$$[R(W)]^{-1} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^n f(x)]^{1/n} \quad (3)$$

для любых $f \in W$ и $x \in K$, так как для этих f и x величина $R(W)$ совпадает с радиусом сходимости степенного ряда

$$\sum_{n \geq 0} \alpha^n P^n f(x), \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

и можно воспользоваться классической формулой Коши–Адамара (в (3), как обычно, положено $\infty^{-1} = 0$).

В дальнейшем W именуется *специальным семейством* или *s-семейством*, если выполнены следующие условия:

- а) $G^\alpha f > 0$ в E для некоторой функции $f \in W$ и какого-либо (а значит, и любого) $\alpha > 0$,
- б) для любых $f, g \in W$ найдутся такие $a > 0$ и $N \geq 1$, что

$$f \leq a(Pg + P^2g + \dots + P^Ng). \quad (5)$$

На самом деле, для такого семейства условие а) применимо с любым $f \in W$, что обусловлено неравенством

$$G^\alpha f \leq a(PG^\alpha g + P^2G^\alpha g + \dots + P^NG^\alpha g) \leq bG^\alpha g, \quad (6)$$

вытекающим из (5) и из неравенства $PG^\alpha g \leq \alpha^{-1}G^\alpha g$ для $g \in W$ и $\alpha > 0$, где $b > 0$ зависит от выбора f, g и α . Из (6) также видно, что при любом выборе $\alpha > 0$ и $x \in E$ либо $G^\alpha f(x) < \infty$, либо $G^\alpha f(x) = \infty$ сразу для всех $f \in W$, коль скоро W является s-семейством.

Если же при любом фиксированном $\alpha > 0$ либо $G^\alpha f < \infty$, либо $G^\alpha f \equiv \infty$ в E одновременно для всех $f \in W$, то W будет именоваться *s₁-семейством*, и в этом случае $E \in \mathcal{S}(W)$. При условии (I) совокупность всех малых функций W_1 является s-семейством (см. [3; предложение 2.7], а при условии возвратности по Харрису цепи X – также и s₁-семейством, и во втором случае $R_1 = R(W_1) = 1$. Менее очевидны следующие примеры.

ПРИМЕР 1. При условии (II) семейство $\mathcal{C}_0^+$ является s-семейством. Действительно, если $g \in \mathcal{C}_0^+$ и $x \in E$, то $P^n g(x) \neq 0$ для бесконечного набора значений $n \geq 1$, так как $P^n G^\alpha g > 0$ при всех n (см. (II)). Поэтому, задав $f \in \mathcal{C}_0^+$, из множеств вида

$$\{x \in E : P^n g(x) > c\}, \quad n \geq 1, \quad c > 0,$$

можно образовать конечное покрытие компактного носителя функции f , и мы получаем (5) с подходящими a и N . Если же выполнено (II) и $G^1 f \equiv \infty$ для $f \in \mathcal{C}_0^+$, то $\mathcal{C}_0^+$ является s₁-семейством и $R(\mathcal{C}_0^+) = 1$.

ПРИМЕР 2. Если реализуется (IIa), то $\mathcal{C}_0^+$ является и s -семейством (см. пример 1), и s_1 -семейством. Чтобы обосновать последнее, допустим, что $G^\alpha f(x) = \infty$ для неких $f \in \mathcal{C}_0^+$, $x \in E$ и $\alpha > 0$, и что поэтому $G^\alpha g(x) = \infty$ для $g \in \mathcal{C}_0^+$ (см. (6)). Тогда $G^\alpha g(yx) = G^\alpha g_y(x) = \infty$ для всех $y \in X$ и указанных g , в чем и следовало убедиться (здесь положено $g_y(z) = g(yz)$ для $z \in E$).

ПРИМЕР 3. Пусть для каждой пары $x, y \in E$ найдутся такие $a > 0$ и $m, k \geq 1$, что $p_m(x, \cdot) \geq ap_k(y, \cdot)$, где $p_m(\cdot, \cdot)$ – переходная вероятность цепи X за m шагов (так обстоит дело, например, если E счетно и все состояния цепи взаимно сообщаются). Тогда всякое s -семейство W является s_1 -семейством. Действительно, если заданы $\alpha > 0$, $f, g \in W$ и $x, y \in E$ и при этом $G^\alpha f(x) < \infty$, то, поочередно рассматривая величины $P^m G^\alpha f(x)$, $P^k G^\alpha f(y)$ и $G^\alpha f(y)$, легко установить их конечность. Поэтому $G^\alpha g(y) < \infty$ (ср. (6)), что и дает требуемое.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняется какое-либо из условий:

- а) справедливо (Ia) и W является s -семейством;
- б) W является s_1 -семейством.

Тогда существует множество $K_0 \in \mathcal{S}(W)$, максимальное в том смысле, что $E \setminus K_0$ не содержит множеств из $\mathcal{S}(W)$. При этом $R(W) < \infty$, если действует условие а) или если, наряду с б), выполнено хотя бы одно из требований:

- б₁) W является s -семейством;
- б₂) для некоторых $f \in W$ и $x \in K_0$ правая часть (3) отлична от 0.

Доказательству теоремы предпосланы три леммы.

ЛЕММА 1. Если W является s - или s_1 -семейством, то таковым же является и $V_1 = W \cup PW$, где PW – образ W при действии P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае s -семейства W следует лишь вывести неравенство вида (5) с подходящими a и N для f и g , совпадающих соответственно либо с Pf_1 и g_1 , либо с f_1 и Pg_1 , либо с Pf_1 и Pg_1 , где $f_1, g_1 \in W$. Нетривиален лишь второй случай, и мы его обсудим. Из (5) с $f = g = g_1$ видно, что $Pg_1 \leq b(P^2g_1 + \dots + P^Mg_1)$ при некоторых $b > 0$ и $M \geq 1$. Учитывая еще и вариант (5) для f_1 и g_1 , получаем неравенство $f_1 \leq c(P^2g_1 + \dots + P^{M_1}g_1)$ с подходящими $c > 0$ и $M_1 \geq 2$, из которого вытекает нужный вариант (5) для f_1 и Pg_1 . В случае же s_1 -семейства W утверждение леммы очевидно ввиду равносильности неравенств $G^\alpha f(x) < \infty$ и $G^\alpha Pf(x) < \infty$ при заданных $f \in W$, $x \in E$ и $\alpha > 0$.

Рассмотрим семейства

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots, \quad \text{где } V_0 = W \quad \text{и} \quad V_{n+1} = V_n \cup PV_n \quad \text{при } n \geq 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если W является s - или s_1 -семейством, то таковым же и каждое из V_n , $n \geq 1$, а с ними и $V_\infty = \bigcup_{n \geq 1} V_n$.

ЛЕММА 2. Для любого s -семейства W найдется такое $\beta \in [1, \infty)$, при котором $G^\beta f \equiv \infty$ для всех $f \in W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $PW \subset W$ (иначе W следовало бы заменить семейством V_∞ из следствия 1). Зададим $f \in W$ и $x \in E$ и найдем $m \geq 1$, при котором

$P^m f(x) > 0$. Записав (5) с $g = Pf$ и подходящими a и N и применив затем оператор P^m , видим, что

$$b \leq a(P^{m+1}f(x) + \dots + P^{m+N}f(x)), \quad \text{где } b = P^m f(x).$$

Следовательно,

$$P^{m_1} f(x) \geq b\gamma^{-1} \quad \text{с } \gamma = aN \quad \text{и некоторым } m_1 \in (m, m+N].$$

Точно так же, но с m , замененным на m_1 , выводим неравенства

$$P^{m_2} f(x) \geq P^{m_1} f(x)\gamma^{-1} \geq b\gamma^{-2} \quad \text{с некоторым } m_2 \in (m_1, m_1+N].$$

Продолжив эту процедуру, найдем натуральные $m_n \geq n$ такие, что $P^{m_n} f(x) \geq b\gamma^{-n}$, а потому и

$$\beta^{m_n} P^{m_n} f(x) \geq b \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^n \geq b,$$

где $n \geq 1$ и $\beta = \max(1, \gamma)$, и, таким образом, $G^\beta f(x) = \infty$.

Сказанное сохранит силу, если x заменить любой другой точкой из E , но оставить прежние a , N , γ и β (могут измениться лишь m , m_n и b). Отсюда $G^\beta f \equiv \infty$ и остается учесть (6).

ЛЕММА 3. Если реализуется условие а) теоремы 1, то существует максимальное $K_o \in \mathcal{S}(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим $f \in W$ и положим $R = R(W)$ (таким образом, $R \geq 1$). Интервал $(0, R)$ содержит последовательность $a_1 < a_2 < \dots$, сходящуюся к R . Множества

$$\widehat{K}_n = \{x \in E : G^{a_n} f(x) < \infty\}, \quad n \geq 1,$$

являются поглощающими (ср. доказательство теоремы 3.2 из [3]) и в силу (6) не зависят от конкретного выбора $f \in W$.

Их пересечение $\widehat{K}$ согласно (Ia) также является поглощающим, поскольку $\widehat{K}_1 \supset \widehat{K}_2 \supset \dots$, и, очевидно, $\widehat{K} \in \mathcal{S}(W)$. Если $K_1 = \widehat{K}$ немаксимально, то найдется множество $K_2 \in \mathcal{S}(W)$, лежащее в $E \setminus K_1$, а если и $K_1 \cup K_2$ немаксимально, то найдется и $K_3 \in \mathcal{S}(W)$, лежащее в $E \setminus (K_1 \cup K_2)$, и т.д. Если процесс выделения множеств K_1, K_2 и т.д. оборвется на каком-то шаге, то за искомым K_o принимается объединение всех выделенных множеств. Выделить же нашим способом бесконечный набор $\{K_n; n \geq 1\}$ невозможно: в противном случае ввиду дизъюнктности этого набора пересечение поглощающих множеств

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots, \quad \text{где } F_n = \bigcup_{i \geq n} K_i,$$

было бы пустым вопреки условию (Ia).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как видно из последнего рассуждения, условие (Ia) допускает существование в E лишь конечных наборов попарно не пересекающихся поглощающих множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. При условии а) теорема вытекает из лемм 2 и 3. При условии б) можно взять $K_0 = E$, а если к тому же действует b_1), то можно вновь применить лемму 2. При осуществлении же б) и b_2) конечность $R(W)$ очевидна (см. (3)), и доказательство завершено.

Теперь вновь появляется семейство $\mathcal{C}_0^+$ из п. 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть условие (II) выполняется наряду с каким-либо из требований: либо справедливо (Ia), либо $\mathcal{C}_0^+$ является s_1 -семейством. Тогда существует максимальное $K_0 \in \mathcal{S}_0$ и при этом $\mathcal{R} \in [1, \infty)$, где $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\mathcal{C}_0^+)$ и $\mathcal{R} = R(\mathcal{C}_0^+)$.

Здесь следует сослаться на теорему 1, так как $\mathcal{C}_0^+$ является s -семейством (см. пример 1) и действует условие b_2) теоремы 1 с $W = \mathcal{C}_0^+$ (см. доказательство леммы 2.2 из [6]).

Данный пункт завершается простым, но полезным предложением 1, в котором предполагается наличие меры $\eta \in \mathcal{M}$ ($\eta \neq 0$), инвариантной для X (таким образом, $\eta(Pf) = \eta(f)$, если $f \in \mathcal{D}_+$). В этой ситуации исходный оператор P отображает семейства $\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{D} : f = 0 \text{ } \eta\text{-почти всюду}\}$ и $\mathcal{D}_2 = \{f \in \mathcal{D} : \eta(f^2) < \infty\}$ в себя, что позволяет с ним стандартным образом связать ограниченный линейный оператор $\tilde{P}$ с нормой $\|\tilde{P}\| \leq 1$, действующий в обычном комплексном пространстве $L_2(\eta)$ (ср. [14; лемма 3]). Впредь о $\tilde{P}$ будем говорить как об операторе P , рассматриваемом в качестве действующего в этом пространстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть η и P имеют только что указанный смысл, и пусть ρ – спектральный радиус оператора P . Если $R = R(W)$ для некоторого непустого семейства $W \subset \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_+$, то

$$R \geq \rho^{-1} \geq \|P\|^{-1}. \quad (7)$$

Если же $R = 1$ (в частности, если цепь X возвратна по Харрису, мера η является мерой неприводимости для X [3] и $W = W_1$), то

$$R = \|P\|^{-1}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе из неравенств (7) хорошо известно [15], а первое почти очевидно: если $0 < \alpha < \rho^{-1}$, то из разложения резольвенты в ряд лорановского типа [15; гл. 8] следует сходимость ряда (4) для некоторых $x \in E$ и $f \in W$, вследствие чего $R \geq \rho^{-1}$. Если же $R = 1$, то (7) влечет (8), так как $\|P\| \leq 1$.

4. О параметре $\mathcal{R} = R(\mathcal{C}_0^+)$. Здесь мы начинаем с обсуждения условий, при которых $\mathcal{R} = R(W_1)$ (см. теорему 2), затем рассматриваем требования, гарантирующие справедливость (2) (см. теорему 3), и, наконец, устанавливаем равенство типа (8) для широкого класса симметричных цепей Маркова (см. теорему 4).

ТЕОРЕМА 2. Пусть E является сепарабельным метрическим пространством и реализуются условия (I) и (II). Тогда $\mathcal{R} = R(W_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $V \in \mathcal{T}_0$ и $f = 1_V$, то согласно условию (I) и теореме 1 из [16] радиус сходимости ряда (4) равен $R(W_1)$ при η -почти всех $x \in E$. Этот вывод переносится и на $f \in \mathcal{C}_0^+$, так как в этом случае $a1_{V_1} \leq f \leq b1_{V_2}$ при некоторых $a, b > 0$ и $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_0$. Поэтому, рассуждая по аналогии с началом доказательства леммы 3, можно найти поглощающее множество $K \subset E$, для точек x которого

радиус сходимости ряда (4) равен $R(W_1)$ при всех $f \in \mathcal{C}_0^+$. С другой стороны, по теореме 1 для точек x некоторого поглощающего множества K_0 тот же ряд имеет радиус сходимости $\mathcal{R}$. Согласно же (I) пересечение $K \cap K_0$ непусто, и теорема доказана.

При осуществлении (II) назовем функцию $f \in \mathcal{C}_0^+$ *сцепленной* с непустым $A \in \mathcal{B}$ (соответственно с $x \in E$) если $P^m f > 0$ на A ($P^m f(x) > 0$) при всех достаточно больших $m \geq 1$. Пример: если $A \in \mathcal{B}$ непусто и $p(\cdot, A) > 0$ на A , то функция 1_A сцеплена с A . Ясно, что при выполнении утверждения теоремы 3 соответствующая функция f обязательно сцеплена со всеми $x \in E$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть условие (II) реализуется вместе с каким-либо из следующих требований:

- а) справедливо (Ia);
- б) $\mathcal{C}_0^+$ является s_1 -семейством.

Пусть, кроме того, некоторая функция $f \in \mathcal{C}_0^+$ сцеплена с непустым открытым $A \subset E$. Тогда применимы соотношения (2), в первом из которых точка x пробегает E , а во втором – любое множество K из $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\mathcal{C}_0^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях а) и б) существует максимальное $K \in \mathcal{S}_0$ (см. следствие 2). Поэтому доказательство сводится к повторению доказательства теоремы 3.1 из [6] с заменой прежнего множества $\tilde{X}$ на K . Чтобы при этом обойтись без прежнего предположения о сепарабельности E , нужно лишь учесть, что каждая точка любого открытого множества $A \subset E$ обладает окрестностью, содержащейся в A вместе с замыканием [17].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть имеет место ситуация, описанная в первой фразе теоремы 3. Пусть функция $f \in \mathcal{C}_0^+$ сцеплена со всеми точками непустого множества $A \in \mathcal{B}$ и найдется мера $\eta_1 \in \mathcal{M}$ такая, что $\eta_1(A) > 0$ и

$$\eta_1(\cdot) \leq ap_m(x, \cdot) \quad (9)$$

при подходящих $a > 0$ и $m \geq 1$ и всех $x \in B$, где $B \in \mathcal{S}_0$. Тогда утверждение теоремы 3 остается в силе.

В самом деле,

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n, \quad \text{где } A_n = \{x \in A : P^j f(x) > 0, j \geq n\}.$$

Поэтому $\eta_1(A_i) > 0$ при некотором $i \geq 1$ и

$$P^{m+j} f(x) \geq \int_{A_i} P^j f(y) p_m(x, dy), \quad \text{если } j \geq i \text{ и } x \in B.$$

Итак, f сцеплена с B , что и дает требуемое.

Теперь, сохраняя условие (II), вернемся к предложению 1. Рассмотрим локально конечную регулярную (см. п. 2) меру $\eta \not\equiv 0$, являющуюся инвариантной для X , и положим $R = \mathcal{R}$. Для всех $f \in \mathcal{C}_0^+$ имеем $\eta(f) > 0$, что обусловлено совпадением $G^\alpha f(x)$ с суммой (4) и соотношениями

$$\eta(f) = (1 - \alpha)\eta(G^\alpha f) > 0, \quad x \in E, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Предложение 1 с $W = \mathcal{C}_0^+$ дает (7), а если $G^1 f \equiv \infty$ для $f \in \mathcal{C}_0^+$, оно же ведет к равенству (8), которое в теореме 4 будет доказано для многих цепей Маркова, симметричных относительно η (напомним, что по определению цепь X симметрична относительно η , коль скоро $\eta(gPf) = \eta(fPg)$ для любых $f, g \in \mathcal{C}_0^+$). Напомним также, что если $\mathcal{C}_0^+$ является s_1 -семейством, то $E \in \mathcal{S}_0$, и, значит, в этом случае упоминание о множестве K в теореме 4 можно изъять, написав, в частности, $x \in E$ вместо $x \in K$. Приложение теоремы 4 можно найти в п. 5.

ТЕОРЕМА 4. 1) Пусть условие (II) осуществляется вместе с каким-либо из требований а) или б) теоремы 3, и при этом цепь X симметрична относительно только что введенной меры η . Пусть для некоторых $A \in \mathcal{T}_0$, $K \in \mathcal{S}_0$ и $x \in K$ можно подобрать $a > 0$ и $m \geq 1$ так, чтобы выполнялось неравенство (9) с мерой $\eta_1 \in \mathcal{M}$, равной следу η_A меры η на A (по определению, $\eta_A(B) = \eta(A \cap B)$ для $B \in \mathcal{B}$). Тогда справедливо равенство (8) с $R = \mathcal{R}$ и оператором P , рассматриваемым как действующий в $L_2(\eta)$.

2) Предыдущая часть теоремы останется в силе, если условие, указанное в ее второй фразе, заменить следующим: для некоторой функции $f \in \mathcal{C}_0^+$ существуют $g \in \mathcal{C}_0^+$, $K \in \mathcal{S}_0$ и $x \in K$ такие, что $P^{2n} f(\cdot) \leq a P^{2n+m} g(x)$ всюду на компактном носителе функции f при подходящих $a > 0$ и $m \geq 0$ и любых $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО базируется на результатах из [14]: в рамках, очерченных в первой фразе теоремы, можно применить к $f \in \mathcal{C}_0^+$ соотношения (1.1) и (1.3), а также лемму 1 и соответствующий вариант леммы 6 из [14] и показать тем самым, что величина $\rho_n = \|P^n f\|^{1/n}$, $n \geq 1$, стремится при $n \rightarrow \infty$ к некоторому $b \geq 0$, не зависящему от выбора f , причем $\|f\|^{-1} \|Pf\| \leq b \leq \|P\|$. Так как линейная оболочка семейства $\mathcal{C}_0^+$ всюду плотна в $L_2(\eta)$ [12; теорема 12.10], то произведение $\|f\|^{-1} \|Pf\|$ за счет выбора f можно сделать сколь угодно близким к $\|P\|$, т.е.

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \|P\|, \quad f \in \mathcal{C}_0^+. \quad (10)$$

Пусть теперь выполняются все условия первой части теоремы. С учетом самосопряженности P и оценки (9) получаем

$$\|P^n f\|^2 = \eta[(P^n f)^2] = \eta(f P^{2n} f) \leq a c P^{2n+m} f(x) \quad (11)$$

при $n \geq 1$, если $f \in \mathcal{C}_0^+$, $f = 0$ вне A и $f \leq c$ на A . Отсюда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^{2n+m} f(x)]^{1/2n} \leq \mathcal{R}^{-1} \quad (12)$$

(см. (3)), что в сочетании с (10) доказывает неравенство $\|P\| \leq \mathcal{R}^{-1}$, влекущее в силу (7) равенство (8) с $R = \mathcal{R}$.

Что касается второй части теоремы, то, работая с соответствующими f и g , можно в основном сохранить рассуждения из предыдущего абзаца, если в (11) и (12) вместо $P^{2n+m} f(x)$ подставить $P^{2n+m} g(x)$ и положить $c = \eta(f)$.

На взгляд автора, было бы интересно выяснить, насколько условия теоремы 4 близки к оптимальным.

5. Случайные блуждания на группах. Здесь показано, насколько легко вывести некоторые известные положения теории случайных блужданий на группах (см. [5], [8] и указанные там ссылки) из вышеизложенного.

Как и в примере 2 из п. 3, далее налагается условие (IIa) и под X понимается правое случайное блуждание на группе E с регулярным законом μ . Вводятся следующие обозначения: e – нейтральный элемент группы E , η – борелевский вариант правой меры Хаара на E [12], μ^n , $n \geq 1$, – сверточные степени меры μ (таким образом, $\mu^1 = \mu$), $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ и $AB = \{xy : x \in A, y \in B\}$ для $A, B \in \mathcal{B}$. Следствие 2 и пример 2 позволяют использовать параметр $\mathcal{R} \in [1, \infty)$, причем $\mathcal{R} = R(W_1)$, коль скоро топология в E обладает счетной базой и применимо условие (I) с теперешней мерой η (для нее свойство максимальности, предполагавшееся в (I), вытекает из ее инвариантности для X [3; предложение 2.4]; по поводу условий метризуемости E (см. [12])). Кстати, упоминавшийся в п. 1 спектральный радиус блуждания X есть не что иное, как $\mathcal{R}^{-1}$.

Для X семейство $\mathcal{C}_0^+$ является s - и s_1 -семейством (см. примеры 1 и 2), так что $E \in \mathcal{S}_0$. Поэтому для X теорема 3 равносильна утверждению: *если функция $f \in \mathcal{C}_0^+$ сцеплена с каким-либо $A \in \mathcal{T}_0$, то $[\mu^n(f)]^{1/n} \rightarrow \mathcal{R}^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$* . При этом, если группа E связна и сепарабельна, а $\mu^m \geq a\eta_V$ с некоторыми $a > 0$ и $m \geq 1$ (ср. (9)), где η_V – след η на некоторой окрестности V точки e , то при подходящем $j \geq 1$ все $f \in \mathcal{C}_0^+$ сцеплены с каждым $A \in \mathcal{T}_0$ для правого случайного блуждания с законом μ^j (см. лемму 4 и замечание к лемме 1 в [18]; с помощью той же леммы 4 легко рассмотреть и случай несвязной группы).

Далее, теорема 4 в рассматриваемой ситуации допускает следующее упрощение: *если мера μ симметрична (т.е. $\mu(A) = \mu(A^{-1})$ для $A \in \mathcal{B}$), то применимо равенство (8) с $R = \mathcal{R}$ и P , трактуемым как оператор, действующий в $L_2(\eta)$* . Для доказательства выберем функцию $f \leq 1$ из $\mathcal{C}_0^+$ и компактное $F \subset E$, вне которого $f = 0$. Множество $F_1 = F^{-1}F$ также компактно, и найдется функция $g \in \mathcal{C}_0^+$ такая, что $g \geq 1$ на F_1 . Поскольку $g(y) \geq f(xy)$, если $x \in F$ и $y \in E$, то для $x \in F$

$$P^{2n}f(x) = \int f(xy)\mu^{2n}(dy) \leq \int g(y)\mu^{2n}(dy) = P^{2n}g(e),$$

и ввиду самосопряженности P наше утверждение следует из второй части теоремы 4 при $a = 1$, $m = 0$, $K = E$ и $x = e$.

Наконец, *если мера μ симметрична, а группа E аменабельна, то $\mathcal{R} = 1$* . Действительно, в этом случае $\|P\| = 1$ [8; теорема 4.19], где P вновь трактуется как оператор в $L_2(\eta)$, и остается воспользоваться только что доказанным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Vere-Jones, “Geometric ergodicity in denumerable Markov chains”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **13**:1 (1962), 7–28.
- [2] R. L. Tweedie, “ R -theory for Markov chains on a general state space. I. Solidarity properties and R -recurrent chains”, *Ann. Probab.*, **2**:5 (1974), 840–864.
- [3] E. Nummelin, *General Irreducible Markov Chains and Non-Negative Operators*, Cambridge Tracts in Math., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
- [4] В. М. Шуренков, *Эргодические процессы Маркова*, Теория вероятностей и математическая статистика, **41**, Наука, М., 1989.
- [5] W. Woess, “Random walks on infinite graphs and groups – a survey on selected topics”, *Bull. London Math. Soc.*, **26**:1 (1994), 1–60.
- [6] М. Г. Шур, “Асимптотические свойства степеней положительных операторов. I”, *ТВП*, **29**:4 (1984), 692–702.

- [7] М. Г. Шур, “Об условии Липшица в сильных предельных теоремах для отношений”, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 927–940.
- [8] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [9] S. Orey, *Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities*, Van Nostrand Reinhold Math. Stud., **34**, Van Nostrand Reinhold Co., London–New York, 1971.
- [10] Д. Ревюз, *Цепи Маркова*, РФФИ, М., 1997.
- [11] А. В. Скороход, “Топологически возвратные цепи Маркова. Эргодические свойства”, *ТВП*, **31**:4 (1986), 641–650.
- [12] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*. Т. 1. *Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп*, Наука, М., 1975.
- [13] К. Парасарати, *Введение в теорию вероятностей и теорию меры*, Мир, М., 1983.
- [14] М. Г. Шур, “Предельные теоремы для отношений, ассоциированных с самосопряженными операторами и симметричными цепями Маркова”, *ТВП*, **45**:2 (2000), 268–288.
- [15] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
- [16] D. B. Pollard, R. L. Tweedie, “ R -theory for Markov chains on a topological state space. II”, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, **34**:4 (1976), 269–278.
- [17] Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология. Учебное пособие для вузов*, Высшая школа, М., 1979.
- [18] М. Г. Шур, “К теореме об асимптотической равномерности сверточных степеней симметричных мер на унимодулярной группе”, *Матем. заметки*, **60**:1 (1996), 120–126.

М. Г. Шур

Московский государственный институт
электроники и математики (технический университет)

Поступило

04.04.2008