Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Лыткин, Разложение по системе сдвигов В-сплайна, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 859–869

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4738>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 07:18:38

Разложение по системе сдвигов В-сплайна

С. М. Лыткин

Предлагается метод приближения функций линейными комбинациями сдвигов фиксированной функции – В-сплайна первой, второй и третьей степени. Этот метод является точным на классах сплайнов соответствующей степени с дефектом 1. Получены оценки сильного типа для норм аппроксимирующих операторов в некоторых пространствах, из которых непосредственно следует, что приближение в этих пространствах совпадает по порядку с наилучшим приближением сплайнами.

Библиография: 8 названий.

Среди различных методов приближения функций существуют методы, точные на некоторых подпространствах функций. Так, например n -е частичные суммы ряда Фурье по ортогональной системе точны на полиномах степени n по этой системе. Тем же свойством обладают неортогональные разложения по системе Фабера–Шаудера (см. [1; с. 217]).

В статье [2] была рассмотрена конечная система всплесков на отрезке $[0, 1]$, состоящая из сдвигов одной функции системы Фабера–Шаудера. Предложенные в статье методы разложения были точны на кусочно-линейных функциях с изломами в точках $k/2^n$, $k = 0, \dots, 2^n$. В статье ставился вопрос о точности приближения функций в различных пространствах.

В данной статье строится линейный аппроксимационный оператор по системе сдвигов В-сплайна, который является точным на некотором классе сплайнов. Из этого свойства сразу следует, что точность приближения в пространствах $C[0, 1]$ и $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет порядок наилучшей точности приближения функций соответствующими сплайнами. Кроме того, применяемый здесь способ разложения обладает свойством локальности: изменение функции на некотором промежутке никак не сказывается на поведении приближающего сплайна при надлежащем удалении от этого промежутка.

Пусть N – фиксированное натуральное число, $0 < m < N$. Перечислим несколько определений, относящихся к сплайнам (см. [3; гл. 1] и [4; гл. 1]).

Сплайном степени $m \geq 1$ с узлами $x_0 < \dots < x_N$ называется непрерывная функция, совпадающая на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, N$, с многочленом степени не выше m .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2787.2008.1).

Если сплайн и все его производные до порядка p включительно непрерывны в узле x_k , $0 \leq k \leq N$, а $(p+1)$ -я производная терпит разрыв, то число $m - p$ называется *дефектом сплайна в точке x_k* ; *дефектом сплайна* называется максимальный из узловых дефектов.

Обозначим

$$w_{m+1}(t) = \prod_{j=0}^{m+1} (t - x_j), \quad x_+^m = x^m \theta(x),$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

В-Сплайн степени m на сетке $x_0, \dots, x_{m+1}$ определяется как (см. [3; с. 19])

$$B^m(x) = (m+1) \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(x_j - x)_+^m}{w'_{m+1}(x_j)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Отметим, что

$$B^m(x) \equiv 0 \quad \text{при } x \notin (x_0, x_{m+1}), \quad B^m(x) > 0 \quad \text{при } x \in (x_0, x_{m+1}),$$

$$\int B^m(x) dx = 1.$$

Кроме того, В-сплайн является сплайном с носителем минимальной длины (в смысле количества отрезков вида $[x_{k-1}, x_k]$) среди всех ненулевых сплайнов степени m дефекта 1 с узлами в точках x_k , $k = 0, \dots, N$.

Ниже будут рассматриваться сплайны степени 1, 2 или 3 дефекта 1 на отрезке $[0, 1]$ с равномерной сеткой, т.е.

$$x_k = kh, \quad k = 0, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Через $\mathcal{S}_m$ обозначим множество сплайнов степени m дефекта 1 на отрезке $[0, 1]$ с узлами в точках kh , $k = 0, \dots, N$. Как известно (см. [4; с. 12]), множество $\mathcal{S}_m$ является линейным пространством размерности $N + m$.

В дальнейшем будут рассматриваться функции из следующих пространств:

- 1) $f \in C[0, 1]$, $\|f\|_C = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$;
- 2) $f \in C^{(k)}[0, 1]$, $k \geq 1$;
- 3) $f \in L_p[0, 1]$, $\|f\|_p = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

Если функция $f \in X$ – некоторому нормированному пространству, а $\mathcal{S}_m \subset X$, то величина

$$E(f) = \inf_{s \in \mathcal{S}_m} \|f - s\|_X$$

называется *наилучшим приближением* функции f подпространством $\mathcal{S}_m$ в пространстве X . Поскольку $\mathcal{S}_m$ конечномерно, существует функция $s_m \in \mathcal{S}_m$, называемая *элементом наилучшего приближения*, такая, что $E(f) = \|f - s_m\|_X$.

Пусть T – линейный оператор из X в $\mathcal{S}_m$, причем для $f \in \mathcal{S}_m$ верно равенство $Tf = f$. Из предыдущих рассуждений получаем оценку через наилучшее приближение для разности $f - Tf$: если выполняется условие

$$\|Tf\|_X \leq C \|f\|_X \quad \text{для всех } f \in X,$$

то

$$\|f - Tf\|_X \leq \|f - s_m\|_X + \|T(f - s_m)\|_X \leq (1 + C)\|f - s_m\|_X = (1 + C)E(f). \quad (2)$$

Если $f \in C^{(k)}[0, 1]$, $0 \leq k < m$, то обозначим

$$E_k(f) = \inf_{s \in \mathcal{S}_m} \|f^{(k)} - s^{(k)}\|_{C[0,1]}.$$

Очевидно, что

$$E_k(f) = \inf_{s \in \mathcal{S}_{m-k}} \|f^{(k)} - s\|_{C[0,1]},$$

а $E_0(f) = E(f)$ при $X = C[0, 1]$. Через $s_k \in \mathcal{S}_m$ обозначим элемент наилучшего приближения, на котором достигается $E_k(f)$:

$$E_k(f) = \|f^{(k)} - s_k^{(k)}\|_{C[0,1]}.$$

Если выполняется оценка

$$\|(Tf)^{(k)}\|_{C[0,1]} \leq C_k \|f^{(k)}\|_{C[0,1]},$$

то аналогично формуле (2), полагая $X = C[0, 1]$, получим

$$\|f^{(k)} - (Tf)^{(k)}\|_C \leq \|f^{(k)} - s_k^{(k)}\|_C + \|(Tf - Ts_k)^{(k)}\|_C \leq (1 + C_k)E_k(f). \quad (3)$$

Пусть теперь $B^m(x)$ – В-сплайн степени m с узлами в точках $-1, \dots, m$. Согласно (1)

$$B^1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } x \in [-1, 1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1, 1]; \end{cases} \quad B^2(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2}, & \text{если } x \in [-1, 0]; \\ \frac{3}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \text{если } x \in [0, 1]; \\ \frac{(x-2)^2}{2}, & \text{если } x \in [1, 2]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1, 2]; \end{cases}$$

$$B^3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - (x-1)^2 + \frac{1}{2}|x-1|^3, & \text{если } x \in [0, 2]; \\ \frac{1}{6}(2 - |x-1|)^3, & \text{если } 1 < |x-1| \leq 2; \\ 0, & \text{если } x \notin [-1, 3]. \end{cases}$$

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ систему функций

$$\{B_k^m(x)\}_{k=1-m}^N = \{B^m(Nx - k)\chi_{[0,1]}(x)\}_{k=1-m}^N. \quad (4)$$

При указанных значениях k функция $B_k^m(x)$ является В-сплайном на сетке jh , $j = k-1, \dots, k+m$. Поэтому (см. [4; с. 46]) эта система является базисом в пространстве $\mathcal{S}_m$ и, следовательно, при надлежащем выборе коэффициентов c_k^m оператор

$$T_m f(x) = \sum_{k=1-m}^N c_k^m(f) B_k^m(x) \quad (5)$$

будет совпадать с функцией $f \in \mathcal{S}_m$.

Пусть сначала $m = 1$. Обозначим

$$\Delta_k = [kh, (k+1)h], \quad k = 0, \dots, N-1.$$

ТЕОРЕМА 1. *Определим коэффициенты c_k^1 , $k = 0, \dots, N$, по любой из следующих формул:*

$$c_k^1 = N \int_{\Delta_{k-1}} f(x) \alpha_1^1(Nx - k) dx, \quad k = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$c_k^1 = N \int_{\Delta_k} f(x) \alpha_2^1(Nx - k) dx, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (7)$$

$$c_k^1 = N \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} f(x) \alpha_3^1(Nx - k) dx, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1^1(x) &= 6x - 2, \quad x \in [0, 1], & \alpha_2^1(x) &= 4 - 6x, \quad x \in [0, 1], \\ \alpha_3^1(x) &= 3B^1(x) - 1, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Пусть $f \in \mathcal{S}_1$, а коэффициенты оператора T_1 вычисляются по одной из формул (6)–(8). Тогда $T_1 f = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть на отрезке Δ_k , $k = 0, \dots, N-1$, функция f имеет вид $f(x) = a_k(x - kh) + b_k$. Вычисление коэффициентов будем проводить по формуле (7). Достаточно показать, что $c_k^1 = b_k$. Действительно,

$$\begin{aligned} c_k^1 &= 6N \int_{\Delta_k} (a_k(x - kh) + b_k) \left(-N(x - kh) + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= -6N^2 a_k \int_0^h x^2 dx - (6N^2 b_k - 4Na_k) \int_0^h x dx + 4b_k \\ &= 2ha_k - 3b_k - 2ha_k + 4b_k = b_k. \end{aligned}$$

Справедливость утверждения теоремы для формул (6) и (8) устанавливается аналогично. Теорема доказана.

Чтобы найти аналогичные формулы для случая параболических сплайнов, воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Будем искать коэффициенты c_k^2 в виде

$$c_k^2 = N \int_{\Delta_k} f(x) \beta \left(Nx - k - \frac{1}{2} \right) dx,$$

где $\beta(x) = Ax^2 + Bx + C$, а A, B, C – неопределенные коэффициенты. Пусть $f \in \mathcal{S}_2$ и на отрезке Δ_k , $k = 0, \dots, N-1$, имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(x - kh - \frac{h}{2} \right) + a_2 \left(x - kh - \frac{h}{2} \right)^2.$$

Подставим это в интеграл:

$$\begin{aligned} c_k^2 &= N \int_{\Delta_k} \left(a_0 + a_1 \left(x - kh - \frac{h}{2} \right) + a_2 \left(x - kh - \frac{h}{2} \right)^2 \right) \\ &\quad \times \left(AN^2 \left(x - kh - \frac{h}{2} \right)^2 + NB \left(x - kh - \frac{h}{2} \right) + C \right) dx \\ &= \left(\left(C + \frac{A}{12} \right) a_0 + \frac{h}{12} B a_1 + h^2 \left(\frac{C}{12} + \frac{A}{80} \right) a_2 \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, если $T_2 f = f$, то нетрудно видеть, что

$$c_k^2 = f(kh) + \frac{h}{2} f'(kh) = \left(a_0 - \frac{h}{2} a_1 + \frac{h^2}{4} a_2 \right) + \frac{h}{2} (a_1 - h a_2).$$

Приравняем коэффициенты при a_0, a_1, a_2 :

$$\begin{cases} C + \frac{A}{12} = 1, \\ B = 0, \\ \frac{C}{12} + \frac{A}{80} = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решением этой системы являются значения $A = -60, B = 0, C = 6$. Формула для вычисления коэффициентов при $k = 0, \dots, N-1$ выглядит так:

$$c_k^2 = N \int_{\Delta_k} f(x) \alpha_0^2 \left(Nx - k - \frac{1}{2} \right) dx, \quad \alpha_0^2(x) = 6 - 60x^2, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (9)$$

Для вычисления k -го коэффициента можно интегрировать не только по отрезку Δ_k , но и по любому из двух соседних. Проводя аналогичные выкладки, можно получить формулы для оставшихся коэффициентов:

$$c_N^2 = N \int_{\Delta_{N-1}} f(x) \alpha_1^2(Nx - N + 1) dx, \quad (10)$$

$$\alpha_1^2(x) = 120x^2 - 108x + 15, \quad x \in [0, 1],$$

$$c_{-1}^2 = N \int_{\Delta_0} f(x) \alpha_2^2(Nx - 1) dx, \quad (11)$$

$$\alpha_2^2(x) = 120x^2 + 108x + 15, \quad x \in [-1, 0].$$

Точно таким же способом можно отыскивать интегральные формулы для коэффициентов оператора T_3 . Пусть, например,

$$c_{k-1}^3 = N \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} f(x) \gamma(Nx - k) dx, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

где $\gamma(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$. Используя рассуждения, аналогичные изложенным выше, получим систему линейных уравнений на коэффициенты A, B, C, D, E , решением которой являются значения

$$A = \frac{105}{2}, \quad B = D = 0, \quad C = -\frac{195}{4}, \quad E = \frac{25}{4}.$$

Иными словами, при $k = 1, \dots, N - 1$

$$c_{k-1}^3 = N \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} f(x) \alpha_0^3(Nx - k) dx, \quad \alpha_0^3(x) = \frac{105}{2}x^4 - \frac{195}{4}x^2 + \frac{25}{4}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (12)$$

Формулы для остальных коэффициентов, в которых интегрирование ведется по крайним отрезкам, выглядят так:

$$c_N^3 = N \int_{\Delta_{N-1}} f(x) \alpha_1^3\left(Nx - N + \frac{1}{2}\right) dx, \quad (13)$$

$$\alpha_1^3(x) = 4620x^3 + 330x^2 - 675x - \frac{53}{2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$c_{N-1}^3 = N \int_{\Delta_{N-1}} f(x) \alpha_2^3\left(Nx - N + \frac{1}{2}\right) dx, \quad (14)$$

$$\alpha_2^3(x) = -1260x^3 - 30x^2 + 195x + \frac{7}{2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$c_{-1}^3 = N \int_{\Delta_0} f(x) \alpha_3^3\left(Nx - \frac{1}{2}\right) dx, \quad (15)$$

$$\alpha_3^3(x) = 1260x^3 - 30x^2 - 195x + \frac{7}{2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right];$$

$$c_{-2}^3 = N \int_{\Delta_0} f(x) \alpha_4^3\left(Nx - \frac{1}{2}\right) dx, \quad (16)$$

$$\alpha_4^3(x) = -4620x^3 + 330x^2 + 675x - \frac{53}{2}, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \mathcal{S}_m$, $m = 2, 3$, а коэффициенты оператора T_m вычисляются по формулам (9)–(11) при $m = 2$ или по формулам (12)–(16) при $m = 3$. Тогда $T_m f = f$.

Итак, построен линейный оператор T_m со следующими свойствами.

СВОЙСТВО 1. Оператор T_m имеет вид (5), его коэффициенты $c_k^m(f)$ являются линейными функционалами.

СВОЙСТВО 2. Выполнено равенство $T_m f = f$ при $f \in \mathcal{S}_m$, $m = 1, 2, 3$.

СВОЙСТВО 3. Оператор является локальным, т.е. поведение $T_m f$ в какой-либо области зависит от поведения функции f в окрестности этой области.

СВОЙСТВО 4. Функционалы $c_k(f)$ определяются с помощью интегралов по формулам (6)–(8), (9)–(11), (12)–(16), что позволяет применять оператор к интегрируемым функциям, а также делает метод более устойчивым к измерительным и вычислительным ошибкам.

Надо сказать, что построение похожих конструкций с выполнением некоторых из свойств 1–4 уже проводилось. Так, в статье [5] рассматривается приближение кубическими сплайнами, аналогичное (5), только коэффициенты $c_k(f)$ вычисляются по значениям функции f или ее производных в точках. В работах [6], [7] также

исследуется оператор вида (5), причем функционалы $c_k(f)$ подбираются так, что оператор является точным на классе многочленов определенной степени (что является более слабым требованием, чем свойство 2). В [6] также указывается способ определения функционалов с помощью интегралов от произведения функции на соответствующие ортогональные многочлены с некоторым весом. Приближение интерполяционными в среднем сплайнами, при котором аппроксимирующий сплайн определяется по средним значениям функции в окрестностях узлов сетки, описывается в [8]. Во всех перечисленных статьях приводятся оценки погрешности построенной сплайн-аппроксимации для гладких функций через модули непрерывности приближаемой функции или ее производных. В тех случаях, когда имеет место свойство типа 4, эти оценки проводятся и для интегрируемых функций через интегральные модули непрерывности.

Если применять оператор T_m к 1-периодическим функциям, то под пространством $\mathcal{S}_n$ следует понимать множество периодических сплайнов степени m на равномерной сетке. Согласно [4; с. 47] система $\{B_k^m(x)\}_{k=0}^{N-1}$, которая получается из исходной системы (4) путем отождествления “крайних” функций, является базисом этого пространства. Будем считать, что все коэффициенты c_k^m , $k = 0, \dots, N-1$, оператора T_m , применяемого к периодической функции, вычисляются при $m = 1, 2, 3$ по формулам (8), (9), (12) соответственно; при этом продолжение всех подынтегральных функций вне отрезка $[0, 1]$ понимается периодическим. В общем случае для определения крайних коэффициентов придется задействовать остальные формулы. Ниже будет приведен ряд оценок сильного типа для оператора T_m в периодическом случае, некоторые из которых являются точными. Аналогичным образом в общем случае доказываются те же самые оценки, но с увеличенными константами, что связано с большей погрешностью формул для вычисления крайних коэффициентов.

Обозначим $\alpha^1 = \alpha_3^1$, $\alpha^2 = \alpha_0^2$, $\alpha^3 = \alpha_0^3$. Также условимся, что

$$\|\alpha^1\|_q = \|\alpha^1\|_{L_q(-1,1)}, \quad \|\alpha^2\|_q = \|\alpha^2\|_{L_q(-1/2,1/2)}, \quad \|\alpha^3\|_q = \|\alpha^3\|_{L_q(-1,1)},$$

где $1 \leq q \leq \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Для всех $f \in C[0, 1]$ выполнено

$$\|T_m f\|_C = \|\alpha^m\|_1 \|f\|_C. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\sum_{k=1-m}^N B_k^m(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad B_k^m(x) \geq 0,$$

то

$$|T_m f(x)| = \left| \sum_{k=1-m}^N c_k B_k^m(x) \right| \leq \max_{1-m \leq k \leq N} |c_k| \sum_{k=1-m}^N B_k^m(x) = \max_{1-m \leq k \leq N} |c_k|.$$

Из явного вида формул (7), (9), (12) нетрудно получить, что коэффициенты c_k^m , $k = 0, \dots, N-1$, оцениваются как

$$c_k^m \leq \|f\|_{C(\Delta_k)} \|\alpha^m\|_1 \leq \|\alpha^m\|_1 \|f\|_C.$$

Нетрудно видеть, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f \in C[0, 1]$, $\|f\|_C = 1$, что

$$c_k^m(f) = \|\alpha^m\|_1 - \varepsilon \quad \text{для } k = 0, \dots, m+1.$$

Тогда при $x \in \Delta_{m-1}$ имеем $T_m f(x) = \|\alpha^m\|_1 - \varepsilon$. Это означает, что оценка (17) является точной. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|\alpha^1\|_1 = \frac{5}{3}, \quad \|\alpha^2\|_1 = \frac{16}{\sqrt{10}} - 1.$$

Теорема доказана.

Подставляя оценку (17) в (2) с $X = C[0, 1]$, получим

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in C[0, 1]$. Тогда

$$\|f - T_m f\|_C \leq (\|\alpha^m\|_1 + 1)E(f).$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\|T_m f\|_p \leq C_p^m \|f\|_p, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (18)$$

$$C_p^1 = 2^{1/p} \|\alpha^1\|_q = 2 \left(\frac{1 + 2^{q+1}}{3(q+1)} \right)^{1/q}, \quad C_p^2 = \|\alpha^2\|_q, \quad C_p^3 = 2^{1/p} \|\alpha^3\|_q. \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p < \infty$. Функция $|x|^p$ является выпуклой при $x \in (-\infty, \infty)$. Используя неравенство Йенсена, получим

$$\begin{aligned} \|T_m f\|_{L_p[0,1]}^p &= \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{N-1} c_k^m B_k^m(x) \right|^p dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} \left| \sum_{j=k+1-m}^{k+1} c_j^m B_j^m(x) \right|^p dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\Delta_k} \left(\sum_{j=k+1-m}^{k+1} |c_j^m|^p B_j^m(x) \right) dx \leq h \sum_{k=0}^{N-1} |c_k^m|^p. \end{aligned} \quad (20)$$

Для $m = 2$ коэффициенты c_k^m , $k = 0, \dots, N-1$, оцениваются с помощью неравенства Гёльдера как

$$|c_k^2| \leq N \|f\|_{L_p((k-1)h, (k+1)h)} \|\alpha^2\|_{L_q(\Delta_k)} = h^{-1/p} \|f\|_{L_p(\Delta_k)} \|\alpha^2\|_q. \quad (21)$$

При $m = 1, 3$

$$|c_k^m| \leq N \|f\|_{L_p((k-1)h, (k+1)h)} \|\alpha^m\|_{L_q((k-1)h, (k+1)h)} = h^{-1/p} \|f\|_{L_p((k-1)h, (k+1)h)} \|\alpha^m\|_q. \quad (22)$$

Подставляя оценки (21) и (22) в (20), приходим к оценке (18) с константами (19). Аналогичным образом, рассмотрение случая $p = 1$ приводит к оценкам

$$C_1^1 = \|\alpha^1\|_\infty = 4, \quad C_1^2 = \|\alpha^2\|_\infty = 9, \quad C_1^3 = 2\|\alpha^3\|_\infty = 20.$$

Если $f \in L_\infty[0, 1]$, то, поскольку $T_m f \in C[0, 1]$, $\|T_1 f\|$ оценивается так же, как и в непрерывном случае:

$$\|T_m f\|_\infty = \|T_m f\|_C \leq \|\alpha^m\|_1 \|f\|_\infty.$$

Величина C_p^m с точностью до множителя совпадает с нормой функции α^m в L_q . С помощью неравенства Гёльдера нетрудно установить, что при $p > r$ выполнено $C_p^m < C_r^m$. Отсюда получаем, что

$$C_p^1 < C_1^1 = 4, \quad C_p^2 < C_1^2 = 9, \quad C_p^3 < C_1^3 = 20.$$

Заметим, что константа C_p^2 является неулучшаемой. Для доказательства достаточно подобрать функцию f так, чтобы все коэффициенты c_k^2 совпадали, а неравенство (21) (или (22)) обращалось в равенство. При $p = 1$, взяв δ -образную последовательность $f_\varepsilon \in L_1[0, 1]$, получим, что $\|T_2 f\|_1 \geq (C_1^2 - \varepsilon)\|f_\varepsilon\|_1$ для любого $\varepsilon > 0$.

Для $m = 1, 3$ оценка (18), вообще говоря, не является точной, поскольку в этих случаях интегрирование происходит не по одному, а сразу по двум соседним отрезкам. Теорема доказана.

Подставляя оценку (18) в (2) с $X = L_p[0, 1]$, получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда

$$\|f - T_m f\|_p \leq (C_p^m + 1)E(f).$$

Выпишем вторые производные кубического В-сплайна в узлах

$$(B^3)''(0) = (B^3)''(2) = 1, \quad (B^3)''(1) = -2.$$

Следовательно, при $k = 1, \dots, N + 1$ верно равенство

$$\begin{aligned} |(T_3 f)''((k-1)h)| &= N^2 |c_{k-1}(B^3)''(2) + c_k(B^3)''(1) + c_{k+1}(B^3)''(0)| \\ &= N^2 |c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}|. \end{aligned} \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in C^1[0, 1]$, тогда

$$\|(T_2 f)'\|_C \leq \|\alpha^2\|_1 \|f'\|_C, \quad \|(T_3 f)'\|_C \leq \|\alpha^3\|_1 (\|f'\|_C + 2\omega_{f'}(h)). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $(T_2 f)'(x)$ является линейной при $x \in \Delta_k$, $k = 0, \dots, N - 1$, то

$$|(T_2 f)'(x)| \leq \max\{|(T_2 f)'(kh)|, |(T_2 f)'((k+1)h)|\} = N \max\{|c_k - c_{k-1}|, |c_{k+1} - c_k|\}.$$

Каждая из двух величин, по которым берется максимум, оценивается одинаковым образом. Например, для первой из них имеем

$$\begin{aligned} N|c_k - c_{k-1}| &= N^2 \left| \int_{\Delta_k} (f(t) - f(t-h)) \alpha^2 \left(Nx - k - \frac{1}{2} \right) dt \right| \\ &\leq N \int_{\Delta_k} |f'(\xi)| \left| \alpha^2 \left(Nx - k - \frac{1}{2} \right) \right| dt \leq \|f'\|_{C[0,1]} \|\alpha^2\|_1 \end{aligned}$$

(здесь $\xi \in [(k-1)h, (k+1)h]$).

Функция $(T_3 f)'(x)$ является квадратичной при $x \in \Delta_k$, $k = 0, \dots, N - 1$, поэтому ее модуль оценивается как

$$\begin{aligned} |(T_3 f)'(x)| &\leq \max\{|(T_3 f)'(kh)|, |(T_3 f)'((k+1)h)|, |(T_3 f)'(kh) + (T_3 f)''(kh)(x - kh)|\} \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq N} (|(T_3 f)'(kh)| + h|(T_3 f)''(kh)|). \end{aligned}$$

Используя равенства $(B^3)'(0) = 1/2$, $(B^3)'(1) = 0$, $(B^3)'(2) = -1/2$, получаем при $k = 1, \dots, N+1$

$$\begin{aligned} |(T_3 f)'((k-1)h)| &= N|c_{k-1}(B^3)'(2) + c_{k+1}(B^3)'(0)| = \frac{N}{2}|c_{k+1} - c_{k-1}| \\ &= \frac{N^2}{2} \left| \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} (f(t+h) - f(t-h))\alpha^3(Nx-k) dt \right| \\ &\leq N \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} |f'(\xi)\alpha^3(Nx-k)| dt \leq \|\alpha^3\|_1 \|f'\|_C \end{aligned}$$

(здесь $\xi \in [(k-2)h, (k+2)h]$).

Для значений второй производной оператора в тех же точках, используя (23), имеем

$$\begin{aligned} |(T_3 f)''((k-1)h)| &= N^3 \left| \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} (f(t+h) - 2f(t) + f(t-h))\alpha^3(Nt-k) dt \right| \\ &\leq N^2 \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} |(f'(\xi) - f'(\eta))\alpha^3(Nt-k)| dt \leq N\omega_{f'}(2h)\|\alpha^3\|_1, \end{aligned}$$

так как по формуле Лагранжа $f(t+h) - f(t) = hf'(\xi)$, $f(t-h) - f(t) = -hf'(\eta)$, $\xi \in [t, t+h]$, $\eta \in [t-h, t]$. Теорема доказана.

Подставляя первую из оценок (24) в (3), получим

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in C^1[0, 1]$. Тогда

$$\|f' - (T_2 f)'\|_C \leq (\|\alpha^2\|_1 + 1)E_1(f).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f \in C^2[0, 1]$, тогда

$$\|(T_3 f)''\|_C \leq \|\alpha^3\|_1 \|f''\|_C. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $x \in \Delta_k$, $k = 0, \dots, N-1$, функция $(T_3 f)''$ является линейной и поэтому

$$|(T_3 f)''(x)| \leq \max\{|(T_3 f)''(kh)|, |(T_3 f)''((k+1)h)|\}.$$

По формуле (23) для $k = 1, \dots, N+1$ получим

$$\begin{aligned} |(T_3 f)''((k-1)h)| &= N^3 \left| \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} (f(t+h) - 2f(t) + f(t-h))\alpha^3(Nt-k) dt \right| \\ &= \frac{N}{2} \left| \int_{(k-1)h}^{(k+1)h} (f''(\xi) + f''(\eta))\alpha^3(Nt-k) dt \right| \leq \|\alpha^3\|_1 \|f''\|_C \end{aligned}$$

(точки ξ и $\eta \in [0, 1]$). Теорема доказана.

Используя (25) и оценку (3), получим

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f \in C^2[0, 1]$. Тогда

$$\|f'' - (T_3 f)''\|_C \leq (\|\alpha^3\|_1 + 1)E_2(f).$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $f \in C^{(m)}[0, 1]$, $m = 1, 2, 3$. Тогда при $k = 0, \dots, N - 1$

$$\|f^{(m)} - (T_m f)^{(m)}\|_{C((kh, (k+1)h))} \leq C_m \omega_{f^{(m)}}(h),$$

где

$$C_1 = \frac{8}{3}, \quad C_2 = \frac{41}{5}, \quad C_3 = 25.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 1$ при $x \in (kh, (k+1)h)$, $k = 0, \dots, N - 1$, имеем

$$\begin{aligned} |f'(x) - (T_1 f)'(x)| &= |f'(x) - f'((k+1)h) + f'((k+1)h) - N(c_{k+1}^1 - c_k^1)| \\ &\leq |f'(x) - f'((k+1)h)| \\ &\quad + N \left| \int_{\Delta_k} f'((k+1)h) \alpha^1(Nt - k) dt \right. \\ &\quad \left. - N \int_{\Delta_k} (f(t+h) - f(t)) \alpha^1(Nt - k) dt \right| \\ &\leq \omega_{f'}(h) + N \left| \int_{\Delta_k} (f'((k+1)h) - f'(\xi)) \alpha^1(Nt - k) dt \right| \\ &\leq \frac{8}{3} \omega_{f'}(h), \quad \text{где } \xi \in [kh, (k+2)h]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя формулу Лагранжа и явное представление функции $(T_m f)^{(m)}$ на интервале $(kh, (k+1)h)$, $k = 0, \dots, N - 1$, доказывается утверждение теоремы при $m = 2, 3$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Наука, М., 1984.
- [2] Т. П. Лукашенко, “О новых системах разложения и их свойствах”, *Чебышевский сб.*, **5:2** (2004), 66–82.
- [3] Ю. С. Завьялов, Б. С. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, М., 1980.
- [4] Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения*, Наука, М., 1984.
- [5] А. И. Гребенников, “Об одном методе построения интерполяционных кубических и бикубических сплайнов на равномерных сетках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем., кибернет.*, 1978, № 4, 12–17.
- [6] T. Lyche, L. L. Schumaker, “Local spline approximation methods”, *J. Approx. Theory*, **15:4** (1975), 294–325.
- [7] C. de Boor, G. J. Fix, “Spline approximation by quasiinterpolants”, *J. Approx. Theory*, **8:1** (1973), 19–45.
- [8] Ю. Н. Субботин, “Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны”, *Приближение функций и операторов*, Тр. МИАН, **138**, Наука, М., 1975, 118–173.

С. М. Лыткин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sergem1@rambler.ru

Поступило

03.04.2008

Исправленный вариант

13.04.2009