Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Эконофизика и квантовая статистика, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 883–891

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:38:45

ЭКОНОФИЗИКА И КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА

В. П. Маслов

В статье вводятся понятия энтропии, температуры, свободной энергии и гамильтониана в задачах теории вероятностей для тождественных объектов так, чтобы можно было применить новейшие методы квантовой статистики к финансовым задачам.

Библиография: 7 названий.

В настоящее время в экономике зародилось новое течение, так называемая эконофизика. Дело в том, что ученые стали интуитивно чувствовать аналогии между термодинамикой и экономикой. Для понимания концепций эконофизики, как нам кажется, важно прежде всего обратиться к теории вероятностей и попытаться ввести там некоторые общие понятия, которые в частности приводили бы к термодинамическим законам, и объекты, которые позволяли бы рассматривать в едином ключе квантовую статистику и математическую статистику. Ниже мы введем понятие энтропии и гамильтониана для стандартных задач теории вероятностей.

Рассмотрим случайную величину Y

$$Y_{N, \{K_i\}} = \sum_{i=1}^n x_i K_i, \quad \sum_{i=1}^n K_i = N, \quad (1)$$

где K_i – положительные целые числа, а x_i – значения случайной величины X , и введем *энтропию Больцмана* как случайную величину, принимающую значения

$$S_{N, \{K_i\}} = \ln \left\{ \frac{N! \prod_{i=1}^n g_i^{K_i}}{\prod_{i=1}^n K_i!} \right\}, \quad (2)$$

где g_i – целые числа, $\sum_{i=1}^n g_i = M$, g_i/M – вероятности значений x_i случайной величины X . Пусть $P_{N, \{K_i\}}$ – произвольные вероятности, отвечающие случайной величине Y , и $\sum P_{N, \{K_i\}} = 1$; суммы здесь и далее берутся по всем $\{K_i\}$ таким, что $\sum K_i = N$.

Мы определим случайную величину S называемую *энтропией*: значения S_i определяются как экстремумы математического ожидания энтропии Больцмана по всем $P_{N, \{K_i\}}$ при условии, что математическое ожидание случайной величины Y равно константе. С точностью до нормировки вероятности, отвечающие этим значениям, равны всевозможным математическим ожиданиям $S_{N, \{K_i\}}$ по соответствующим экстремальным значениям $P_{N, \{K_i\}}$.

Аналогично, полагая $\mathcal{M}(S) = \text{const}$, ищем экстремумы $\mathcal{M}(Y)$. Случайную величину, принимающую эти значения с соответствующими вероятностями, будем называть *внутренней энергией*.

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, получим экстремум математического ожидания величины

$$F(\theta) = Y - \theta S, \quad (3)$$

где множитель Лагранжа θ называется *температурой*.

Точки экстремума математического ожидания величины $F(\theta)$ (3) в общем положении могут быть пронумерованы мультииндексом $l = (l_1, \dots, l_n)$, l_α — целые числа, для которых выполняется условие $\sum_{\alpha=1}^n l_\alpha = N$. Эти экстремумы имеют вид

$$\sqrt{P}_{N\{K\}} = \prod_{\alpha=1}^n \delta_{K_\alpha l_\alpha}, \quad f^l(\theta) = Y_l - \theta S_l \quad (4)$$

и называются *значениями свободной энергии*.

ТЕОРЕМА 1. *Выполняется соотношение*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\min_l f^l(\theta)}{N} \right) = -\theta \ln \left(\sum_{\alpha=1}^n g_\alpha e^{-x_\alpha/\theta} \right), \quad (5)$$

где $\min_l$ обозначает минимальное из всех значений (4) при фиксированном θ .

Пусть далее I — подмножество набора чисел $\alpha = 1, 2, \dots, n$, не равное всему набору. Рассмотрим целое число $C > 0$ такое, что существует хотя бы один мультииндекс K , удовлетворяющий условиям

$$K_\alpha = 0, \quad \text{если } \alpha \in I, \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha \notin I} |K_\alpha - K_\alpha^I(\theta)| < C, \quad (7)$$

где числа $K_\alpha^I(\theta)$ имеют вид

$$K_\alpha^I(\theta) = \frac{e^{-x_\alpha/\theta}}{\sum_{\beta \notin I} e^{-x_\beta/\theta}} N, \quad \text{если } \alpha \notin I, \quad (8)$$

$$K_\alpha^I(\theta) = 0, \quad \text{если } \alpha \in I.$$

Будем говорить, что те значения из $f^l(\theta)$ вида (4), для которых выполняются условия (6) и (7), принадлежат $\{C, I\}$ -окрестности. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Для значений $f^l(\theta)$, принадлежащих $\{C, I\}$ -окрестности, справедливо неравенство

$$f^l(\theta) \geq -N\theta \ln \left(\sum_{\alpha \notin I} g_\alpha e^{-x_\alpha/\theta} \right). \quad (9)$$

Правую часть неравенства (9) будем называть *предельной точкой свободной энергии*.

Рассмотрим задачу о нахождении экстремальных значений математического ожидания $\mathcal{M}(Y)$ случайной величины Y при дополнительном условии

$$\mathcal{M}(S) = S_0, \quad (10)$$

где S_0 – постоянная, $\mathcal{M}(S)$ – математическое ожидание больцмановской энтропии $S_{N, \{K_i\}}$. Эта задача легко решается методом Лагранжа. Каждой паре мультииндексов l и m таких, что $S_{N, \{m\}} \leq S_0 \leq S_{N, \{l\}}$, соответствует экстремальное значение

$$\tilde{Y}_{\{l\}, \{m\}} = Y_{N, \{m\}} \frac{S_{N, \{l\}} - S_0}{S_{N, \{l\}} - S_{N, \{m\}}} + Y_{N, \{l\}} \frac{S_0 - S_{N, \{m\}}}{S_{N, \{l\}} - S_{N, \{m\}}}, \quad (11)$$

соответствующие полуплотности имеют вид

$$\sqrt{P}_{N, \{K\}} = \delta_{\{K\}, \{m\}} \sqrt{\frac{S_{N, \{l\}} - S_0}{S_{N, \{l\}} - S_{N, \{m\}}}} + \delta_{\{K\}, \{l\}} \sqrt{\frac{S_0 - S_{N, \{m\}}}{S_{N, \{l\}} - S_{N, \{m\}}}} \quad (12)$$

и соответствующее значение множителя Лагранжа

$$\theta_{\{l\}, \{m\}} = \frac{Y_{N, \{l\}} - Y_{N, \{m\}}}{S_{N, \{l\}} - S_{N, \{m\}}}. \quad (13)$$

Пусть $\{l\}$ и $\{m\}$ – мультииндексы, для которых выполнено условие (6) для некоторого I . Будем говорить, что соответствующие значения (11) *лежат в I -окрестности*. При $N \rightarrow \infty$, $S_0/N \rightarrow S_0 = \text{const}$ существуют пределы $\tilde{Y}_I(S_0) = \lim(\min \tilde{Y})$ и $\theta_I(S_0) = \lim \tilde{\theta}$, где $\min \tilde{Y}$ – минимальное из всех значений (11), принадлежащих I -окрестности, $\tilde{\theta}$ – множитель Лагранжа, соответствующий минимальному из принадлежащих I -окрестности значению (11).

Справедлива

ТЕОРЕМА 3. 1) Имеет место равенство $\tilde{Y}_I(S_0) - \theta_I(S_0)S_0 = f_I(\theta_I(S_0))$, где $f_I(\theta)$ – функция θ и I такая, что $Nf_I(\theta)$ совпадает с предельной точкой, определяемой правой частью неравенства (9).

2) Функция $\theta_I(S)$ имеет обратную функцию $S_I(\theta)$, причем

$$S_I(\theta) = -\frac{\partial F_I(\theta)}{\partial \theta}, \quad (14)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} S_I(\theta) = 0. \quad (15)$$

Формула (14) известна в термодинамике, где выражает энтропию через свободную энергию, а (15) совпадает с утверждением теоремы Нернста о стремлении энтропии к нулю при стремлении к нулю температуры.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу о нахождении экстремумов математического ожидания $\mathcal{M}(S)$ при дополнительном условии

$$\mathcal{M}(Y) = Y_0, \quad (16)$$

где Y_0 – постоянная. Экстремальные значения математического ожидания $\mathcal{M}(S)$ имеют вид

$$\tilde{S}_{\{l\},\{m\}} = S_{N,\{m\}} \frac{Y_{N,\{l\}} - Y_0}{Y_{N,\{l\}} - Y_{N,\{m\}}} + S_{N,\{l\}} \frac{Y_0 - Y_{N,\{m\}}}{Y_{N,\{l\}} - Y_{N,\{m\}}}, \quad (17)$$

где $\{l\}, \{m\}$ – мультииндексы такие, что $Y_{N,\{m\}} \leq Y_0 \leq Y_{N,\{l\}}$, соответствующие полуплотности и множитель Лагранжа имеют вид

$$\sqrt{P}_{N,\{K\}} = \delta_{\{K\},\{m\}} \sqrt{\frac{Y_{N,\{l\}} - Y_0}{Y_{N,\{l\}} - Y_{N,\{m\}}}} + \delta_{\{K\},\{l\}} \sqrt{\frac{Y_0 - Y_{N,\{m\}}}{Y_{N,\{l\}} - Y_{N,\{m\}}}}, \quad (18)$$

$$\beta_{\{l\},\{m\}} = \frac{S_{N,\{l\}} - S_{N,\{m\}}}{Y_{N,\{l\}} - Y_{N,\{m\}}}. \quad (19)$$

Будем говорить, что значение $\tilde{S}_{\{l\},\{m\}}$ вида (17) лежит в I -полуплоскости, если для мультииндексов $\{l\}$ и $\{m\}$ выполнено условие (6). При $N \rightarrow \infty$, $Y_0/N \rightarrow \varepsilon_0 = \text{const}$ существуют пределы $\tilde{S} = \tilde{S}_I(\varepsilon_0)$ и $\theta_I(\varepsilon_0) = \lim 1/\tilde{\beta}$, где $\max \tilde{S}$ – максимальное из всех значений (17), принадлежащих I -окрестности, а $\tilde{\beta}$ – соответствующее $\max \tilde{S}$ значение множителя Лагранжа (19). Имеет место

ТЕОРЕМА 4. 1) Выполнено равенство $\varepsilon_0 - \theta_I(\varepsilon_0)\tilde{S}_I(\varepsilon_0) = f_I(\theta(\varepsilon_0))$.

2) Выполнено равенство $\tilde{S}'_I(\varepsilon_0) = 1/\theta_I(\varepsilon_0)$.

3) Функция $\theta_I(\varepsilon_0)$ имеет обратную функцию $\mathcal{E}_I(\theta)$, причем справедливо равенство $\tilde{S}_I(\mathcal{E}_I(\theta)) = S_I(\theta)$.

Таким образом, мы нашли свободную энергию, внутреннюю энергию и энтропию как случайные величины со значениями такими, что предельные точки, индуцируемые предельной точкой свободной энергии, совпадают с термодинамикой в квантовой статистике [1]. Это простейший случай квантования этих переменных, т.е. квантования термодинамики, если случайная величина X ассоциируется с самосопряженным гамильтонианом $\hat{H}$, а ее значения ассоциируются с собственными значениями $\hat{H}$. В нашем случае независимые испытания соответствуют элементам Гиббсовского ансамбля. Предельные точки соответствуют метастабильным состояниям неравновесной термодинамики, в частности, таким как сверхтекучесть и сверхпроводимость [2]. Метод решения таких задач – это метод ультратретичного квантования [3].

Рассмотрим ситуацию, когда соответствующая значению случайной величины x_j вероятность есть

$$p_j = g_i/M$$

Схема сопоставления вероятностной задаче гильбертова пространства и оператора состоит в следующем. Пусть в серии из N испытаний случайная величина X имеет n значений $x_1, \dots, x_n$, гильбертово пространство для одного испытания есть C^{nM} , а оператор $\hat{H}_1$ задается матрицей размера $nM \times nM$, у которой на главной диагонали стоят числа $x_1, \dots, x_n$, повторенные $g_1, \dots, g_n$ раз (то есть кратности x_i равны g_i), а остальные элементы равны 0. Обозначим через l_k , $k = 1, \dots, n$, его собственные векторы. Гильбертово пространство, отвечающее серии из N испытаний, в этом случае есть C^{nN} , а гамильтониан $\hat{H}_N$ выражается через $\hat{H}_1$ по формуле

$$\hat{H}_N = \sum_{s=1}^N \hat{E} \otimes \dots \otimes \hat{E} \otimes \hat{H}_1 \otimes \hat{E} \otimes \dots \otimes E, \quad (20)$$

где $\hat{E}$ – единичный оператор в пространстве C^n , каждое слагаемое представляет собой тензорное произведение $N - 1$ операторов $\hat{E}$ и оператора $\hat{H}_1$, причем в слагаемом с номером s оператор $\hat{H}_1$ в произведении стоит на s -м месте. Собственные векторы оператора $\hat{H}_N$ имеют вид

$$f_{k_1, \dots, k_N} = e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes \dots \otimes e_{k_N}, \quad (21)$$

где $k_i = 1, \dots, n$, а соответствующие собственные значения суть

$$Y_{k_1, \dots, k_N} = x_{k_1} + x_{k_2} + \dots + x_{k_N}. \quad (22)$$

умноженной на Кратность собственного значения $Y = x_1 N_1 + \dots + x_n N_n$, которая в случае, когда числа $x_1, \dots, x_n$ несоизмеримы, равна

$$\frac{N! \prod_{i=1}^n g_i^{N_i}}{N_1! \dots N_n!}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь обобщения вероятностной игры о выигрыше в серии из N независимых испытаний. Рассмотрим выигрыш в серии из N испытаний, причем объединим в одну серию все серии, у которых совпадают выигрыши, а различие состоит в порядке выпадения исходов $x_1, \dots, x_n$. В некотором смысле можно считать, что испытания тождественны и от их перестановки ничего не меняется.

Сопоставим этой новой задаче пространство C_S^{nNM} , которое является подпространством пространства C^{nNM} и состоит из его элементов, имеющих вид

$$f = \sum_{m_1=1}^n \dots \sum_{m_N=1}^n f(m_1, \dots, m_N) \cdot e_{m_1} \otimes \dots \otimes e_{m_N}, \quad (24)$$

где $f(m_1, \dots, m_N)$ – числовые коэффициенты, симметричные относительно перестановок m_s и m_r , $s, r = 1, \dots, n$, e_m – собственные векторы оператора $\hat{H}_1$. Пространство C_S^{nNM} будем называть *симметричным подпространством* пространства C^{nNM} . Соответствующий оператор есть ограничение введенного выше оператора $\hat{H}_N$ на подпространство C_S^{nNM} . Легко убедиться, что кратность собственных значений этого оператора совпадают с формулой (54.4) [1] для Бозе газа.

Рассмотрим еще одну игру в серии из N испытаний. Так же, как в предыдущей задаче, будем считать, что серии с одинаковым выигрышем, отличающиеся только перестановкой исходов $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_N}$, $m_j = 1, \dots, n$, объединяются в одну серию, а кроме того наложим запрет на серии, в которых хотя бы один из исходов $x_1, \dots, x_n$ встречается больше одного раза. Пространством, отвечающим такой постановке вероятностной задачи о выигрыше в серии из N испытаний, является C_A^{nNM} – подпространство пространства C^{nNM} , состоящее из его элементов, представимых в виде (24), где коэффициенты $f(m_1, \dots, m_N)$ антисимметричны относительно перестановок m_s и m_r , $s, r = 1, \dots, N$. Будем называть C_A^{nNM} *антисимметричным подпространством* пространства C^{nNM} . Оператором в данном случае является ограничение оператора $\hat{H}_N$ на подпространство C_A^{nNM} . Так же, как и в предыдущих случаях, кратность собственных значений оператора совпадает с формулой (54.1) [1] для Ферми газа.

Рассмотренные задачи о серии испытаний принципиально отличаются одна от другой: в этих задачах существует различие между собственными функциями оператора $\hat{H}_N$. Собственные функции гамильтониана стандартной задачи о выигрыше обладают следующим свойством: если представить их в виде столбца, состоящего из nN элементов, то квадрат каждого элемента равен сам себе, поскольку в такой записи векторы представляют собой столбцы из 0 и 1. Поэтому в обычной задаче о серии независимых испытаний полуплотность совпадает с плотностью вероятности. В случае, когда собственные функции принадлежат симметричному C_S^{nNM} или антисимметричному C_A^{nNM} подпространству, это свойство не выполняется и полуплотность не равна плотности вероятности. Таким образом, введенное пространство и оператор оказались существенными.

Чтобы учесть температуру и энтропию вместо гамильтониана $\hat{H}$ надо рассматривать унитарно-нелинейный оператор свободной энергии (см. [2]–[4]) вида

$$\lambda \Psi_\alpha(x_1, \dots, x_N) = \hat{H}_N \Psi_\alpha(x_1, \dots, x_N) + \theta \ln \left(\frac{\|\Psi_\alpha\|^2}{\sum_{\beta=1}^s \|\Psi_\beta\|^2} \right) \Psi_\alpha(x_1, \dots, x_N), \quad (25)$$

с $\alpha = 1, \dots, s$.

Рассмотрим систему из K пачек с деньгами, например, рублями. Введем в рассмотрение h_1 – “квант денег” – копейку. Каждую пачку будем характеризовать количеством копеек в ней – n . Предположим сначала, что пачки не обмениваются между собой деньгами, т.е. число копеек в каждой пачке постоянно. Можно сказать в этом случае, что разные пачки друг с другом не взаимодействуют. Будем предполагать, что

$$p_n = (1 - e^{-\omega h_1}) e^{-\omega h_1 n}, \quad (26)$$

где $\omega = \text{const}$, т.е. имеет место геометрическое распределение. Состояния такой системы (различные случаи распределения денег по пачкам) можно описать векторами следующего пространства $\mathcal{L}_2$. Элементами $\mathcal{L}_2$ являются векторы вида

$$\Phi = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_K=0}^{\infty} \Phi(n_1, \dots, n_K) \prod_{s=1}^K \frac{(b_s^+)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} \Phi_0,$$

где Φ_0 – вакуумный вектор пространства $\mathcal{L}_2$, а b_s^+ – операторы рождения, сопряженные к которым b_s^- – операторы уничтожения, удовлетворяющие свойствам

$$[b_s^-, b_r^+] = \delta_{sr}, \quad [b_s^\pm, b_r^\pm] = 0, \quad b_s^- \Phi_0 = 0. \quad (27)$$

Случаю, когда в пачке 1 находится n_1 копеек, в пачке 2 – n_2 копеек, и т.д., сопоставим вектор пространства $\mathcal{L}_2$, т.е. состояние вида

$$\prod_{s=1}^K \frac{(b_s^+)^{n_s}}{\sqrt{n_s!}} \Phi_0. \quad (28)$$

Рассматриваемому случаю, когда пачки не обмениваются между собой деньгами, а распределение имеет вид (26), сопоставляется оператор

$$\hat{H}_K = h_1 \omega \sum_{s=1}^K b_s^+ b_s^-. \quad (29)$$

Это сопоставление отвечает нашему исходному соотношению между распределением вероятностей по дискретной случайной величине и собственным значением оператора [5]. Используя (27), легко убедиться, что векторы (28) являются собственными векторами оператора (29) и соответствующее собственное значение

$$\lambda_{n_1, \dots, n_K} = h_1 \omega \sum_{s=1}^K n_s. \quad (30)$$

Отметим теперь, что, сопоставив финансовой задаче пространство $\mathcal{L}_2$ и оператор $\hat{H}_K$, мы можем перенести принцип неопределенности Гейзенберга в финансовые задачи. Необходимость рассмотрения принципа неопределенности в экономических задачах была отмечена Дж. Соросом [6]. Действительно, рассмотрим операторы

$$\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s=1}^K (b_s^- + b_s^+), \quad \hat{P} = \frac{1}{i\sqrt{2}} \sum_{s=1}^K (b_s^- - b_s^+). \quad (31)$$

Эти операторы самосопряженные, и их коммутатор в силу (27) имеет вид

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = iK.$$

Поэтому справедливо следующее неравенство, полностью аналогичное неравенству Гейзенберга: для любого вектора $\Phi \in \mathcal{L}_2$

$$DQ(\Phi) \cdot DP(\Phi) \geq \frac{K^2}{4}, \quad (32)$$

где

$$DQ(\Phi) = \frac{(\Phi, \hat{Q}^2 \Phi)}{(\Phi, \Phi)} - \left(\frac{(\Phi, \hat{Q} \Phi)}{(\Phi, \Phi)} \right)^2, \quad DP(\Phi) = \frac{(\Phi, \hat{P}^2 \Phi)}{(\Phi, \Phi)} - \left(\frac{(\Phi, \hat{P} \Phi)}{(\Phi, \Phi)} \right)^2.$$

Заметим, что векторы пространства $\mathcal{L}_2$ можно также интерпретировать как состояния системы из K частиц (“больших”), каждая из которых обладает еще внутренней структурой – внутри этих “больших” частиц могут рождаться и уничтожаться “малые” частицы, которым соответствуют операторы b^+ и b^- . В таком случае оператор (29) – гамильтониан системы невзаимодействующих частиц, а (26) – вероятность того, что “большая” частица состоит из n “малых” частиц. В случае, если частицы взаимодействуют, оператор (29) заменяется на оператор $\hat{H}_K + \hat{V}_K$, $\hat{V}_K$ – оператор взаимодействия. В физике, как правило, рассматривается парное взаимодействие между частицами. Общий вид оператора парного взаимодействия, сохраняющего симметрию относительно “больших” частиц есть

$$\hat{V}_{2K} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^K \sum_{r=1, r \neq s}^K f_2(b_s^+, b_r^+, b_r^-, b_s^-), \quad (33)$$

где функция $f_2(z_1, z_2, w_1, w_2)$ – аналитическая функция по переменным z_1, z_2, w_1, w_2 , а числа над операторами обозначают порядок их действия. Если же взаимодействие l -частичное, то соответствующий оператор имеет вид

$$\hat{V}_{lK} = \frac{1}{l!} \sum_{s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_l}^K f_l(b_{s_1}^+, \dots, b_{s_l}^+, b_{s_l}^-, \dots, b_{s_1}^-), \quad (34)$$

где f_l – аналитическая функция своих аргументов. Возвращаясь к финансовой задаче, отметим, что оператор (33) можно интерпретировать как переход денег из одной пачки в другую. Действительно, в простейшем частном случае $\hat{V}_{2K}$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{s=1}^K \sum_{r=1, r \neq s}^K b_s^+ b_r^-.$$

Этот оператор есть сумма слагаемых $b_s^+ b_r^-$, $s \neq r$; под действием такого слагаемого вектор (28) переходит в вектор

$$\frac{(b_s^+)^{n_s+1}}{\sqrt{n_s!}} \sqrt{n_r} \frac{(b_r^+)^{n_r-1}}{\sqrt{(n_r-1)!}} \prod_{q=1, q \neq s, r}^K \frac{(b_q^+)^{n_q}}{\sqrt{n_q!}} \Phi_0,$$

т.е. состояние, в котором в пачке s находится n_s копеек, а в пачке r – n_r копеек, переходит в состояние с $n_s + 1$ и $n_r - 1$ копеек в соответствующей пачке. Естественно, операторы $\hat{V}_{2K}$ общего вида приводят к тому, что из одной пачки в другую может переходить более, чем одна копейка, а также деньги в пачках могут исчезать и появляться. Операторы (34) в финансовом случае интерпретируются аналогично, только взаимодействие происходит между l пачками с деньгами.

Асимптотика при $N \rightarrow \infty$ приводит, как известно, к уравнению Гросса–Питаевского, или, как его часто называют, к уравнению Хартри – унитарно нелинейному оператору вида $\hat{H}_K + \hat{V}_{2K}$, где просто вместо операторов b^+ и b^- стоят коммутирующие функции b^* и b . Это унитарно нелинейное уравнение имеет “спектр” и “собственные функции” (см. [2]). Будем называть квадрат собственной функции, отвечающей минимальному “собственному значению”, *одетым распределением*. Он отвечает вероятности с

учетом парного взаимодействия. Квадрат собственной функции оператора $\hat{H}$ без взаимодействия в x -представлении является распределением Гаусса. Одотое распределение может быть найдено экспериментально. Тогда потенциал парного взаимодействия может быть определен из интегрального уравнения первого рода.

Температура в физике по теореме Найквиста пропорциональна дисперсии. Мы предполагаем, что в финансовых задачах это также имеет место: исходные данные – число пачек денежных купюр – задается неточно и имеет некоторую дисперсию, которую мы будем считать температурой. В этом случае вместо гамильтониана $\hat{H}_N$ нужно рассматривать оператор свободной энергии (25) (см. [2], [4]) и, зная потенциал взаимодействия, вычислить, в частности, зависимость распределения от температуры, а также фазовые переходы, которые естественно считать некоторыми катастрофическими скачками.

Автор выражает благодарность В.Н. Батурину и С.Г. Лебедеву за постановку финансовых задач, которые привели к переосмыслению с позиций квантовой статистики задач теории вероятностей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
- [2] Маслов В. П. Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. М.: Институт компьютерных исследований, 2001.
- [3] Маслов В. П. Ультратретичное квантование термодинамики // ТМФ. 2002. Т. 132. № 3. С. 388–398.
- [4] Маслов В. П. Квантование больцмановской энтропии, пары и корреляционная функция // ТМФ. 2002. Т. 131. № 2. С. 261–277.
- [5] Маслов В. П. Элементарная проквантованная термодинамика в стандартных вероятностных схемах // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 4. С. 456–459.
- [6] Soros G. The dangers of capitalism // The Atlantic Monthly. 1997. V. 279. № 2. P. 45–58.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: maslov@qs.phys.msu.su

Поступило
05.08.2002
Исправленный вариант
25.10.2002