Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Изоморфизм графов и равенство симплексов, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 5, 758–767

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:04:23

Изоморфизм графов и равенство симплексов

В. Ю. Протасов

Доказано, что проблема изоморфизма графов эквивалентна задаче о распознавании равных симплексов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Это может дать новые подходы к распознаванию изоморфных графов, основанные на геометрии симплексов. В качестве примера установлены связи между несколькими известными классами инвариантов графов и геометрическими инвариантами симплексов.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Проблема построения эффективных алгоритмов для распознавания изоморфных графов является одной из наиболее популярных и трудных задач теории графов. До сих пор не известно, существуют ли полиномиальные алгоритмы, распознающие изоморфные графы, является ли эта задача NP-сложной, и т.д. [1]–[4]. Необходимые условия для изоморфности графов могут быть получены с помощью инвариантов, т.е., функций, не меняющихся при изоморфизмах. В данной работе будет показано, что проблема изоморфизма двух графов с n вершинами равносильна (полиномиально эквивалентна) задаче о распознавании равенства двух симплексов в $\mathbb{R}^n$. Затем мы установим связи между несколькими известными классами инвариантов графов и геометрическими инвариантами симплексов.

Пусть G – простой ненаправленный граф без петель, имеющий n вершин $v_1, \dots, v_n$. Матрица инцидентности A графа G – симметрическая бинарная $n \times n$ -матрица, у которой $A_{ij} = 1$, если вершины v_i и v_j соединены ребром; иначе $A_{ij} = 0$. В частности, A имеет нули на диагонали. Графы G и G' изоморфны, если задано соответствие между их вершинами $v'_i \leftrightarrow v_{\sigma(i)}$, при котором вершины v'_i и v'_j соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины $v_{\sigma(i)}$, $v_{\sigma(j)}$, где σ – некоторая перестановка на множестве $\{1, \dots, n\}$. Матрицей перестановки называется матрица P , в которой $P_{\sigma(i)i} = 1$, а остальные элементы равны нулю. Графы G' и G изоморфны тогда и только тогда, когда существует матрица перестановки P такая, что $A' = P^T A P$, где P^T – транспонированная матрица. Спектр графа – множество собственных значений матрицы A , взятых с учетом кратности. Графы *коспектральны*, если их спектры совпадают, или, что то же, их матрицы инцидентности имеют одинаковые характеристические полиномы. Далее обозначаем через $\mathcal{M}_n$ множество симметрических $n \times n$ -матриц, $\mathcal{U}_n$ – множество ортогональных $n \times n$ -матриц. Пусть также I – единичная матрица, $e \in \mathbb{R}^n$ – вектор из единиц, $E = ee^T$ – матрица из

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3233.2008.1) и гранта МД-2195.2008.1.

единиц. Под *симплексом* будем, как обычно, понимать выпуклую оболочку $n + 1$ точки в $\mathbb{R}^n$ (точки не лежат в одной гиперплоскости). Симплексы равны, если они переводятся один в другой с помощью движения (изометрии) пространства $\mathbb{R}^n$. При этом равенство понимается без учета порядка вершин. Начнем со следующего несложного результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Задача об изоморфизме двух графов равносильна задаче распознавания равенства двух симплексов в $\mathbb{R}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G и G' – данные графы, $A, A' \in \mathcal{M}_n$ – их матрицы инцидентности. Графы изоморфны, когда $A' = P^T A P$, где P – некоторая матрица перестановок. Это эквивалентно равенству $A' + \lambda I = P^T (A + \lambda I) P$ для любого λ . При достаточно больших положительных λ обе матрицы $A' + \lambda I$ и $A + \lambda I$ положительно определены. Извлекая из них корни $A' + \lambda I = S'^T S'$, $A + \lambda I = S^T S$, получаем,

$$S'^T S' = P^T S^T S P = (S P)^T (S P). \quad (1)$$

Данное равенство означает, что $S' = Q S P$ для некоторой матрицы $Q \in \mathcal{U}_n$. Пусть $\Delta = \Delta(\lambda)$ – симплекс, натянутый на вектора столбцов матрицы S . Его вершина находится в начале координат O , а боковые ребра (выходящие из вершины O), являются столбцами матрицы S . Аналогично симплекс $\Delta'(\lambda)$ определяется матрицей S' . Перенумеровав вершины симплекса Δ матрицей перестановки P и применив ортогональный оператор Q , получаем симплекс Δ' . Таким образом, $\Delta = \Delta'$. Итак, каждой паре изоморфных графов G и G' соответствует пара равных симплексов, порожденных столбцами матриц S и S' . Обратно, равенство данных симплексов означает наличие ортогональной матрицы Q и матрицы перестановок P , для которых $S' = Q S P$, что равносильно (4). Следовательно, $A' + \lambda I = P^T (A + \lambda I) P$, откуда $A' = P^T A P$, т.е., графы G и G' изоморфны. Итак, задача распознавания изоморфных графов сводится к распознаванию равных симплексов.

Пусть даны два произвольных симплекса в $\mathbb{R}^n$. Покрасим их ребра таким образом, что равным длинам соответствуют одинаковые цвета, а разным – разные. Равенство симплексов эквивалентно изоморфизму соответствующих окрашенных графов. Хорошо известно, что распознавание изоморфизма окрашенных графов полиномиально сводится к распознаванию изоморфизма простых графов.

Мы будем называть *допустимым* любое значение λ , для которого обе матрицы $A + \lambda I$ и $A' + \lambda I$ положительно определены. Таким образом, при любом допустимом λ графу G соответствует симплекс $\Delta = \Delta(\lambda)$. Его вершина находится в начале координат O , а боковые ребра, выходящие из вершины O , являются столбцами матрицы S – корня из матрицы $A + \lambda I$. При этом в качестве S может быть взят любой корень (для всех корней соответствующие симплексы равны). Более того, из доказательства предложения 1 следует, что равенство симплексов двух графов при одном λ влечет их равенство при любом допустимом λ . Под гранями симплекса будем понимать только гиперграни (размерности $n - 1$), основание – грань, противоположная вершине O . Все боковые ребра симплекса $\Delta(\lambda)$ равны $\sqrt{\lambda}$, а любая их пара образует угол либо $\pi/2$, либо $\arccos 1/\lambda$.

Строго говоря, в предложении 1 имеется в виду равенство симплексов с выделенной вершиной O . Однако с учетом равенства длин всех ребер, выходящих из O , это эквивалентно обычному равенству симплексов, без выделения какой-либо вершины (доказательство будет несложным упражнением для читателя).

Таким образом, предложение 1 сводит вопрос о полиномиальной распознаваемости изоморфных графов к следующей задаче: существует ли полный (однозначно определяющий симплекс с точностью до изометрии) полиномиальный (по размерности n) набор инвариантов симплекса в $\mathbb{R}^n$, каждый из которых вычисляется за полиномиальное время? Эта идея может дать новые инварианты графов и новые подходы к задаче об изоморфизме, использующие геометрические соображения. В следующем пункте мы рассмотрим несколько известных инвариантов графов и установим, каким инвариантам симплекса они эквивалентны. Будет показано, что уже простейшие геометрические инварианты симплекса: радиус описанной сферы, площади (т.е., $(n - 1)$ -мерные объемы) граней, эллипсоид Джона и т.д., приводят к нетривиальным инвариантам графов.

2. Инварианты графов и симплексов. *Инвариантом симплекса* называется функция, или набор функций, не меняющийся при движениях (изометриях). Объем, радиусы вписанной и описанной сфер, неупорядоченный набор длин высот или медиан – инварианты симплекса. В этом разделе мы установим взаимосвязь нескольких инвариантов графов с инвариантами симплекса.

Два инварианта графа равносильны, если из равенства одного из них для двух графов следует равенство другого. Мы начнем с одного известного набора равносильных друг другу инвариантов [5]. Напомним, что *дополнением* $\bar{G}$ графа G называется граф с теми же вершинами, у которого две различные вершины соединены ребром тогда и только тогда когда они не соединены в G . Спектральное разложение симметрической матрицы A – разложение пространства $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму ортогональных друг другу корневых подпространств $V_1, \dots, V_r$ различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ матрицы A (V_j состоит из собственных векторов с собственным значением λ_j).

ТЕОРЕМА 1 [5]. *Для двух графов G и G' следующие свойства равносильны:*

- (i) *графы G и G' коспектральны и их дополнения $\bar{G}$ и $\bar{G}'$ коспектральны;*
- (ii) *полиномы $\det(A + \lambda I + tE)$ и $\det(A' + \lambda I + tE)$ тождественно равны;*
- (iii) *$A' = Q^T A Q$, где матрица $Q \in \mathcal{U}_n$ такова, что $Qe = e$;*
- (iv) *графы G и G' коспектральны, а вектор e образует с подпространствами $V_1, \dots, V_r$ те же углы, что и с подпространствами $V'_1, \dots, V'_r$ соответственно.*

Путь длины m по графу G – любая последовательность вершин графа (вершины могут повторяться), в которой любые два соседних элемента соединены ребром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Каждое из свойств (i)–(iv) теоремы 1 влечет*

- (v) *при любом m общее количество путей длины m для графов G и G' равны.*

Если известно, что графы коспектральны, либо если вектор e не ортогонален ни одному из подпространств V_i, V'_j , то (v) влечет (i)–(iv).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равносильность инвариантов (i)–(iv) была установлена Джонсоном и Ньюменом [5]. Предложение 2 можно найти в [4; гл. 4].

Оказывается, инварианты (i)–(v) имеют простые геометрические аналоги в терминах симплексов. Перед формулировкой напомним некоторые определения. Среди всех эллипсоидов, содержащихся в данном выпуклом теле, существует единственный эллипсоид максимального объема – эллипсоид Джона [6]. Для многогранников

эллипсоид Джона может быть найден приближенно за полиномиальное время [7]. Для симплексов он находится явно с помощью следующего простого соображения. У правильного симплекса эллипсоид Джона совпадает со вписанным шаром (это следует из единственности). Поэтому для произвольного симплекса Δ его эллипсоид Джона вычисляется как $T^{-1}\mathcal{B}$, где T – линейный оператор, переводящий Δ в правильный симплекс, а $\mathcal{B}$ – вписанный шар правильного симплекса. Здесь мы воспользовались свойством линейных операторов сохранять отношения объёмов, из которого следует, что произвольный линейный оператор, переводящий один симплекс в другой, переводит эллипсоид Джона первого симплекса в эллипсоид Джона второго. В частности, применив оператор T , переводящий данный симплекс в правильный, получаем, что центр эллипсоида Джона всегда совпадает с центром тяжести симплекса, а точки его касания с гранями – с центрами тяжести граней.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эллипсоид Джона часто используется в качестве инварианта выпуклых тел, наряду с эллипсоидом Лёвнера (эллипсоидом наименьшего объема, содержащим данное тело). Для симплексов эти два инварианта эквивалентны, поскольку они гомотетичны относительно центра тяжести симплекса с коэффициентом n .

Итак, любому графу соответствует однопараметрическое семейство симплексов $\{\Delta(\lambda)\}$, где параметр λ пробегает множество всех допустимых значений. Везде далее мы будем говорить, что определенные элементы симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны, подразумевая, что они равны при любом допустимом λ . Для проверки такого равенства достаточно взять ограниченное число различных значений λ (замечание 7).

ТЕОРЕМА 2. *Для двух графов G и G' каждое из свойств (i)–(iv) теоремы 1 равносильно тому, что эллипсоиды Джона у симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны.*

ТЕОРЕМА 3. *Свойство (v) предложения 2 равносильно тому, что радиусы описанных сфер у симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны.*

Заметим, что объем симплекса $\Delta(\lambda)$ определяется спектром графа G , поскольку он равен $(1/n!)[\det(A + \lambda I)]^{1/2}$. В частности, объемы $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны при всех допустимых λ тогда и только тогда, когда соответствующие графы коспектральны. Поэтому, воспользовавшись предложением 2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Эллипсоиды Джона симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны тогда и только тогда,¹ когда равны их объемы и описанные сферы.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теоремы 2 и 3 будут доказаны в следующем пункте. Отметим, что для произвольной пары симплексов равенство объемов и описанных сфер не влечет равенства эллипсоидов Джона, и наоборот. Примеры элементарно строятся уже в $\mathbb{R}^2$. Однако для симплексов, порожденных графами, эти свойства оказываются равносильными.

Рассмотрим теперь следующие инварианты графов, равносильность которых была доказана в [8]. Мы предполагаем, что в каждом из графов G и G' задана нумерация вершин. Для любого $i = 1, \dots, n$ обозначаем через G_i граф, получающийся из G удалением вершины v_i и всех ребер, исходящих из нее. Аналогично определяются графы G'_i .

¹Напомним, что имеется в виду равенство при всех допустимых λ .

ТЕОРЕМА 4 [8]. Для двух графов G и G' следующие свойства равносильны:

- (а) графы G и G' коспектральны, и для любого $i = 1, \dots, n$ графы G_i и G'_i коспектральны;
- (б) при любом t матрица A^m имеет те же диагональные элементы, что и $(A')^m$;
- (с) для каждого $i = 1, \dots, n$ при любом t общее количество замкнутых путей длины t графа G из v_i в v_i равно количеству замкнутых путей длины t графа G' из v'_i в v'_i ;
- (д) графы G и G' коспектральны и для каждого $i = 1, \dots, n$ вектор e_i образует с подпространствами $V_1, \dots, V_r$ те же углы, что и с подпространствами $V'_1, \dots, V'_r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Равносильность свойств (а)–(д) была установлена Годсилом и МакКеем в [8]. В монографии [4] приведены идеи трех возможных доказательств теоремы 4.

Теперь мы можем установить соответствующие инварианты симплексов.

ТЕОРЕМА 5. 1) Свойства (а)–(д) теоремы 4 равносильны тому, что у симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны объемы и $(n-1)$ -мерные объемы боковых граней.

2) Свойства (i)–(iv) теоремы 1 равносильны тому, что у симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны объемы и $(n-1)$ -мерные объемы оснований.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Объем симплекса $\Delta(\lambda)$ равен

$$\frac{1}{n!}(\det S^T S)^{1/2} = \frac{1}{n!}(\det(A + \lambda I))^{1/2}.$$

Поэтому равенство объемов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ при любом допустимом λ означает коспектральность графов G и G' . Аналогично, $(n-1)$ -мерный объем грани симплекса $\Delta(\lambda)$, натянутой на все вектора $s_1, \dots, s_n$, кроме s_i , равен

$$\frac{1}{(n-1)!}(\det(A + \lambda I)_{ii}^w)^{1/2},$$

где символом X_{ij}^w обозначена матрица, получающаяся из матрицы X вычеркиванием i -й строки и j -го столбца. Поэтому равенство объемов боковых граней симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ означает коспектральность графов G_i и G'_i при всех $i = 1, \dots, n$.

2) Пусть K – произвольная вершина основания симплекса $\Delta(\lambda)$, OH – высота, опущенная на основание. Так как все боковые ребра равны $\sqrt{\lambda}$, точка H лежит на диаметре OO' описанной сферы. Поскольку KH – высота прямоугольного треугольника OKO' , имеем

$$OO' = \frac{OK^2}{OH} = \frac{\lambda}{OH} = \frac{\lambda S(\Delta)}{n \text{Vol} \Delta};$$

через $S(\Delta)$ обозначен $(n-1)$ -мерный объем основания. Таким образом, равенство объемов симплексов и объемов их оснований эквивалентно равенству описанных сфер. Воспользовавшись теоремой 3 и предложением 2, завершаем доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если у симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ равны объемы и $(n-1)$ -мерные объемы граней, то они имеют равные описанные сферы, равные эллипсоиды Джона, выполнены все свойства (i)–(v) теоремы 1 и предложения 2, а также свойства (а)–(д) теоремы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим еще раз, что для произвольной пары симплексов равенство объемов и $(n-1)$ -мерных объемов граней не влечет равенства описанных сфер или эллипсоидов Джона. Углы α_{ij} между базисными векторами e_i и подпространствами V_j спектрального разложения (теорема 4, (d)) в качестве инвариантов графов всесторонне изучались в [4]. Там же было введено понятие ЕА-восстановимых параметров графов, т.е. тех, которые зависят только от спектра графа и от его углов. Теорема 5 добавляет в список ЕА-восстановимых $(n-1)$ -мерные объемы боковых граней симплекса $\Delta(\lambda)$.

3. Вспомогательные факты и доказательства теорем. Основной задачей этого пункта будет доказательство теорем 2 и 3. Вначале мы установим два вспомогательных утверждения – лемму 1 и предложение 3, затем, для удобства читателя, дадим независимые и вполне короткие доказательства теоремы 1 и предложения 2, затем докажем теоремы 2 и 3. Коспектральность матриц A и A' будем обозначать как $A \sim A'$. Пары симметрических матриц (A, B) и (A', B') будем называть *подобными*, если существует матрица $U \in \mathcal{U}_n$, для которой $A' = U^T A U$ и $B' = U^T B U$.

ЛЕММА 1. Если $A, B \in \mathcal{M}_n$, причем $\text{rank } A = n$, то функция $p(t) = \det(A + tB)$ является полиномом степени $\text{rank } B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходим к базису, в котором матрица B диагональна. Количество ненулевых элементов на ее диагонали равно $\text{rank } B$, из чего следует лемма.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Даны матрицы $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_n$, причем $\text{rank } B = \text{rank } B' = 1$. Тогда следующие свойства равносильны:

- (1) $A \sim A'$ и $A + B \sim A' + B'$;
- (2) $A + tB \sim A' + tB'$ при любом $t \in \mathbb{R}$;
- (3) пары (A, B) и (A', B') подобны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. В силу леммы 1 при любом фиксированном λ , для которого $\text{rank}(A + \lambda I) = \text{rank}(A' + \lambda I) = n$ (значит, и при всех достаточно больших λ), функции $\det(A + \lambda I + tB)$ и $\det(A' + \lambda I + tB')$ являются полиномами первой степени по t . Если они совпадают в точках $t = 0$ и $t = 1$, то они совпадают тождественно. Следовательно, $(1) \Rightarrow (2)$. Покажем, что $(2) \Rightarrow (3)$. Перейдя к подходящему ортогональному базису, считаем, что $A = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, все собственные значения λ_j различны и взяты с кратностями. Имеем

$$\det(\Lambda + \lambda I + tB) = t^n \det(\Lambda + \lambda I) \det(t^{-1}I + (\Lambda + \lambda I)^{-1/2} B (\Lambda + \lambda I)^{-1/2}),$$

где $(\Lambda + \lambda I)^{-1/2}$ – диагональная матрица с элементами $(\lambda_j + \lambda)^{-1/2}$. Такое же представление верно и для матриц A', B' (так как $A' \sim A$, то в базисе, диагонализующем A' , имеем $A' = \Lambda$). В силу произвольности t это означает, что матрицы $(\Lambda + \lambda I)^{-1/2} B (\Lambda + \lambda I)^{-1/2}$ и $(\Lambda + \lambda I)^{-1/2} B' (\Lambda + \lambda I)^{-1/2}$ также коспектральны, поэтому

$$\text{tr}(\Lambda + \lambda I)^{-1/2} B (\Lambda + \lambda I)^{-1/2} = \text{tr}(\Lambda + \lambda I)^{-1/2} B' (\Lambda + \lambda I)^{-1/2}$$

при всех достаточно больших положительных λ . Таким образом,

$$\sum_{j=1}^r \frac{\mathbf{b}_j}{\lambda + \lambda_j} = \sum_{j=1}^r \frac{\mathbf{b}'_j}{\lambda + \lambda_j},$$

где $\mathbf{b}_j$ – сумма диагональных элементов B_{ii} матрицы B по всем индексам i , соответствующим собственному значению λ_j ; аналогично с числами $\mathbf{b}'_j$ для матрицы B' . Две простейшие дроби совпадают при всех достаточно больших λ ; значит, $\mathbf{b}_j = \mathbf{b}'_j$ для всех j . Так как $\text{rank } B = 1$, то либо $B = bb^T$, либо $B = -bb^T$ для некоторого $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $B = bb^T$; второй случай рассматривается аналогично. Имеем $B_{ii} = (b_i)^2$ для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому $\mathbf{b}_j = |\beta_j|^2$, где β_j – проекция вектора b на собственное подпространство V_j . Аналогично $B' = b'^T b'$; в противном случае числа $\mathbf{b}'_j = \mathbf{b}_j$ были бы отрицательны. Тогда $\mathbf{b}'_j = |\beta'_j|^2$, где β'_j – проекция вектора b на собственное подпространство V'_j . Итак, $|\beta_j| = |\beta'_j|$ при всех $j = 1, \dots, r$. Применим ортогональное преобразование, переводящее подпространства V'_j в подпространства V_j . Затем при каждом $j = 1, \dots, r$ переведем образ вектора b'_j в вектор b_j подходящим ортогональным преобразованием, которое сохраняет подпространство V_j и тождественно на остальных подпространствах V_i , $i \neq j$. Получили ортогональное преобразование, переводящее подпространства V'_j в V_j и вектор b' в вектор b . Оно задает подобие пар (A, B) и (A', B') .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Ключевой переход в предложении 3 – импликация (2) $\Rightarrow$ (3). Пункт (2) утверждает, что для каждого t найдется *свое* ортогональное преобразование U , задающее подобие матриц $A + tB$ и $A' + tB'$, а согласно пункту (3) найдется *одно и то же* преобразование U для всех t .

Условие $\text{rank } B = \text{rank } B' = 1$ в предложении 3 существенно. Так, элементарно строятся примеры, в которых свойство (1) выполнено, а свойство (2) – нет. Это естественно, поскольку при $\text{rank } B \geq 2$ степень полинома $\det(A + \lambda I + tB)$ по переменной t будет больше 1, а значит полином не определяется значениями в точках $t = 0$ и $t = 1$. Менее очевидно, что при $\text{rank } B \geq 2$ свойства (2) и (3) также не обязательно равносильны. Возьмем в качестве примера матрицы $A = A' = \text{diag}(2, 3, 1)$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц $\text{rank } B = \text{rank } B' = 2$, свойство (2) выполнено:

$$\det(A + tB + \lambda I) = \det(A' + tB' + \lambda I) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) - (7 + 3\lambda)t^2,$$

однако пары (A, B) и (A', B') не являются подобными. Если для $Q \in \mathcal{U}_3$ выполнено равенство $A' = Q^T A Q$, то матрица Q диагональна с элементами ± 1 на диагонали. Однако ни одна из таких матриц не удовлетворяет равенству $B' = Q^T B Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Равносильность (i)–(iii) следует из предложения 3 для $B = B' = -E$. При этом матрица Q , задающая подобие пар $(A, -E)$ и $(A', -E)$, должна удовлетворять равенству $Q^T E Q = E$. Таким образом, $E Q = Q E$; следовательно, суммы элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы Q равны. Тогда $Q e = \mu e$, а так как Q ортогональна, то $\mu = \pm 1$. Умножая при необходимости Q на -1 , получаем $\mu = 1$. Подобие пар $(A, -E)$ и $(A', -E)$ равносильно свойству (iv).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Пусть $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ – спектральное разложение матрицы A , A_j – ограничение оператора A на подпространство V_j , $e =$

$\sum_{j=1}^r \varepsilon^j$, $\varepsilon^j \in V_j$ – соответствующее разложение вектора e . Количество различных путей длины m графа G равно

$$(e, A^m e) = \left(e, \sum_{j=1}^r A_j^m e \right) = \left(\sum_{j=1}^r \varepsilon^j, \sum_{j=1}^r A_j^m \varepsilon^j \right) = \sum_{j=1}^r (\varepsilon^j, \lambda_j^m \varepsilon^j) = \sum_{j=1}^r \lambda_j^m |\varepsilon^j|^2.$$

Таким образом, свойство (v) означает, что

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j^m |\varepsilon^j|^2 = \sum_{i=1}^{r'} (\lambda'_i)^m |\varepsilon'^i|^2, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Если $A \sim A'$ и $|\varepsilon^j| = |\varepsilon'^j|$ для всех $j = 1, \dots, r$, то (2) выполнено. Поэтому (iv) $\Rightarrow$ (v). Обратно, если $A \sim A'$, т.е., $r = r'$ и $\lambda_j = \lambda'_j$ при всех $j = 1, \dots, r$, то равенство (2), выполненное при всех m , означает, что $|\varepsilon^j| = |\varepsilon'^j|$ для всех $j = 1, \dots, r$, т.е., свойство (iv). Если же известно, что ни один из коэффициентов $|\varepsilon^j|$ и $|\varepsilon'^j|$ не обращается в нуль, то (2) означает, что совпадают как спектры: $r = r'$ и $\lambda_j = \lambda'_j$, так и коэффициенты $|\varepsilon^j| = |\varepsilon'^j|$, $j = 1, \dots, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что симплексы $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ имеют равные эллипсоиды Джона. Рассмотрим правильный симплекс, n вершин которого лежат в концах базисных векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда оставшаяся вершина имеет равные координаты. Следовательно, матрица R данного симплекса (столбцы которой равны векторам ребер, исходящих из последней вершины) имеет вид $R = \alpha I + \beta E$. Тогда $R^{-1} = \gamma I + \delta E$. Коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ нам не понадобятся, хотя они легко могут быть вычислены. Таким образом, $R, R^{-1} \in \mathcal{M}_n$. Пусть оператор D переводит симплекс $\Delta(\lambda)$ в правильный симплекс, т.е., $R = DS$, а оператор $U \in \mathcal{U}_n$ переводит эллипсоид Джона симплекса $\Delta'(\lambda)$ в эллипсоид Джона симплекса $\Delta(\lambda)$. Тогда оператор DU переводит эллипсоид Джона симплекса $\Delta'(\lambda)$ в шар. Следовательно, он переводит $\Delta'(\lambda)$ в некоторый правильный симплекс CR , где $C \in \mathcal{U}_n$. Таким образом,

$$DUS' = CR \quad \text{и} \quad DS = R, \quad (3)$$

где S, S' – матрицы симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ соответственно. Выражая из обоих равенств D^{-1} и приравнявая, получаем $US'R^{-1}C^T = SR^{-1}$. Домножая каждую из частей слева на сопряженную, имеем

$$CR^{-1}S'^T U^T US'R^{-1}C^T = R^{-1}S^T SR^{-1}.$$

Учитывая, что $U^T U = I$, $S'^T S' = A' + \lambda I$ и $S^T S = A + \lambda I$, получаем

$$CR^{-1}(A' + \lambda I)R^{-1}C^T = R^{-1}(A + \lambda I)R^{-1}. \quad (4)$$

Таким образом, $R^{-1}(A' + \lambda I)R^{-1} \sim R^{-1}(A + \lambda I)R^{-1}$, откуда

$$R^{-1}A'R^{-1} + \lambda R^{-2} \sim R^{-1}AR^{-1} + \lambda R^{-2}. \quad (5)$$

Заметим, что $R^{-2} = \gamma^2 I + (2\gamma\delta + n\delta^2)E$; следовательно,

$$R^{-1}A'R^{-1} + \lambda\gamma^2 I + \lambda(2\gamma\delta + n\delta^2)E \sim R^{-1}AR^{-1} + \lambda\gamma^2 I + \lambda(2\gamma\delta + n\delta^2)E. \quad (6)$$

Вычитая из обеих частей $\lambda\gamma^2 I$ и обозначая, $t = \lambda(2\gamma\delta + n\delta^2)$, получаем

$$R^{-1}A'R^{-1} + tE \sim R^{-1}AR^{-1} + tE \quad (7)$$

при всех достаточно больших t . Теперь предложение 3 гарантирует существование матрицы $Q \in \mathcal{U}_n$, для которой $Q^T R^{-1}A'R^{-1}Q = R^{-1}AR^{-1}$ и $Q^T EQ = E$. Следовательно, матрица Q коммутирует с E , а значит, коммутирует и с матрицей $R^{-1} = \gamma I + \delta E$. Тогда, переставляя местами множители, получаем $R^{-1}Q^T A' Q R^{-1} = R^{-1}AR^{-1}$, откуда $Q^T A' Q = A$. Таким образом, пары (A, E) и (A', E) подобны, что равносильно (iii). Обратно, если пары (A, E) и (A', E) подобны, то (7) выполнено для любого t . Следовательно, соотношение (6), а значит и (5), выполнено для любого λ . Это влечет равенство (4) для некоторого $C \in \mathcal{U}_n$. Извлекая из него корень, получаем $US'R^{-1}C^T = SR^{-1}$ для некоторого $U \in \mathcal{U}_n$. Обозначив обе части равенства как D^{-1} , приходим к равенствам (3). Они означают, что оператор D^{-1} , примененный к вписанному шару правильного симплекса, дает эллипсоид Джона симплекса $\Delta(\lambda)$, а оператор $U^T D^{-1}$, примененный к тому же шару, дает эллипсоид Джона симплекса $\Delta'(\lambda)$. Поскольку $U \in \mathcal{U}_n$, эти эллипсоиды равны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть S, S' – матрицы симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ соответственно, c – центр описанной сферы симплекса $\Delta(\lambda)$. Для любого i вектор, соединяющий c с серединой отрезка $[O, s_i]$, перпендикулярен этому отрезку. Поэтому $(c - 1/2s_i, s_i) = 0$, откуда

$$2(c, s_i) = (s_i, s_i) = (A + \lambda I)_{ii} = \lambda$$

(поскольку $A_{ii} = 0$). Таким образом, $S^T c = 1/2\lambda e$. Для радиуса ρ описанной сферы имеем $\rho^2 = |c|^2$. Подставляя $c = 1/2\lambda(S^T)^{-1}e$ и учитывая, что $S^T S = A + \lambda I$, получаем

$$\rho^2 = \frac{\lambda^2}{4} e^T (A + \lambda I)^{-1} e.$$

Заметим, что $(A + \lambda I)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^{-m} A^m$, откуда

$$\rho^2 = \frac{\lambda}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^{-m} (e, A^m e). \quad (8)$$

Аналогичное выражение получаем для радиуса ρ' описанной сферы симплекса $\Delta'(\lambda)$. Равенство $\rho = \rho'$ при любом допустимом λ означает, что $(e, A^m e) = (e, A'^m e)$ для всех $m \geq 0$, что равносильно (v).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Из доказательств теорем 2, 3 и 5 несложно заключить, какого числа различных значений параметра λ будет достаточно для проверки того, что те или иные инварианты симплексов равны при всех допустимых λ . Так, для равенства описанных сфер симплексов $\Delta(\lambda)$ и $\Delta'(\lambda)$ при всех допустимых λ достаточно, чтобы оно выполнялось при $2n$ различных значениях λ , для равенства эллипсоидов Джона, объемов и $(n-1)$ -мерных объемов граней достаточно n значений λ .

Автор благодарит анонимного рецензента за внимательное чтение работы и несколько ценных замечаний, способствовавших улучшению текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Н. Земляченко, Н. М. Корнеев, Р. И. Тышкевич, “Проблема изоморфизма графов”, *Теория сложности вычислений. I*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **118**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1982, 83–158.
- [2] J. Köbler, U. Schöning, J. Torán, *The Graph Isomorphism Problem: Its Structural Complexity*, Progr. Theoret. Comput. Sci., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.
- [3] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs. Theory and Application*, Pure Appl. Math., **87**, Academic Press, New York–London, 1980.
- [4] D. Cvetković, P. Rowlinson, S. Simić, *Eigenspaces of Graphs*, Encyclopedia Math. Appl., **66**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [5] C. R. Johnson, M. Newman, “A note on cospectral graphs”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **28**:1 (1980), 96–103.
- [6] F. John, “Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions”, *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday*, Intersci. Publ., New York, 1948, 187–204.
- [7] С. П. Тарасов, Л. Г. Хачиян, И. И. Эрлих, “Метод вписанных эллипсоидов”, *Докл. АН СССР*, **298**:5 (1988), 1081–1085.
- [8] C. D. Godsil, B. D. McKay, “Spectral conditions for reconstructibility of a graph”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **30**:3 (1981), 285–289.

В. Ю. Протасов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v-protassov@yandex.ru

Поступило

03.04.2008

Исправленный вариант

12.10.2008