Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Альбеверио, Я. И. Белопольская, М. Н. Феллер,
Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом
Леви, *Матем. заметки*, 2010, том 87, выпуск 6, 803–813

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 10:54:01

Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви

С. А. Альбеверио, Я. И. Белополюская, М. Н. Феллер

Приводятся решения задачи Коши (начальной задачи во всем пространстве) для волнового уравнения с бесконечномерным лапласианом Леви Δ_L

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x)$$

в двух функциональных классах – классе Шилова и классе Гато.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. В то время как теория эллиптических и параболических уравнений с лапласианом Леви достаточно развита (см., например, библиографию к [1]), напротив, публикации по гиперболическим уравнениям с лапласианом Леви практически отсутствуют.

Эта статья посвящена решению задачи Коши (начальной задаче во всем пространстве) для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x)$$

в двух важных функциональных классах – в классе функций Шилова (шиловском классе функций) и в классе функций Гато. В этих классах нам удалось получить решение в явном виде и при этом обойтись незначительными ограничениями на начальные функции (см. теоремы 1 и 2).

Мы увидим, сколь разительно отличаются задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви от таких же задач для конечномерного волнового уравнения.

Так в шилловском классе функций лапласиан Леви является “дифференцированием” (формула (4)). Поэтому в этом классе уравнение

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x)$$

сводится к “уравнению теплопроводности”. Кроме того, из формулы (8) следует, что

$$\left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} \neq 0$$

для всех x (см. замечание к п. 3), что не позволяет поставить задачу

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad U(0, x) = F(x) \left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

для данной функции F , а значит, и задачу

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad U(0, x) = F(x), \quad \left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi(x),$$

для данных функций F и Φ . Единственно осмысленной задачей в этом классе оказывается нетрадиционная для волнового уравнения задача Коши:

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad U(0, x) = F(x).$$

Напротив, в классе функций Гато лапласиан Леви не является “дифференцированием” (формула (13)). Это позволило для волнового уравнения с лапласианом Леви получить решение задачи Коши в классической постановке:

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad U(0, x) = F(x), \quad \left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Phi(x),$$

для данных функций F и Φ .

2. Предварительные сведения. Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$, где индекс указывает соответствующее пространство $\mathfrak{H}$. Пусть $F(x)$ – скалярная функция заданная на H , $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел Леви [2]. Для функции $F(x)$ дважды сильно дифференцируемой в точке $x_0 \in H$ лапласиан Леви функции $F(x)$ в точке x_0 определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F''(x_0) f_k, f_k)_H, \quad (1)$$

где $F''(x)$ – гессиан функции $F(x)$ и $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ – выбранный ортонормированный базис в H .

В частности, пусть $H = L_2(0, 1)$ – гильбертово пространство функций $x(s)$, интегрируемых с квадратом на $[0, 1]$.

Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема в точке $x \in L_2(0, 1)$ и ее второй дифференциал имеет вид

$$d^2 F(x; h) = \int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2} h^2(s) ds + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s) \delta x(\tau)} h(s) h(\tau) ds d\tau,$$

где вторая вариационная производная $\delta^2 F(x)/\delta x(s)^2$ и вторая смешанная вариационная производная $\delta^2 F(x)/\delta x(s) \delta x(\tau)$, функции $F(x)$ непрерывны соответственно по s и s, τ , $h \in L_2(0, 1)$, то говорят, что $d^2 F(x; h)$ имеет *нормальную форму* [2].

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех равномерно плотных базисов в $L_2(0, 1)$, т.е. таких ортонормированных базисов $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ в $L_2(0, 1)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y, \varphi_n)_{L_2(0,1)} = (y, 1)_{L_2(0,1)} \quad \text{для всех } y \in L_2(0, 1),$$

где

$$\varphi_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k^2(s).$$

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ (см. [1], [2]). Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема и ее второй дифференциал имеет нормальную форму, то

$$\Delta_L F(x) = \int_0^1 \frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2} ds \quad (2)$$

для произвольного базиса из $\mathcal{B}$.

3. Задача Коши в классе функций Шилова. Обозначим через $\mathfrak{C}$ шилловский класс функций [3] – совокупность функций вида

$$F(x) = f\left((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right), \quad (3)$$

где $a_1, \dots, a_m$ – некоторые элементы пространства H и $f(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi)$ – функция $m+1$ переменных, определенная и непрерывная в области

$$G_f = \left\{ (a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2} \right\} \subset R^{m+1}.$$

Здесь $\{(a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \|x\|_H^2/2\}$ – это вектор значений функций $(a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \|x\|_H^2/2$.

Обозначим через $\mathfrak{C}^*$ подмножество функций f из $\mathfrak{C}$, непрерывно дифференцируемых по $\|x\|_H^2/2$ вместе с функцией $f'_\xi((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \|x\|_H^2/2)$.

Тогда для данной функции $F(x) \in \mathfrak{C}^*$ имеет место формула (см. [3])

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\|x\|_H^2/2}. \quad (4)$$

При этом лапласиан Леви не зависит от выбора базиса, поскольку для любого ортонормированного базиса в H справедливо равенство $\Delta_L \|x\|_H^2 = 2$, которое не зависит от базиса.

Формула (4) немедленно следует из (1). Действительно, запишем функцию (3) в виде

$$F(x) = f(U_1(x), \dots, U_m(x), U_{m+1}(x)),$$

где

$$U_j(x) = (a_j, x)_H, \quad j = 1, \dots, m, \quad U_{m+1}(x) = \frac{1}{2} \|x\|_H^2$$

(мы использовали новое обозначение U_{m+1} для ξ).

Второй дифференциал функции $F(x)$ в точке $x \in H$ в направлении $h \in H$ имеет вид

$$\begin{aligned} d^2 F(x; h) = (F''(x)h, h)_H &= \sum_{i,j=1}^{m+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi_i=U_i(x)} (U'_i(x), h)_H (U'_j(x), h)_H \\ &+ \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_j=U_j(x)} (U''_j(x)h, h)_H. \end{aligned}$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} \Delta_L F(x) = & \sum_{i,j=1}^{m+1} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\xi_i=U_i(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (U'_i(x), f_k)_H (U'_j(x), f_k)_H \\ & + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_j=U_j(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (U''_j(x) f_k, f_k)_H. \end{aligned}$$

Но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (U'_i(x), f_k)_H (U'_j(x), f_k)_H = 0,$$

так как

$$(U'_j(x), f_k)_H = (a_j, f_k)_H \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (U'_{m+1}(x), f_k)_H = (x, f_k)_H \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

Кроме того,

$$(U''_j(x) f_k, f_k)_H = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

поскольку $U_j(x) = (a_j, x)_H$, и

$$(U''_{m+1}(x) f_k, f_k)_H = (f_k, f_k)_H = 1,$$

поскольку $U_{m+1}(x) = \|x\|_H^2/2$.

Поэтому

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f}{\partial \xi_{m+1}} \Big|_{\xi_j=U_j(x)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{\partial f((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\|x\|_H^2/2}.$$

Заметим, что функция $\Delta_L F(x)$ зависит от $(a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H$ и от $\|x\|_H^2/2$ и принадлежит $\mathfrak{C}^*$.

Рассмотрим начальную задачу во всем пространстве (задачу Коши) для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in H, \quad (5)$$

$$U(0, x) = F(x), \quad (6)$$

где $U(t, x)$ – вещественная функция, определенная на $[0, \mathcal{T}] \times H$, и $F(x)$ – заданная функция.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $F(x) \in \mathfrak{C}^*$,

$$F(x) = f\left((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где $f(\xi_1, \dots, \xi_m, \xi)$ – функция, определенная на $\mathbb{R}^{m+1}$.

Тогда решение задачи (5), (6) в этом классе дается формулой

$$U(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} f\left((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем функцию $F(x)$ в виде

$$F(x) = f\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где P_a – проектор на m -мерное пространство, натянутое на векторы $a_1, \dots, a_m$.

Дифференцируя (7) по переменной t , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} &= -\frac{f(P_a x, 0)}{\pi^{1/2} \sqrt{\|x\|_H^2/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} t f'_{\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{2z^2} e^{-z^2} dz, \quad t > 0, \quad (8) \\ \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{t f(P_a x, 0)}{2\sqrt{\pi}(\|x\|_H^2/2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad + \frac{2f'_{\xi}(P_a x, 0)\sqrt{\|x\|_H^2/2}}{\sqrt{\pi}t} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} f'_{\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{2z^2} e^{-z^2} dz \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} t^2 f''_{\xi\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{4z^4} e^{-z^2} dz, \quad t > 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Далее, из (7), воспользовавшись формулой (4), получим

$$\begin{aligned} \Delta_L U(t, x) &= \frac{t f(P_a x, 0)}{2\sqrt{\pi}(\|x\|_H^2/2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} f'_{\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz \quad (10) \end{aligned}$$

(поскольку $\Delta_L \|x\|_H^2/2 = 1$, $\Delta_L (\|x\|_H^2/2)^{-1/2} = -(1/2)(\|x\|_H^2/2)^{-3/2}$). Интегрируя по частям, найдем, что

$$\begin{aligned} \Delta_L U(t, x) &= \frac{t f(P_a x, 0)}{2\sqrt{\pi}(\|x\|_H^2/2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} f'_{\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{2z} d(e^{-z^2}) \\ &= \frac{t f(P_a x, 0)}{2\sqrt{\pi}(\|x\|_H^2/2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad + \frac{2f'(P_a x, 0)\sqrt{\|x\|_H^2/2}}{\sqrt{\pi}t} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|_H^2/2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} f'_{\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{2z^2} e^{-z^2} dz \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})}^{\infty} t^2 f''_{\xi\xi}\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) \frac{1}{4z^4} e^{-z^2} dz. \quad (11) \end{aligned}$$

Подставляя (9) и (11) в уравнение (5), получим тождество. Полагая в (7) $t = 0$, получим, что

$$U(0, x) = f\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = f\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right) = F(x).$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из соотношения (8) вытекает, что

$$\left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} \neq 0.$$

Более того, если $f(P_a x, \xi)$ ограничено, то

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Применяя к (8) формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} &= \frac{f(P_a x, 0)}{\pi^{1/2} \sqrt{\|x\|^2/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\|x\|^2/2}\right) \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|^2/2})}^\infty \frac{z}{t} f'_z\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|^2/2})}^\infty f\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{t/(2\sqrt{\|x\|^2/2})}^\infty \frac{2z^2}{t} f\left(P_a x, \frac{\|x\|_H^2}{2} - \frac{t^2}{4z^2}\right) e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

4. Задача Коши в классе функций Гато. Обозначим через $\mathfrak{G}$ класс функций Гато – совокупность функций вида

$$F(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N, \quad (12)$$

где f называется *генерирующей функцией* для F , а $f(\xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N)$ – непрерывная функция $2N$ переменных.

Обозначим через $\mathfrak{G}^*$ функции из $\mathfrak{G}$, для которых генерирующая функция имеет непрерывные производные второго порядка по $\xi_1, \dots, \xi_N$. Тогда для $F \in \mathfrak{G}^*$ имеет место формула

$$\Delta_L F(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2} \right|_{\xi_k=x(t_k)} dt_1 \dots dt_N \quad (13)$$

для произвольного базиса из $\mathcal{B}$.

Действительно, второй дифференциал функции $F(x)$, имеющей вид (12), равен

$$\begin{aligned} d^2 F(x; h) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2} \Big|_{\xi_k=x(t_k)} h^2(t_k) dt_1 \dots dt_N \\ &\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{j,k=1, j \neq k}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi_j=x(t_j), \xi_k=x(t_k)} h(t_j) h(t_k) dt_1 \dots dt_N \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2} \Big|_{\xi_k=x(s)} \prod_{i=1, i \neq k}^N dt_i \right] h^2(s) ds \\ &\quad + \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{j,k=1, j \neq k}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi_j=x(t_j), \xi_k=x(t_k)} h(t_j) h(t_k) dt_j dt_k. \end{aligned}$$

Значит, $d^2 F(x; h)$ имеет нормальную форму, а

$$\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(s)^2} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2} \Big|_{\xi_k=x(s)} \prod_{i=1, i \neq k}^N dt_i.$$

Согласно (2) имеем, что

$$\Delta_L F(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k^2} \Big|_{\xi_k=x(t_k)} dt_1 \dots dt_N.$$

Рассмотрим начальную задачу во всем пространстве (задачу Коши) для волнового уравнения с лапласианом Леви

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in L_2(0, 1), \quad (14)$$

$$U(0, x) = F(x), \quad (15)$$

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi(x), \quad (16)$$

где $U(t, x)$ – функция на $[0, \mathcal{T}] \times L_2(0, 1)$ и $F(x)$, $\Phi(x)$ – заданные вещественные функции.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции F , Φ принадлежат классу $\mathfrak{C}^*$, где

$$F(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N,$$

$$\Phi(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N.$$

Предположим, что производящая функция $f(\xi_1, \dots, \xi_N)$ имеет непрерывные производные до порядка $[N/2] + 2$, а производящая функция $\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N)$ имеет непрерывные производные до порядка $[N/2] + 1$.

Тогда решение $U(t, x)$ задачи (14)–(16) принадлежит классу $\mathfrak{G}^*$ и задается следующими формулами.

а) При $N \geq 3$

$$U(t, x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\frac{1}{(N-2)!} \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(N-3)/2} r T_f(x(t_1), \dots, x(t_N); r) dr \right. \\ \left. + \frac{1}{(N-2)!} \frac{\partial^{N-2}}{\partial t^{N-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(N-3)/2} r T_\varphi(x(t_1), \dots, x(t_N); r) dr \right] \\ \times dt_1 \dots dt_N, \quad (17)$$

где

$$T_\psi(x(t_1), \dots, x(t_N); r) = \frac{1}{s_N} \int_{\|h\|_{\mathbb{R}^N}^2=1} \psi(x(t_1) + rh_1, \dots, x(t_N) + rh_N) d\sigma_N$$

– среднее значение функции $\psi(x(t_1) + rh_1, \dots, x(t_N) + rh_N)$ по сфере $\|h\|_{\mathbb{R}^N}^2 = 1$, $s_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$ – площадь и $d\sigma$ – элемент поверхности сферы $\|h\|_{\mathbb{R}^N}^2 = 1$.

б) При $N = 2$

$$U(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{h_1^2 + h_2^2 \leq 1} \frac{tf(x(t_1) + th_1, x(t_2) + th_2; t_1, t_2)}{\sqrt{1 - h_1^2 - h_2^2}} dh_1 dh_2 \right. \\ \left. + \iint_{h_1^2 + h_2^2 \leq 1} \frac{t\varphi(x(t_1) + th_1, x(t_2) + th_2; t_1, t_2)}{\sqrt{1 - h_1^2 - h_2^2}} dh_1 dh_2 \right] dt_1 dt_2. \quad (18)$$

в) При $N = 1$

$$U(t, x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[f(x(s) + t; s) + f(x(s) - t; s) + \int_{x(s)-t}^{x(s)+t} \varphi(\varrho; s) d\varrho \right] ds. \quad (19)$$

Решение задачи (14)–(16) единственно в рассматриваемом функциональном классе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Выражение (17) можно записать в виде

$$U(t, x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 u(t, x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N, \quad (20)$$

где функция $u(t, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N)$ – это решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^N$

$$\frac{\partial^2 u(t, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u(t, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N)}{\partial \xi_k^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < \xi_k < \infty, \quad (21)$$

$$u(0, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N) = f(\xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N), \quad (22)$$

$$\frac{\partial u(t, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N). \quad (23)$$

Решение задачи (21)–(23) имеет вид (см., например, [4])

$$\begin{aligned} u(t, \xi_1, \dots, \xi_N; t_1, \dots, t_N) \\ = \frac{1}{(N-2)!} \frac{\partial^{N-1}}{\partial t^{N-1}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(N-3)/2} r T_f(\xi_1, \dots, \xi_N; r) dr \\ + \frac{1}{(N-2)!} \frac{\partial^{N-2}}{\partial t^{N-2}} \int_0^t (t^2 - r^2)^{(N-3)/2} r T_\varphi(\xi_1, \dots, \xi_N; r) dr. \end{aligned}$$

Поскольку второй дифференциал функции $U(t, x)$ имеет нормальную форму, то, подставляя (20) в уравнение (14) и воспользовавшись формулой (13), получим

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t, x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} \right] \Big|_{\xi_k=x(t_k)} dt_1 \dots dt_N.$$

Поскольку u удовлетворяет (21), мы имеем

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \Delta_L U(t, x).$$

Полагая в (17) (или в (20)) $t = 0$, получим (в силу (22))

$$\begin{aligned} U(0, x) &= \int_0^1 \dots \int_0^1 u(0, x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N = F(x). \end{aligned}$$

Из (20) следует, что

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi_k=x(t_k)} dt_1 \dots dt_N.$$

Полагая $t = 0$, в силу (23) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0, \xi_k=x(t_k)} dt_1 \dots dt_N \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \varphi(x(t_1), \dots, x(t_N); t_1, \dots, t_N) dt_1 \dots dt_N = \Phi(x). \end{aligned}$$

б) Запишем выражение (18) в виде

$$U(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 u(t, x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (24)$$

где $u(t, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2)$ есть решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u(t, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u(t, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2)}{\partial \xi_k^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < \xi_k < \infty, \quad (25)$$

$$u(0, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = f(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2), \quad (26)$$

$$\frac{\partial u(t, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(\xi_1, \xi_2; t_1, t_2). \quad (27)$$

Единственное решение задачи (25)–(27) имеет вид (см., например, [4])

$$u(t, \xi_1, \xi_2; t_1, t_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{h_1^2 + h_2^2 \leq 1} \frac{tf(\xi_1 + th_1, \xi(t_2) + th_2; t_1, t_2)}{\sqrt{1 - h_1^2 - h_2^2}} dh_1 dh_2 \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{h_1^2 + h_2^2 \leq 1} \frac{t\varphi(\xi_1 + th_1, \xi_2 + th_2; t_1, t_2)}{\sqrt{1 - h_1^2 - h_2^2}} dh_1 dh_2.$$

Подставляя (24) в уравнение (14) и воспользовавшись формулой (13), получим

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t, x) = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} \right] \Big|_{\xi_k = x(t_k)} dt_1 dt_2.$$

Наконец, поскольку u удовлетворяет (25), мы получим

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \Delta_L U(t, x) = 0.$$

Полагая в (18) (или в (24)) $t = 0$ и используя (26), мы приходим к равенству

$$U(0, x) = \int_0^1 \int_0^1 u(0, x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ = \int_0^1 \int_0^1 f(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) dt_1 dt_2 = F(x).$$

Кроме того, из (24) следует, что

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi_k = x(t_k), k=1,2} dt_1 dt_2.$$

Полагая $t = 0$, с учетом (27) имеем

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0, \xi_k = x(t_k), k=1,2} dt_1 dt_2 \\ = \int_0^1 \int_0^1 \varphi(x(t_1), x(t_2); t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \Phi(x).$$

с) Из соотношения (19) вытекает, что

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[f'_\xi(x(s) + t; s) - f'_\xi(x(s) - t; s) \right. \\ \left. + \varphi(x(s) + t; s) + \varphi(x(s) - t; s) \right] ds, \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[f''_{\xi\xi}(x(s) + t; s) + f''_{\xi\xi}(x(s) - t; s) \right. \\ \left. + \varphi'_\xi(x(s) + t; s) - \varphi'_\xi(x(s) - t; s) \right] ds. \quad (29)$$

В результате с учетом (13) мы получаем

$$\Delta_L U(t, x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \left[f''_{\xi\xi}(x(s) + t; s) + f''_{\xi\xi}(x(s) - t; s) + \varphi'_\xi(x(s) + t; s) - \varphi'_\xi(x(s) - t; s) \right] ds. \quad (30)$$

Сравнивая выражения (29) и (30), получаем (14).

Если мы положим $t = 0$ в (19), то получим

$$U(0, x) = \int_0^1 f(x(s); s) ds = F(x).$$

Полагая в (28) $t = 0$, получим, что

$$\left. \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_0^1 \varphi(x(s); s) ds = \Phi(x).$$

Единственность решения задачи (14)–(16) в классе Гато вытекает из единственности решения задачи Коши (21)–(23) для конечномерного волнового уравнения. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. N. Feller, *The Lévy Laplacian*, Cambridge Tracts in Math., **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [2] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [3] Г. Е. Шилов, “О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве, Γ ”, *Функци. анализ и его прил.*, **1:2** (1967), 81–90.
- [4] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, v. II, Partial Differential Equations, Interscience Publ., New York, 1962.

С. А. Альбеверио

University of Bonn, Institute for Applied Mathematics

Поступило

12.11.2009

Я. И. Белополюская

Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: yanabeus@yahoo.com

М. Н. Феллер

Украинский НИИ механической обработки древесины