Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Об убывании бесконечных произведений тригонометрических полиномов, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 892–908

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:08:37

УДК 517.5

ОБ УБЫВАНИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В. Ю. Протасов

В работе рассматриваются бесконечные произведения вида $f(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$, где $\{m_k\}$ – произвольная последовательность тригонометрических полиномов степени не выше n , равномерно ограниченная по норме и такая, что $m_k(0) = 1$ для всех k . Доказывается, что $f(\xi)$ не может убывать на бесконечности быстрее, чем $O(\xi^{-n})$. Представлены условия на последовательность $\{m_k\}$, при которых максимальная скорость убывания достигается. Данный результат применим в теории нестационарных всплесков и нестационарных подразделительных схем. В частности, он ограничивает гладкость нестационарных всплесков длиной носителя порождающих функций. Это обобщает хорошо известные подобные результаты для стационарных последовательностей полиномов (когда все m_k равны). В нескольких примерах мы показываем, что ослабление условия равномерной ограниченности по норме может привести к экспоненциальному убыванию.

Библиография: 21 названия.

1. Введение. В работе будут использованы следующие обозначения: $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – множества соответственно натуральных, действительных и комплексных чисел, $\mathcal{P}_n$ – пространство алгебраических полиномов над $\mathbb{C}$ степени не выше n , $\mathcal{L}_1$ – пространство суммируемых функций на $\mathbb{R}$, S' – пространство обобщенных функций медленного роста (двойственное к пространству Шварца S); для данных функций $g_0(x)$ и $g_1(x)$ обозначаем $g_1 = o(g_0)$ при $x \rightarrow \infty$, если $g_1/g_0 \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$; также $g_1 = O(g_0)$ при $x \rightarrow \infty$, если существует такая константа $C > 0$, что $|g_1| \leq C|g_0|$ для всех достаточно больших x . Мы будем иметь дело с полиномами вида

$$m(\xi) = \sum_{s=0}^n c_s e^{-is\xi},$$

т.е. с тригонометрическими полиномами, не имеющими положительных степеней. Через $\tilde{m}$ обозначается соответствующий алгебраический полином

$$\tilde{m}(z) = \sum_{s=0}^n c_s z^s, \quad z \in \mathbb{C};$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 99-01-00357 и № 00-15-96109, а также фонда ИНТАС, грант № 99-01-080.

таким образом, $m(\xi) = \tilde{m}(e^{-i\xi})$. Как обычно, мы обозначаем $\|m\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |m(\xi)|$. Для соответствующего алгебраического полинома через $\|\tilde{m}\|$ обозначим норму на единичной окружности: $\|\tilde{m}\| = \sup_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |\tilde{m}(z)|$. Таким образом, $\|m\| = \|\tilde{m}\|$. Мы предполагаем всегда, что старший коэффициент c_n ненулевой, т.е. $\deg m = \deg \tilde{m} = n$. Далее, *скорость убывания* данной функции $g(\xi)$ (обозначается $\mathbf{d}(g)$) – это наибольшее целое число l такое, что $g(\xi) = o(\xi^{-l})$ при $|\xi| \rightarrow \infty$; если g убывает быстрее всякой степени, то полагается $\mathbf{d}(g) = +\infty$, если же таких целых l вовсе не существует, то $\mathbf{d}(g) = -\infty$.

Для произвольной последовательности полиномов $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такой, что $m_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, рассмотрим следующее бесконечное произведение:

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi). \quad (1)$$

Подобные произведения естественно возникают в теории всплесков (wavelets), при изучении подразделительных схем (subdivision schemes), используемых в теории приближений и в дизайне кривых и поверхностей (мы обсудим это позже), а также в некоторых проблемах теории вероятностей (см. [1]–[3]). Произведения такого типа используются также при анализе фрактальных кривых (например, кривых Де Рама, см. [4], [5]), свертков Бернулли (см. [6], [7]) и в некоторых задачах комбинаторной теории чисел (см. [8]).

При некоторых довольно общих условиях (например, когда нормы и степени всех полиномов равномерно ограничены) произведение (1) сходится равномерно на каждом компакте и, следовательно, представляет аналитическую функцию. Насколько быстро эта функция может убывать на бесконечности? В данной работе мы изучаем скорость убывания функции f в терминах последовательности $\{m_k\}$.

В частном случае, когда все полиномы m_k равны между собой, данная задача исследовалась чрезвычайно подробно (см. список литературы). Легко видеть, что в этом случае обратное преобразование Фурье функции $f_m(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m(2^{-k}\xi)$ существует, по крайней мере, в смысле обобщенных функций и удовлетворяет *масштабирующему уравнению*:

$$\check{f}_m(x) = 2 \sum_{s=0}^n c_s \check{f}_m(2x - s), \quad (2)$$

где $c_0, \dots, c_n$ – коэффициенты полинома m . Данное уравнение играет исключительную роль в теории всплесков (см., например, [9]), а также в теории приближений и дизайне кривых (см. [4], [5], [10], [11]). Нетрудно показать, что либо уравнение (2) вообще не имеет $\mathcal{L}_1$ -решений, либо функция $\check{f}_m$ является его единственным решением (в том случае, если $\check{f}_m \in \mathcal{L}_1$). Если скорость убывания функции f_m больше чем 1, то $\check{f}_m$ действительно принадлежит $\mathcal{L}_1$ и, более того, по крайней мере $\mathbf{d}(f_m)$ два раза дифференцируема. Поэтому гладкость решений масштабирующих уравнений может быть оценена с помощью скорости убывания соответствующих полиномиальных произведений f_m . Такая идея успешно использовалась в [12]–[14] и многих других работах по всплескам и масштабирующим функциям. Хорошо известно, что скорость убывания функции $f_m(\xi)$ не может превосходить $n - 1$, где $n = \deg m$, и эта максимальная скорость достигается только для полинома

$$m(\xi) = \left(\frac{e^{-i\xi} + 1}{2} \right)^n,$$

который мы обозначим через $w_{n-1}(\xi)$. Соответствующее произведение

$$f_w(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} w_{n-1}(2^{-k}\xi)$$

является преобразованием Фурье кардинального В-сплайна порядка $n - 1$: $B_{n-1}(x) = \chi_{[0,1]}(x) * \dots * \chi_{[0,1]}(x)$ (здесь $n - 1$ сверток, $\chi_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$). В самом деле,

$$f_w(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i2^{-k}\xi} + 1}{2} = \frac{[i(e^{-i\xi} - 1)]^n}{\xi^n} = \hat{B}_{n-1}(\xi).$$

Итак, для любого полинома m степени n имеем $\mathbf{d}(f_m) \leq n - 1$. Это неравенство обращается в равенство только в случае w_{n-1} , для которого, более того, $f_w(\xi) = O(\xi^{-n})$. Это так называемая *максимальность* В-сплайна (см. [4], [15], где приведены соответствующие доказательства; см. также [16], [17] о свойствах и применениях В-сплайнов). Данное свойство означает, в частности, что гладкость всплесков с носителем длины n не превосходит $n - 1$.

Возникает вопрос: насколько быстро может убывать функция (1) в общем случае, когда полиномы m_k , $k \in \mathbb{N}$, различны и выбираются произвольно? Можно ли получить более быстрый рост, выбирая подходящую последовательность полиномов степени не выше n ? Этот вопрос появился при изучении нестационарных всплесков с компактным носителем, представленных впервые в работах [18], [19]. Такие всплески также строятся с помощью произведения (1), однако полиномы $\{m_k\}$ в этом случае уже не обязаны совпадать. Задача была сформулирована профессором И. Я. Новиковым в 1999 году: может ли произведение (1), при условии, что степени полиномов m_k не превосходят n , а сами полиномы равномерно ограничены по норме, иметь бесконечную скорость убывания, т.е. убывать быстрее, чем полиномиально? Положительный ответ на этот вопрос привел бы к построению бесконечно гладких нестационарных всплесков с равномерно ограниченными носителями. Более точно: было бы возможно получить систему нестационарных всплесков, у которых порождающие функции всех уровней $\{F_{0j}(t)\}_{j \geq 0}$ являются бесконечно гладкими и при этом носители функций $F_{0j}(2^{-j}t)$, $j \geq 0$, содержатся в некотором отрезке $[-C, C]$ (см. [20]). Мы доказываем теорему 1, согласно которой ответ на данный вопрос отрицательный. Оказывается, что скорость убывания не только не может быть бесконечной, но и по-прежнему не может превосходить $n - 1$. Это означает, в частности, что гладкость нестационарных всплесков не может превосходить максимальной из длин носителей функций $F_{0j}(2^{-j}t)$, $j \geq 0$. Таким образом, в нестационарном случае ситуация подобна той, которую мы имеем для стационарных всплесков.

Данный результат также ограничивает гладкость функций, порождаемых нестационарными подразделительными схемами (см. [21], где приведены описание и применения таких схем). Здесь ситуация оказывается полностью аналогичной стационарному случаю: если суммы абсолютных величин коэффициентов схемы на всех шагах равномерно ограничены, то показатель гладкости схемы не превосходит n . Оптимальной, как и в стационарном случае, оказывается схема, соответствующая кардинальному В-сплайну.

Таким образом, максимальность В-сплайнов распространяется на широкий класс полиномиальных произведений: на произведения вида (1) для всех возможных последовательностей полиномов $\{m_k\}$ (с равномерно ограниченными степенями и нормами). Более того, мы покажем, что если полиномиальное произведение имеет максимальную скорость убывания $n - 1$, то соответствующая последовательность m_k сходится к полиному w_{n-1} , т.е. $\|m_k - w_{n-1}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В нескольких примерах мы покажем, что ни одно из условий теоремы 1 не может быть ослаблено. В частности (пример 2), если отказаться от равномерной ограниченности полиномов по норме, то можно построить произведение f , убывающее экспоненциально. Далее, в теореме 2, устанавливаются условия на последовательность $\{m_k\}$, при которых произведение f имеет быстрее возможное убывание, т.е. убывает как $O(\xi^{-n})$.

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что нам дана последовательность тригонометрических полиномов $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и числа $n \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$ такие, что $m_k(0) = 1$, $\deg m_k \leq n$, $\|m_k(\cdot)\| \leq M$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда скорость убывания функции*

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$$

не превосходит $n - 1$. Более того, если скорость убывания равна $n - 1$, то $m_k \rightarrow w_{n-1}$ при $k \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что скорость убывания не меньше, чем $n - 1$. Это означает, что

$$\xi^{n-1} f(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Положим $\sigma = 1/(2nM)$. Для каждого $\xi \in [-\sigma, \sigma]$, $j \geq 0$ и $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ имеем

$$\left| \prod_{k=1}^N m_{j+k}(2^{-k}\xi) \right| > \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Действительно, в силу неравенства Бернштейна $\|m'_{j+k}\| \leq nM$, поэтому

$$\begin{aligned} |m_{j+k}(2^{-k}\xi)| &\geq |m_{j+k}(0)| - 2^{-k}|\xi| \cdot \|m'_{j+k}\| \geq 1 - nM2^{-k}|\xi| \\ &\geq 1 - nM2^{-k}\sigma = 1 - 2^{-k-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \prod_{k=1}^N m_{j+k}(2^{-k}\xi) \right| \geq \prod_{k=1}^N (1 - 2^{-k-1}) > \frac{1}{2}.$$

Обозначим через p наименьшее целое число, для которого $2^p \geq 8\pi nM$. Теперь для произвольных $\delta \in (0, \sigma)$ и $l \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} f(2\pi \cdot 2^l + \delta) &= \prod_{k=1}^l m_k(2\pi \cdot 2^{l-k} + 2^{-k}\delta) \prod_{k=1}^p m_{l+k}(2\pi \cdot 2^{-k} + 2^{-l-k}\delta) \\ &\quad \times \prod_{k=1}^{\infty} m_{l+p+k}(2\pi \cdot 2^{-p-k} + 2^{-l-p-k}\delta). \end{aligned}$$

Применив (4) для $\xi = \delta, j = 0$ и $N = l$, получим

$$\left| \prod_{k=1}^l m_k (2\pi \cdot 2^{l-k} + 2^{-k}\delta) \right| = \left| \prod_{k=1}^l m_k (2^{-k}\delta) \right| > \frac{1}{2};$$

теперь применим (4) для $\xi = 2\pi \cdot 2^{-p} + 2^{-l-p}\delta, j = l+p$ и $N = +\infty$, получив

$$\left| \prod_{k=1}^{\infty} m_{l+p+k} (2\pi \cdot 2^{-p-k} + 2^{-l-p-k}\delta) \right| > \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\frac{|f(2\pi \cdot 2^l + \delta)|}{4} \geq \left| m_{l+1}(\pi + 2^{-l-1}\delta) m_{l+2} \left(\frac{\pi}{2} + 2^{-l-2}\delta \right) \cdots m_{l+p}(2^{1-p}\pi + 2^{-l-p}\delta) \right|. \quad (5)$$

По предположению $2^{l(n-1)}f(2\pi \cdot 2^l + \delta) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$, следовательно,

$$2^{l(n-1)} m_{l+1}(\pi + 2^{-l-1}\delta) m_{l+2} \left(\frac{\pi}{2} + 2^{-l-2}\delta \right) \cdots m_{l+p}(2^{1-p}\pi + 2^{-l-p}\delta) \rightarrow 0 \quad (6)$$

при $l \rightarrow \infty$.

Последнее выполнено для всех $\delta \in (0, \sigma)$. Теперь зададим положительное R и окружим каждую точку $\{e^{-2^{1-k}\pi i}\}_{k=1}^p$ и $\{e^{-3 \cdot 2^{1-k}\pi i}\}_{k=1}^p$ замкнутым кругом радиуса R (с центром в этой точке). Обозначим эти круги через $\{\beta_k\}_{k=1}^p$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^p$ соответственно. Таким образом, мы получаем семейство из $2p$ одинаковых кругов, в котором два круга β_1 и γ_1 совпадают. Сделаем радиус R настолько малым, чтобы все остальные круги не пересекались.

Возьмем произвольное $l \geq 0$ и рассмотрим цепочку соответствующих алгебраических полиномов $\tilde{m}_{l+1}, \dots, \tilde{m}_{l+p}$. Пусть круг β_k содержит s_k корней полинома $\tilde{m}_{l+k}$ (с учетом кратности корней). Если $s_k > 0$, то обозначим эти корни через $z_1^{(k)}, \dots, z_{s_k}^{(k)}$, а все остальные корни $\tilde{m}_{l+k}$ через $z_{s_k+1}^{(k)}, \dots, z_{n_k}^{(k)}$, где $n_k = \deg \tilde{m}_{l+k}$. Имеем

$$\tilde{m}_{l+k}(z) = A_k \tilde{\psi}_k(z) \tilde{q}_k(z),$$

где

$$\tilde{\psi}_k(z) = \prod_{j=1}^{s_k} (z - z_j^{(k)}), \quad \tilde{q}_k(z) = \prod_{\nu=s_k+1}^{n_k} \left(\frac{z - b_k}{z_{\nu}^{(k)} - b_k} - 1 \right),$$

$b_k = e^{-2^{1-k}\pi i}$ — центр круга β_k и A_k — некоторая константа (в случае $s_k = 0$ полагаем $\tilde{\psi}_k = 1$, если же $s_k = n_k$, то $\tilde{q}_k = 1$). Конечно же, величины $s_k, A_k, \tilde{\psi}_k, \tilde{q}_k$ зависят не только от k , но и от l , но для краткости обозначений мы не будем записывать это. Для любой точки z на единичной окружности имеем $|z - z_j| \leq 1 + R$ для $j = 1, \dots, s_k$ и

$$\left| \frac{z - b_k}{z_{\nu}^{(k)} - b_k} - 1 \right| < \frac{2}{R} + 1 \quad \text{для } \nu = s_k + 1, \dots, n_k.$$

Следовательно, $\|\tilde{\psi}_k\| \leq (1+R)^{s_k}$ и $\|\tilde{q}_k\| \leq (2/R+1)^{n_k-s_k}$. Теперь, применив неравенство $\|\tilde{m}_{l+k}\| \geq |\tilde{m}_{l+k}(1)| = 1$, получим

$$\begin{aligned} |A_k| &\geq \frac{\|\tilde{m}_{l+k}\|}{\|\tilde{\psi}_k\| \cdot \|\tilde{q}_k\|} \geq \frac{1}{(1+R)^{s_k} (2/R+1)^{n_k-s_k}} \\ &\geq \frac{1}{(1+R)^n (2/R+1)^n} = \left(\frac{2}{R} + R + 3\right)^{-n}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, обозначим через $\bar{\beta}_k$ замкнутый круг радиуса $R/2$ с центром в точке b_k . Для каждого $z \in \bar{\beta}_k$, $\nu = s_k + 1, \dots, n_k$, имеем

$$\left| \frac{z - b_k}{z_\nu^{(k)} - b_k} \right| < \frac{1}{2},$$

поэтому $|\tilde{q}_k(z)| > 2^{-n}$. Совместив это с (7), получаем

$$|\tilde{m}_{l+k}(z)| \geq 2^{-n} \left(\frac{2}{R} + R + 3\right)^{-n} |\tilde{\psi}_k(z)| \quad \text{для каждого } z \in \bar{\beta}_k.$$

Из этого следует, что для достаточно больших l , а именно для таких, что $2^{-l}\sigma \leq R$, имеем

$$\left| \prod_{k=1}^p m_{l+k}(2^{1-k}\pi + 2^{-l-k}\delta) \right| \geq \left[2^{-n} \left(\frac{2}{R} + R + 3\right)^{-n} \right]^p \left| \prod_{k=1}^p \psi_k(2^{1-k}\pi + 2^{-l-k}\delta) \right|,$$

где ψ_k — тригонометрический полином, соответствующий полиному $\tilde{\psi}$, т.е. $\psi(\xi) = \tilde{\psi}(e^{-i\xi})$. Подставив это в (6), получим

$$2^{l(n-1)} \prod_{k=1}^p \psi_k(2^{1-k}\pi + 2^{-l-k}\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Мы приходим к заключительному шагу в доказательстве. Окружим каждый корень полинома $\prod_{k=1}^p \tilde{\psi}_k(z)$ кругом радиуса $r = \sigma/(2^{l+p}\pi S)$, где $S = \sum_{k=1}^p s_k$. Каждый из этих кругов отсекает на единичной окружности дугу длиной меньшей πr . Следовательно, общая длина множества

$$\Delta_1 = \{\delta \in (0, \sigma) : \exists j \leq s_1 \mid |e^{-i(\pi + \delta 2^{-l-1})} - z_j^{(1)}| < r\}$$

меньше, чем $2^{l+1}\pi r s_1$. Точно так же показываем, что при любом $k = 2, \dots, p$ общая длина множества

$$\Delta_k = \{\delta \in (0, \sigma) : \exists j \leq s_k \mid |e^{-i(\pi 2^{-k} + \delta 2^{-l-k})} - z_j^{(k)}| < r\}$$

меньше, чем $2^{l+k} \pi r s_k$. Следовательно, общая длина всех множеств $\Delta_1, \dots, \Delta_p$ меньше, чем

$$2^l \pi r \sum_{k=1}^p 2^k s_k \leq 2^l \pi r 2^p \sum_{k=1}^p s_k = 2^{l+p} \pi r S = \sigma.$$

Следовательно, существует точка $\delta_0 \in (0, \sigma)$, не принадлежащая ни одному из этих множеств. Для этой точки имеем

$$\left| \prod_{k=1}^p \psi_k(2^{1-k} \pi + 2^{1-l-k} \delta_0) \right| \geq r^S.$$

Поскольку S не превосходит общего числа корней полиномов $\{m_{l+k}\}_{k=1}^p$, то $S \leq np$; следовательно,

$$\begin{aligned} r^S &= \left(\frac{\sigma}{2^{l+p} \pi S} \right)^S = (2^{l+p+1} M n \pi S)^{-S} \geq 2^{-S(l+p+1)} (M n \pi n p)^{-np} \\ &\geq 2^{-Sl} (2^{p+1} M n^2 \pi p)^{-np}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\left| \prod_{k=1}^p \psi_k(2^{1-k} \pi + \delta_0 2^{-l-k}) \right| \geq 2^{-Sl} (2^{p+1} M n^2 \pi p)^{-np}.$$

Теперь, применив (8), имеем $2^{l(n-1)} \cdot 2^{-lS} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$, поэтому $S \geq n$.

Напомним, что мы подсчитали количество всех корней полинома $\tilde{m}_{l+k}$ в круге β_k и вычислили сумму S этих чисел для k от 1 до p . Мы показали, что для каждого $l \geq 0$ эта сумма не меньше n . Точно так же доказывается, что аналогичная сумма, посчитанная для кругов $\{\gamma_k\}_{k=1}^p$ также больше или равна n . Теперь совместим эти два факта: рассмотрим общее число корней полиномов $\tilde{m}_{l+k}$ в кругах β_k и γ_k и вычислим сумму S_l таких чисел для всех k от 1 до p . Как мы показали, для каждого $l \geq 0$ возможны только два случая:

- 1) $S_l = n$, в этом случае все соответствующие корни лежат в круге β_0 ;
- 2) $S_l \geq n + 1$.

Докажем, что для достаточно больших l имеет место случай 1). Для этого возьмем целое N и оценим общее число корней полиномов $\tilde{m}_{l+1}, \dots, \tilde{m}_{l+p+N}$. Очевидно, всего корней не более $n(p+N)$. С другой стороны, число корней не меньше $\sum_{j=0}^N S_j$, поскольку каждый корень в этой сумме считается только один раз. Предположим теперь, что для M цепочек полиномов $\{\tilde{m}_{l+j+k}\}_{k=1}^p$ имеет место случай 2). Тогда $\sum_{j=0}^N S_l \geq n(N+1) + M$, поэтому $n(p+N) \geq n(N+1) + M$. Таким образом, $M \leq n(p-1)$. Следовательно, начиная с некоторого номера l_0 для всех цепочек имеет место случай 1). Таким образом, для каждого $k \geq l_0$ полином $\tilde{m}_k$ имеет ровно n корней в круге β_0 . По условиям теоремы это означает, что полином $\deg \tilde{m}_k$ имеет степень n и все его n корней лежат в круге β_0 . Итак, при каждом $R > 0$ существует номер $l_0(R)$ такой, что при любом $k \geq l_0(R)$ полином $\tilde{m}_k$ имеет степень n и все n его корней лежат в круге $|z+1| \leq R$. Таким образом, все n корней полинома $\tilde{m}_k$ стремятся к точке -1 при $k \rightarrow \infty$. Но поскольку для всех k выполнено $\tilde{m}_k(1) = 1$, из этого следует, что $\tilde{m}_k \rightarrow ((1+z)/2)^n$ и, соответственно, $m_k \rightarrow w_{n-1}$ при $k \rightarrow \infty$.

Если теперь предположить, что скорость убывания функции $f(\xi)$ не меньше n , то, применив те же рассуждения, устанавливаем, что $m_k \rightarrow w_n$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, $\deg m_k \geq n+1$ для всех достаточно больших k . Полученное противоречие завершает доказательство.

3. Примеры и замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически, мы доказали более сильное утверждение: если скорость убывания функции f с одной стороны не меньше $n-1$, т.е. $f(\xi) = o(\xi^{1-n})$ при $\xi \rightarrow +\infty$ или $\xi \rightarrow -\infty$, то $m_k \rightarrow w_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если степени полиномов m_k не ограничены, то, вообще говоря, скорость убывания функции f может быть бесконечна. Существуют последовательности полиномов, степени которых растут сколь угодно медленно, а функция f убывает быстрее любой степени. Более точно сформулируем так.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для произвольной неубывающей последовательности натуральных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = +\infty$, существует последовательность тригонометрических полиномов $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которой при всех k $\|m_k\| \leq 1$, $m_k(0) = 1$, $\deg m_k \leq a_k$ и при любом $d \geq 0$ $f(\xi) = o(\xi^{-d})$ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем последовательность $d_k = \min\{a_k, k\}$ и полиномы $m_k = w_{d_k-1}$. Легко видеть, что произведение

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$$

сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R}$, т.е. функция f корректно определена. Поскольку в этом случае $|m_k(\xi)| \leq 1$ при всех k и ξ , выполнено

$$\begin{aligned} |f(\xi)| &\leq \left| \prod_{k=r}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi) \right| = \left| \prod_{k=r}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-2^{-k}i\xi}}{2} \right)^{d_k} \right| \leq \left| \prod_{k=r}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-2^{-k}i\xi}}{2} \right) \right|^{d_r} \\ &= \widehat{|B_{d_r-1}(2^{1-r}\xi)|} \leq 2^{r d_r} |\xi|^{-d_r}. \end{aligned}$$

Так как $d_r \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$, то функция f убывает быстрее любой степени $1/\xi$. Другой пример таких последовательностей полиномов содержится в [20].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно теореме 1 для любой ограниченной по норме последовательности тригонометрических полиномов степени n функция f не может убывать быстрее, чем $O(\xi^{-n})$. Эта максимальная скорость убывания достигается для стационарной последовательности $m_k = w_{n-1}$, $k \in \mathbb{N}$, но не только для нее. Например, для произвольного $a > 0$ последовательность

$$m_k(\xi) = \left(\frac{e^{-i\xi} + a^{(1/2)^k}}{1 + a^{(1/2)^k}} \right)^n$$

обладает тем же свойством быстрейшего убывания. В теореме 2 мы установим критерий максимального убывания для последовательностей полиномов.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Возникает естественный вопрос, насколько существенно в формулировке теоремы 1 условие равномерной ограниченности полиномов по норме? Нельзя ли заменить его более слабым условием равномерной сходимости произведения

$$f(\xi) = \prod_{k=1}^{\infty} m_k(2^{-k}\xi)$$

на каждом компакте? Ответ отрицательный. Это может показаться парадоксальным. Если для ограниченной последовательности произведение $f(\xi)$ не может убывать слишком быстро, то для неограниченной последовательности оно должно быть еще больше и убывать еще медленнее. Тем не менее, в примере 2 мы увидим, что существует последовательность $\{m_k\}$, для которой $\deg m_k = 2$, $m_k(0) = 1$ при всех $k \geq 1$, и произведение $f(\xi)$ убывает экспоненциально при $|\xi| \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для алгебраических полиномов аналог теоремы 1 также верен, хотя в этом случае он не так интересен и устанавливается гораздо проще. Нетрудно показать, что для произвольной последовательности алгебраических полиномов $\{p_k\}$ с равномерно ограниченными степенями и нормами (на единичной окружности) и со свойством $p_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, соответствующее произведение

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} p_k(2^{-k}x)$$

вообще не может стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$. Однако опять, как и в случае тригонометрических полиномов, без предположения равномерной ограниченности норм этот аналог теоремы 1 не верен (см. пример 1).

ПРИМЕР 1. Для произвольного четного числа $d \geq 2$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует последовательность алгебраических полиномов $\{p_k\}$ такая, что для всех $k \geq 1$ $\deg p_k \leq d$, $p_k(0) = 1$, произведение $f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} p_k(2^{-k}x)$ сходится равномерно на каждом компакте и при этом

$$|f(x)| \leq C e^{-|x|^{d-\varepsilon}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\alpha \in (1, 2)$ рассмотрим семейство полиномов первой степени

$$Q_k(x) = 1 - \frac{2^k}{k^\alpha} x, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Произведение

$$f_Q(x) = \prod_{k=1}^{\infty} Q_k(2^{-k}x) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{k^\alpha}\right)$$

сходится равномерно на каждом компакте. Положим $x = y^\alpha$ для некоторого $y > 2$ и обозначим через I_y множество из четырех целых чисел $[y] - 1$, $[y]$, $[y] + 1$, $[y] + 2$,

где символом $[y]$ обозначено наибольшее целое, не превосходящее y . Обозначим также $J_y = \mathbb{N} \setminus I_y$. Имеем

$$f_Q(x) = \prod_{k \in J_y} Q_k(2^{-k}x) \prod_{k \in I_y} Q_k(2^{-k}x)$$

и, кроме того, $Q_k(2^{-k}x) \neq 0$ для всех $k \in J_y$. Далее,

$$\ln \left| \prod_{k \in J_y} Q_k(2^{-k}x) \right| = \sum_{k \in J_y} \ln \left| 1 - \left(\frac{y}{k} \right)^\alpha \right| = y \sum_{k \in J_y} \frac{1}{y} \ln \left| 1 - \left(\frac{k}{y} \right)^{-\alpha} \right|.$$

Заметим, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sum_{k \in J_y} \frac{1}{y} \ln \left| 1 - \left(\frac{k}{y} \right)^{-\alpha} \right| = \int_0^{+\infty} \ln |1 - t^{-\alpha}| dt$$

(аккуратное доказательство предельного перехода предоставляем читателю). Если мы теперь обозначим

$$b(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln |1 - t^{-\alpha}| dt,$$

то получим

$$|f_Q(y^\alpha)| = e^{b(\alpha)y + \omega(y)} \prod_{k \in I_y} |Q_k(2^{-k}y^\alpha)|,$$

где $\omega(y) = o(y)$ при $y \rightarrow +\infty$. Легко показать, что для достаточно больших y произведение

$$\prod_{k \in I_y} |Q_k(2^{-k}y^\alpha)| = \prod_{k \in I_y} \left| 1 - \left(\frac{k}{y} \right)^{-\alpha} \right|$$

меньше единицы, поэтому

$$|f_Q(y^\alpha)| \leq e^{b(\alpha)y + \omega(y)}. \quad (9)$$

Заметим теперь, что функция $b(\alpha)$ строго убывает на полуинтервале $(1, 2]$ и при этом $b(2) = 0$, следовательно, величина $b(\alpha)$ отрицательна при всех $\alpha \in (1, 2)$. Таким образом, функция f_Q имеет экспоненциальное убывание при $y \rightarrow +\infty$.

Теперь рассмотрим семейство полиномов

$$\left\{ p_k(x) = Q_k(x^d) = 1 - \frac{2^k}{k^\alpha} x^d \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

для некоторого четного d и для некоторого $\alpha \in (1, 2)$, выбранного таким образом, что $d/\alpha > d - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ дано). Используя (9), получаем

$$|f(x)| = |f_Q(x^d)| \leq e^{b(\alpha)|x|^{d/\alpha} + \omega(|x|^{d/\alpha})}$$

при всех x , достаточно больших по модулю. Так как величина $b(\alpha)$ отрицательна, то $|f(x)| \leq C e^{-|x|^{d-\varepsilon}}$ для подходящей константы C .

ПРИМЕР 2. Существует последовательность тригонометрических полиномов $\{m_k\}$ такая, что $\deg m_k = 2$, $m_k(0) = 1$ для каждого $k \geq 1$, и соответствующая функция $f(\xi)$ имеет экспоненциальное убывание при $|\xi| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для любого $\beta \in (1/2, 1)$ последовательность

$$\left\{ m_k(\xi) = e^{-i\xi} \frac{\cos \xi - \cos(k^\beta/2^k)}{1 - \cos(k^\beta/2^k)} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

является искомой. Так как $|m_k(\xi)| = |m_k(-\xi)|$ и, следовательно, $|f(\xi)| = |f(-\xi)|$, то мы можем ограничиться случаем $\xi \geq 0$. Далее, поскольку $\cos t = 1 - t^2/2 + h(t)$, где $0 \leq h(t) \leq t^4/24$, мы раскладываем каждый косинус и после элементарных упрощений получаем

$$|m_k(2^{-k}\xi)| = \left| \frac{1 - \xi^2/k^{2\beta} - (2^{2k+1}/k^{2\beta})(h(k^\beta/2^k) - h(\xi/2^k))}{1 - (2^{2k+1}/k^{2\beta})h(k^\beta/2^k)} \right|. \quad (10)$$

Разобьем произведение $f(\xi)$ на три части следующим образом:

$$f(\xi) = \prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} m_k(2^{-k}\xi) \prod_{k \in I(y), k > 6 \log_2 \xi} m_k(2^{-k}\xi) \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} m_k(2^{-k}\xi), \quad (11)$$

где $y = \xi^{1/\beta}$, а числовые множества I_y, J_y те же самые, что в примере 1. Оценим каждое из трех произведений.

а) Множители с номерами $k \leq 6 \log_2 \xi$. Так как

$$\|m_k\| = 2 / \left(1 - \cos \frac{k^\beta}{2^k} \right) = 2 / \left(\frac{1}{2} \frac{k^{2\beta}}{2^{2k}} - h(k^\beta/2^k) \right) \leq 2 / \left(\frac{1}{2} \frac{k^{2\beta}}{2^{2k}} - \frac{1}{24} \frac{k^{4\beta}}{2^{4k}} \right),$$

имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} |m_k(2^{-k}\xi)| &\leq \prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} \frac{1}{(k^{2\beta}/2^{2k+2})(1 - k^{2\beta}/(12 \cdot 2^{2k}))} \leq C_0 \prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} \frac{2^{2k+2}}{k^{2\beta}} \\ &\leq C_0 \prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} 2^{2k+2} \leq C_0 2^{36 \log_2^2 \xi + 18 \log_2 \xi}, \end{aligned}$$

где

$$C_0 = \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{k^2}{2^{2k}} \right) \right)^{-1}$$

— абсолютная константа.

б) Множители с номерами $k \in I(y)$, $k > 6 \log_2 \xi$. Для больших ξ

$$\prod_{k \in I(y)} |m_k(2^{-k}\xi)| \leq 1.$$

Доказательство оставляем читателю. Идея: при больших ξ каждый множитель этого произведения меньше единицы.

с) *Множители с номерами* $k \in J(y)$, $k > 6 \log_2 \xi$. *Знаменатели.* Обратимся к формуле (10) и оценим произведение знаменателей. Поскольку

$$\frac{2^{2k+1}}{k^{2\beta}} h\left(\frac{k^\beta}{2^k}\right) \leq \frac{2^{2k+1}}{k^{2\beta}} \frac{1}{24} \frac{k^{4\beta}}{2^{4k}} = \frac{1}{12} \frac{k^{2\beta}}{2^{2k}},$$

мы видим, что произведение

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{2^{2k+1}}{k^{2\beta}} h\left(\frac{k^\beta}{2^k}\right)\right)$$

сходится к некоторой положительной константе C_1 . Ясно, что

$$\prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left(1 - \frac{2^{2k+1}}{k^{2\beta}} h\left(\frac{k^\beta}{2^k}\right)\right) \geq C_1.$$

Числители. Имеем

$$\begin{aligned} & \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left|1 - \frac{\xi^2}{k^{2\beta}} - \frac{2^{2k+1}}{k^{2\beta}} \left(h\left(\frac{k^\beta}{2^k}\right) - h\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\right)\right| \\ &= \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left|1 - \frac{\xi^2}{k^{2\beta}}\right| \left|1 - \frac{(2^{2k+1}/k^{2\beta})[h(k^\beta/2^k) - h(\xi/2^k)]}{1 - \xi^2/k^{2\beta}}\right|. \end{aligned}$$

Если ξ достаточно велико, то для всех $k \in J(y)$

$$\left|1 - \frac{\xi^2}{k^{2\beta}}\right| = \left|1 - \left(\frac{y}{k}\right)^{2\beta}\right| \geq \left|1 - \left(\frac{y}{y+2}\right)^{2\beta}\right| \geq \frac{2}{y+2} \geq \frac{1}{y} = \xi^{-1/\beta} \geq \xi^{-2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left|1 - \frac{2^{2k}/(k^{2\beta})[h(k^\beta/2^k) - h(\xi/2^k)]}{1 - \xi^2/k^{2\beta}}\right| \\ & \leq \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left(1 + \frac{2^{2k}/(k^{2\beta} \cdot 24)(k^{4\beta}/2^{4k} + \xi^4/2^{4k})}{\xi^{-2}}\right) \\ & \leq \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left(1 + \left(\frac{\xi^6}{2^k}\right)^{1/3} \frac{k^{2\beta}}{24 \cdot 2^{5k/3}} + \frac{\xi^6}{2^k} \frac{1}{24 \cdot 2^k k^{2\beta}}\right) \\ & \leq \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} \left(1 + \frac{k^{2\beta}}{24 \cdot 2^{5k/3}} + \frac{1}{24 \cdot 2^k k^{2\beta}}\right) \leq C_2. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся результатом примера 1 для случая $d = 2$ и $\alpha = 2\beta$. Имеем

$$\prod_{k \in J(y)} \left|1 - \frac{\xi^2}{k^{2\beta}}\right| \leq e^{b(2\beta)\xi^{1/\beta} + \omega(\xi^{1/\beta})}.$$

Кроме того, для достаточно больших ξ

$$\prod_{k \leq 6 \log_2 \xi} \left| 1 - \frac{\xi^2}{k^{2\beta}} \right| \geq \left(\frac{\xi^2}{36 \log_2^2 \xi} - 1 \right)^{6 \log_2 \xi}.$$

Совместив полученные неравенства, выводим окончательно

$$\left| \prod_{k \in J(y), k > 6 \log_2 \xi} m_k(2^{-k} \xi) \right| \leq \frac{C_2}{C_1} e^{b(2\beta)\xi^{1/\beta} + \omega(\xi^{1/\beta})} \left(\frac{\xi^2}{36 \log_2^2 \xi} - 1 \right)^{-6 \log_2 \xi}.$$

Осталось подставить неравенства а), б) и с) в (11) и получить

$$\begin{aligned} |f(\xi)| &\leq C_0 2^{36 \log_2^2 \xi + 18 \log_2 \xi} \cdot \frac{C_2}{C_1} e^{b(2\beta)\xi^{1/\beta} + \omega(\xi^{1/\beta})} \left(\frac{\xi^2}{36 \log_2^2 \xi} - 1 \right)^{-6 \log_2 \xi} \\ &\leq e^{b(2\beta)\xi^{1/\beta} + \omega_1(\xi^{1/\beta})}, \end{aligned}$$

где $\omega_1(y) = o(y)$ при $y \rightarrow +\infty$. Теперь при любом значении $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать такое $\beta \in (1/2, 1)$, что $f(\xi) = O(e^{-|\xi|^{2-\varepsilon}})$.

4. Критерий быстреего убывания. В этом пункте мы собираемся сформулировать условия, при которых функция f имеет максимально возможную скорость убывания (см. замечание 3). Мы будем говорить, что последовательность тригонометрических полиномов $\{m_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (*), если существует положительная константа C_0 такая, что для всех достаточно больших k $\deg m_k = n$ и все n корней полинома $\tilde{m}_k$ лежат в круге $|z + 1| \leq C_0 2^{-k}$. Оказывается, что это условие эквивалентно максимальному убыванию.

ТЕОРЕМА 2. При условиях теоремы 1 $f(\xi) = O(\xi^{-n})$ в том и только том случае, если последовательность $\{m_k\}$ удовлетворяет условию (*).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Согласно данной теореме функция

$$f(\xi) = \prod m_k(2^{-k} \xi)$$

имеет максимально возможное убывание, если все корни алгебраических полиномов $\tilde{m}_k$ стремятся к точке -1 достаточно быстро. Легко видеть, что из совокупности условия (*) и условия $m_k(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, следует, что $\|m_k - w_{n-1}\| = O(2^{-k})$. Обратное, вообще говоря, неверно. Максимальное расстояние между корнем полинома $\tilde{m}_k$ и точкой -1 может убывать медленнее чем $\|m_k - w_{n-1}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Необходимость. Поступим так же, как в доказательстве теоремы 1. Возьмем произвольное $\delta \in (0, \sigma)$ и рассмотрим величину $f(2\pi \cdot 2^l + \delta)$. По предположению $f(2\pi \cdot 2^l + \delta) = O(2^{-ln})$ при $l \rightarrow \infty$. Применяя (5), получаем

$$\left| m_{l+1}(\pi + 2^{-l-1}\delta) m_{l+2}\left(\frac{\pi}{2} + 2^{-l-2}\delta\right) \cdots m_{l+p}(2^{1-p}\pi + 2^{-l-p}\delta) \right| = O(2^{-ln}) \quad (12)$$

при $l \rightarrow \infty$.

Согласно теореме 1 $m_j \rightarrow w_{n-1}$ при $j \rightarrow \infty$, следовательно, $\deg m_j = n$ для больших значений j и, более того, для k -го множителя ($k = 2, \dots, p$) в (12) имеем

$$\lim_{l \rightarrow \infty} m_{l+k}(2^{1-k}\pi + 2^{-l-k}\delta) = w_{n-1}(2^{1-k}\pi) \neq 0.$$

Таким образом, из (12) следует, что $|m_{l+1}(\pi + 2^{-l-1}\delta)| = O(2^{-ln})$ при $l \rightarrow \infty$. Обозначим через $\{z_s\}_{s=1}^n$ корни полиномов $\tilde{m}_{l+1}$; таким образом,

$$\tilde{m}_{l+1}(z) = a_{l+1} \prod_{s=1}^n (z - z_s),$$

где по теореме 1 $\lim_{l \rightarrow \infty} a_{l+1} = 2^{-n}$ (2^{-n} – старший коэффициент полинома w_{n-1}). Положим теперь $\rho = \max_s |z_s + 1|$; без ограничения общности полагаем $|z_n + 1| = \rho$. Так же, как в доказательстве теоремы 1, окружая каждую точку $z_1, \dots, z_{n-1}$ кругом радиуса $r = \sigma/(2^{l+1}\pi(n-1))$, показываем, что существует $\delta_0 \in (0, \sigma)$, для которого

$$\prod_{s=1}^{n-1} |e^{-i(\pi + 2^{-l-1}\delta_0)} - z_s| \geq r^{n-1}.$$

Следовательно, $|m_{l+1}(\pi + 2^{-l-1}\delta_0)| \geq |a_{l+1}(\rho - r)r^{n-1}|$, поэтому

$$a_{l+1}(\rho - r)2^{-(l+1)(n-1)} = O(2^{-ln}),$$

из чего заключаем $\rho = O(2^{-l})$ при $l \rightarrow \infty$.

Достаточность. Мы проведем доказательство для положительных ξ (случай отрицательных ξ рассматривается аналогично). Далее, мы можем ограничиться рассмотрением больших значений ξ , поэтому полагаем $\xi \geq 4\pi$. Более того, достаточно провести доказательство лишь для случая $n = 1$. Иначе говоря, мы докажем следующее: если последовательность комплексных чисел $\{z_k\}$ удовлетворяет условию (*), т.е. сходится к точке -1 так, что $|z_k + 1| \leq C_0 2^{-k}$, то

$$|f_1(\xi)| = \left| \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-i2^{-k}\xi} - z_k}{2} \right| = O\left(\frac{1}{\xi}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Действительно, если мы разложим каждый полином

$$m_k(\xi) = a_k \cdot 2^n \left(\frac{e^{-i\xi} - z_{1k}}{2} \right) \dots \left(\frac{e^{-i\xi} - z_{nk}}{2} \right)$$

и заметим, что в предположениях теоремы 2 $|a_k \cdot 2^n - 1| = O(2^{-k})$ при $k \rightarrow \infty$ (замечание 6), то получим, что последовательность полиномов $\prod_{k \in \mathbb{N}} (a_k \cdot 2^n)$ сходится к некоторой константе. Теперь, применив (13) к каждой последовательности полиномов

$$\left\{ \left(\frac{e^{-i\xi} - z_{sk}}{2} \right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad s = 1, \dots, n,$$

завершаем доказательство теоремы. Осталось доказать (13).

Обозначим $\xi = 2\pi x$ и представим x в двоичном разложении: $x = d_1 \dots d_l . d_{l+1} \dots$. Рассмотрим последовательность цифр перед точкой: $d_1 \dots d_l$. Она начинается с нескольких последовательных единиц $d_1 \dots d_{k_1}$, затем следует последовательность нулей $d_{k_1+1} \dots d_{k_2}$ и т.д. Предположим, что последняя цифра d_l – нуль (случай единицы рассматривается аналогично), таким образом, последовательность оканчивается серией нулей $d_{k_s+1} \dots d_l$. Наконец, положим $D = \{k_1, \dots, k_s\}$ – последовательность последних цифр серий. Обозначим $h_k(\xi) = (e^{-i2^{-k}\xi} - z_k)/2$ и разложим произведение (13) на три части:

$$f_1(2\pi x) = \left(\prod_{k=1}^{l-k_s} h_k \right) \cdot h_{l-k_s+1} \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} h_k.$$

Оценим каждую из частей по отдельности.

а) Поскольку

$$|h_k| \leq \frac{1 + |z_k|}{2} \leq \frac{2 + |z_k - 1|}{2} \leq 1 + C_0 2^{-k-1} \leq e^{C_0 2^{-k-1}},$$

получаем

$$\left| \prod_{k=1}^{l-k_s} h_k(2\pi x) \right| \leq e^{C_0/2}.$$

б) Имеем $h_{l-k_s+1}(2\pi x) = (e^{-2\pi i \bar{x}} - z_{l-k_s+1})/2$, где

$$\bar{x} = \{2^{k_s-l-1}x\} = 2^{k_s-l-1}x - [2^{k_s-l-1}x] = 0.10 \dots 0d_{l+1} \dots$$

($l - k_s$ нулей после точки). Итак, $|2\pi \bar{x} - \pi| \leq \pi 2^{k_s-l}$, поэтому

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-2\pi i \bar{x}} - z_{l-k_s+1}}{2} \right| &\leq \frac{|e^{-2\pi i \bar{x}} - e^{-i\pi}| + |e^{-i\pi} - z_{l-k_s+1}|}{2} \leq \frac{\pi 2^{k_s-l} + C_0 2^{k_s-l-1}}{2} \\ &\leq (2\pi + C_0) 2^{k_s-l-2}. \end{aligned}$$

с) Имеем

$$\begin{aligned} \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} |h_k| &= \left| \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1}{2} \right| \cdot \left| \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} \left(1 - \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right) \right| \\ &\leq \left| \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} w_0(2^{-k} \cdot 2\pi x) \right| \cdot \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \right) \\ &\leq \frac{2}{2^{k_s-l-1} \cdot 2\pi x} \prod_{k=l-k_s+2}^{\infty} \left(1 + \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \right) \\ &\leq \frac{2}{2^{k_s-l-1} \cdot 2\pi x} \exp \left(\sum_{k \geq l-k_s+2} \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \right). \end{aligned}$$

Для того чтобы оценить слагаемые в последней сумме, рассмотрим два возможных случая.

1) В двоичной записи числа $\bar{x} = \{2^{-k}x\}$ две первые цифры после точки равны. Это означает, что число k не представляется в форме $k = l - k_j + 1$ ни для какого $k_j \in D$, иными словами, $l - k + 1 \notin D$. Тогда $|\bar{x} - 1/2| \geq 1/4$, следовательно, $|e^{-2\pi i \bar{x}} + 1| > 1$ и, таким образом,

$$\left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \leq |z_k + 1| \leq C_0 2^{-k}.$$

Итак,

$$\sum_{\substack{k \geq l - k_s + 2 \\ l - k + 1 \notin D}} \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \leq \sum_{\substack{k \geq l - k_s + 2 \\ l - k + 1 \notin D}} C_0 2^{-k} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} C_0 2^{-k} \leq C_0. \quad (14)$$

2) В двоичной записи числа $\bar{x}$ две первые цифры после точки различны, т.е. число k представляется в форме $k = l - k_j + 1$ для некоторого $k_j \in D$. В этом случае $|\bar{x} - 1/2| \geq 2^{k_j - k_{j+1} - 1}$, поэтому $|e^{-2\pi i \bar{x}} + 1| \geq 2^{k_j - k_{j+1} + 1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k \geq l - k_s + 2 \\ l - k + 1 \in D}} \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| &\leq \sum_{\substack{k = l - k_j + 1 \\ k_j \in D}} \frac{C_0 2^{-k}}{2^{k_j - k_{j+1} + 1}} = \sum_{j=1}^s \frac{C_0 2^{k_j - l - 1}}{2^{k_j - k_{j+1} + 1}} \\ &= \sum_{j=1}^s C_0 2^{k_{j+1} - l - 2} \leq \sum_{k=1}^l C_0 2^{k - l - 2} < \frac{1}{2} C_0. \end{aligned}$$

Применив теперь (14), получаем

$$\sum_{k \geq l - k_s + 2} \left| \frac{z_k + 1}{e^{-2\pi i 2^{-k}x} + 1} \right| \leq \frac{3}{2} C_0.$$

Итак, в случае с) имеем

$$\prod_{k \geq l - k_s + 2} |h_k| \leq \frac{1}{2^{k_s - l - 2} \cdot 2\pi x} e^{3C_0/2}.$$

Теперь случаи а), б) и с) вместе дают

$$\begin{aligned} |f_1(\xi)| &= |f_1(2\pi x)| < e^{C_0/2} \cdot (2\pi + C_0) 2^{k_s - l - 2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 2^{k_s - l - 2} x} e^{3C_0/2} \\ &\leq \frac{e^{2C_0}(2\pi + C_0)}{2\pi x} = \frac{e^{2C_0}(2\pi + C_0)}{\xi}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Автор выражает признательность профессору Воронежского государственного университета И.Я. Новикову и профессору Московского государственного университета С.В. Конягину за полезные обсуждения и постоянное внимание к данной работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Derfel G. A. A probabilistic method for a class of functional-differential equations // *Ukrain. Math. J.* 1989. V. 41. № 10. P. 1137–1141.
- [2] Derfel G. A., Dyn N., Levin D. Generalized refinement equations and subdivision processes // *J. Approximation Theory*. 1995. V. 80. P. 272–297.
- [3] Protasov V. Refinement equations with nonnegative coefficients // *J. Fourier Anal. Appl.* 2000. V. 6. № 6. P. 55–78.
- [4] Cavaretta D., Dahmen W., Micchelli C. Stationary subdivision // *Mem. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 93. P. 1–186.
- [5] Dyn N., Gregory J. A., Levin D. Analysis of linear binary subdivision schemes for curve design // *Constructive Approximation*. 1991. V. 7. P. 127–147.
- [6] Erdős P. On the smoothness properties of Bernoulli convolutions // *Amer. J. Math.* 1940. V. 62. P. 180–186.
- [7] Peres Y., Solomyak B. Absolute continuity of Bernoulli convolution, a simple proof // *Math. Res. Letters*. 1996. V. 3. № 2. P. 231–239.
- [8] Reznick B. Some binary partition functions // *Analytic Number Theory (Allerton Park II, 1989)*. P. 451–477.
- [9] Chui C. K. An Introduction to Wavelets // *Acad. Press Inc.* 1992.
- [10] Dyn N., Levin D. Interpolatory subdivision schemes for the generation of curves and surfaces // *Multivariate Approximation and Interpolation (Duisburg, 1989)*. Basel: Birkhäuser, 1990. P. 91–106.
- [11] Ron A. Smooth refinable functions provide good approximation // *SIAM J. Math. Anal. Appl.* 1997. V. 28. P. 731–748.
- [12] Daubechies I. Orthonormal bases of wavelets with compact support // *Comm. Pure Appl. Math.* 1988. V. 41. P. 909–996.
- [13] Cohen A., Daubechies I. A new technique to estimate the regularity of refinable functions // *Rev. Mat. Iberoamericana*. 1996. V. 12. № 2. P. 527–591.
- [14] Ron A., Shen Z. The Sobolev Regularity of Refinable Functions. Preprint, 1997.
- [15] Daubechies I., Lagarias J. Two-scale difference equations. I. Global regularity of solutions // *SIAM J. Math. Anal. Appl.* 1991. V. 22. P. 1388–1410.
- [16] Daubechies I., Lagarias J. Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals // *SIAM J. Math. Anal. Appl.* 1992. V. 23. P. 1031–1079.
- [17] Schumaker L. L. Spline Functions: Basic Theory. New York: John Wiley, 1981.
- [18] Берколайко М. З., Новиков, И. Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // *Докл. РАН*. 1992. Т. 326. № 6. С. 615–618.
- [19] de Boor C., DeVore R., Ron A. On the construction of multivariate pre-wavelets // *Constructive Approximation*. 1993. V. 2. № 3. P. 123–166.
- [20] Новиков И. Я. Базисы всплесков функциональных пространств. Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2000.
- [21] Cohen A., Dyn N. Nonstationary subdivision schemes and multiresolution analysis // *SIAM J. Math. Anal. Appl.* 1996. V. 27. P. 1745–1769.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: protasov@dionis.iasnet.ru

Поступило
25.07.2001
Исправленный вариант
29.04.2002