Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Тюрин, О совпадении спектров линейных дифференциальных операторов с частными производными в некоторых функциональных пространствах, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 909–917

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 16:55:45

УДК 517.98

О СОВПАДЕНИИ СПЕКТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. М. Тюрин

Для линейных дифференциальных операторов с коэффициентами класса C на $\mathbb{R}^n$ доказаны теоремы об одновременной обратимости и совпадении спектров в пространствах Лебега L^p , Степанова M^p и одном банаховом пространстве $V^p \subset L^p$, $p \geq 1$.

Библиография: 14 названий.

В заметке изучается одновременная обратимость и совпадение спектров линейных дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ в нормированных пространствах L^p , M^p , V^p , описание которых приведено ниже. В пространстве V^p дано выражение L^p -резольвенты возмущенного дифференциального оператора.

Обратимость линейных дифференциальных операторов в различных пространствах функций, определенных на бесконечных интервалах или $\mathbb{R}^n$, рассматривались по тем или иным соображениям во многих работах, см., например, [1]–[8].

1. Функциональные пространства. Пусть $L^p = L^p(\mathbb{R}^n, X)$ ($1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, X – банахово комплексное пространство) – лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ с обычной нормой; $M^p = M^p(\mathbb{R}^n, X)$ – пространство Степанова сильно измеримых функций $u: \mathbb{R}^n \rightarrow X$ с конечной нормой

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{K(x)} \|u(x)\|^p dx \right)^{1/p},$$

где $K(x)$ – единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ – норма в X ; $V^p = V^p(\mathbb{R}^n, X)$ – линейное нормированное пространство всех функций $u \in L^p$, для которых

$$\|u\|_{V^p} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j-1} \int_{R_j} \|u(x)\|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

$R_1 = \{x: x \in \mathbb{R}^n, 0 < |x| < 1\}$, $R_j = \{x: x \in \mathbb{R}^n, 2^{j-2} < |x| < 2^{j-1}\}$, $j = 2, 3, \dots$

Обозначим через $F = F(\mathbb{R}^n, X)$ одно из пространств L^p , M^p , V^p . Пространство Соболева $W^m(F)$ состоит из функций $u \in F$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha u \in F$, $|\alpha| \leq m$; при этом

$$\|u\|_{W^m(F)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_F, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $m \in \mathbb{N}$. Как известно, пространства $W^m(L^p)$, $W^m(M^p)$ – банаховы пространства [9], [10]. Аналогичный результат справедлив для $W^m(V^p)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пространства V^p , $W^m(V^p)$ являются банаховыми пространствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $u \in W^m(V^p)$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $W^0(V^p) = V^p$) имеет место неравенство

$$\|u\|_{W^m(L^p)} \leq 2^{1/p} \|u\|_{W^m(V^p)}. \quad (1)$$

Возьмем фундаментальную последовательность $u_j \in W^m(V^p)$, $j \in \mathbb{N}$. Согласно неравенству (1)

$$\|u_j - u_i\|_{W^m(L^p)} \leq 2^{1/p} \|u_j - u_i\|_{W^m(V^p)},$$

откуда заключаем, что последовательность u_j фундаментальна в $W^m(L^p)$ и, значит, существует предел $u = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j$ в $W^m(L^p)$. Покажем, что $u \in W^m(V^p)$. Пусть $\ell \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \left(2^{\nu-1} \int_{R_{\nu}} \|D^{\alpha} u(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq \|D^{\alpha} u - D^{\alpha} u_j\|_{L^p} \cdot \frac{1 - 2^{\ell/p}}{1 - 2^{1/p}} + M,$$

$$M = \sup_j \|D^{\alpha} u_j\|_{V^p} < \infty, \quad |\alpha| \leq m.$$

Переходя к пределу по $j \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \left(2^{\nu-1} \int_{R_{\nu}} \|D^{\alpha} u(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq M.$$

Так как ℓ и α произвольны, то из последнего неравенства следует $u \in W^m(V^p)$, т.е. $W^m(V^p)$ – банахово пространство. Теорема доказана.

Отметим, что пространства $W^m(V^p)$ тесно связаны с пространствами Бесова B_p^s [10], [11]. Пространство $B = V^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ описано в [12, гл. 14].

2. Корректность линейных дифференциальных операторов в пространствах $W^m(F)$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $P: W^m(F) \rightarrow F$ в частных производных, действующих по формуле

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha}(x) i^{-|\alpha|} D^{\alpha} u.$$

Коэффициенты $A_{\alpha} \in C(\mathbb{R}^n, \text{End } X)$, т.е. операторные функции $A_{\alpha}: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{End } X$ непрерывны и ограничены ($\text{End } X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов $A: X \rightarrow X$). Очевидно, оператор $P: W^m(F) \rightarrow F$ непрерывен, так как

$$\|Pu\|_F \leq \max_{|\alpha| \leq m} \|A_{\alpha}\|_C \cdot \|u\|_{W^m(F)}.$$

Оператор $P: W^m(F) \rightarrow F$ назовем ℓ -*корректным*, если существует такая постоянная $K = K(P, W^{\ell}(F)) > 0$, что выполняется неравенство

$$\|u\|_{W^{\ell}(F)} \leq K \|Pu\|_F \quad u \in W^m(F), \quad \ell = 0, 1, \dots, m, \quad W^0(F) = F.$$

Понятие корректности линейных дифференциальных операторов введено в [2] при изучении некоторых вопросов обратимости и устойчивости (см. также [3], [13, с. 166]).

ТЕОРЕМА 2. *Операторы*

$$P: W^m(L^p) \rightarrow L^p, \quad P: W^m(M^p) \rightarrow M^p, \quad P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$$

ℓ -корректны ($l = m - 1, m$) одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность свойств ℓ -корректности операторов

$$P: W^m(L^p) \rightarrow L^p \quad \text{и} \quad P: W^m(M^p) \rightarrow M^p$$

доказана в [14]. Поэтому установим лишь, что операторы

$$P: W^m(L^p) \rightarrow L^p \quad \text{и} \quad P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$$

ℓ -корректны одновременно.

Для произвольных $T > 1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ построим гладкую финитную функцию $\varphi(x, \xi, T): \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ с носителем $\text{supp } \varphi$ в шаре $B(\xi, 2T) \subset \mathbb{R}^n$, причем $\varphi(x, \xi, T) = 1$ при $x \in B(\xi, T)$ и $|D^\alpha \varphi| \leq b_0 T^{-|\alpha|}$ (b_0 не зависит от $T, \alpha \in 0$). Функция $\varphi_1 = \varphi_1(x, j) = \varphi(x, 0, 2^{j-1}) - \varphi(x, 0, 2^{j-3})$ финитна и $|D^\alpha \varphi_1| \leq b_1/2^{j-3}$ ($\alpha \neq 0, j \geq s, \mathbb{N} \ni s \geq 4, b_1$ не зависит от s, j).

Пусть оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ ℓ -корректен. Возьмем произвольную функцию $u \in W^m(V^p)$ и применим оператор P к функции $\varphi_1 u$:

$$P(\varphi_1 u) = \varphi_1 Pu + Q(u, \varphi_1), \quad (2)$$

$Q(u, \varphi)$ – дифференциальный оператор порядка $m - 1$ по переменной u . В силу свойств функции φ_1 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|Q(u, \varphi_1)\|_{L^p} &\leq \frac{b_2}{2^{j-3}} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left(\int_{2^{j-3} < |x| < 2^j} \|D^\alpha u(x)\|^p dx \right)^{1/p}, \\ \|Q(u, \varphi_1)(x)\|_{L^p} &\leq \frac{b_2}{2^{j-3}} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \|D^\alpha u(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (3)$$

с некоторой постоянной b_2 , не зависящей от u, s, j . Согласно (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} &\left(2^{j-1} \int_{2^{j-2} < |x| < 2^{j-1}} \|D^\alpha u(x)\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq K_1 2^{1/p} \left(2^{j-2} \int_{2^{j-3} < |x| < 2^{j-2}} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + K_1 \left(2^{j-1} \int_{2^{j-2} < |x| < 2^{j-1}} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + K_1 2^{-1/p} \left(2^j \int_{2^{j-1} < |x| < 2^j} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{K_1 b_2}{2^{j-3}} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \left(2^{1/p} \left(2^{j-2} \int_{2^{j-3} < |x| < 2^{j-2}} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + \left(2^{j-1} \int_{2^{j-2} < |x| < 2^{j-1}} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \right. \\ &\quad \left. + 2^{-1/p} \left(2^j \int_{2^{j-2} < |x| < 2^j} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$K_1 = K(P, W^\ell(L^p))$, $|\alpha| \leq \ell$. Из (4) нетрудно вывести неравенство

$$\|D^\alpha u\|_{V^p} \leq K_1 \frac{2^{s/p} - 1}{2^{1/p} - 1} \|Pu\|_{V^p} + K_1 d(p) \|Pu\|_{V^p} + \frac{b_2 K_1}{2^{s-3}} d(p) \|u\|_{W^\ell(V^p)},$$

$$d(p) = 2^{1/p} + 1 + 2^{-1/p}.$$

Если s выбрать так, чтобы

$$b_2 d(p) K_1 N < 2^{s-4},$$

где N – число производных порядка $|\alpha| \leq \ell$, то

$$\|u\|_{W^\ell(V^p)} \leq C_1 K_1 \|Pu\|_{V^p},$$

$$C_1 = 2N \frac{2^{s/p} - 1}{2^{1/p} - 1} + 2Nd(p). \quad (5)$$

Неравенство (5) означает, что оператор $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ ℓ -корректен с постоянной корректности $K_3 = K(P, W^\ell(V^p)) \leq C_1 K_1$ ($K_2 = K(P, W^\ell(M^p))$).

Предположим теперь, что оператор $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ ℓ -корректен. Тогда имеет место следующее локальное неравенство:

$$\sum_{|\alpha| \leq \ell} \sum_{\nu=1}^j \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \leq K_3 \sum_{\nu=1}^{j+1} \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} + \frac{b_2 K_3^2}{2^{j-1}} \|Pu\|_{V^p}, \quad (6)$$

вывод которого аналогичен выводу неравенства (4) (при $j \in \mathbb{N}$, $j > 2$).

Пусть $u \in W^m(L^p)$. Функция $\varphi(x, 0, 2^j)u \in W^m(V^p)$, поэтому, применяя к ней неравенство (6), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^j \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} &\leq K_3 \sum_{\nu=1}^{j+1} \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{b_2 K_3^2}{2^{j-1}} \sum_{\nu=1}^{j+1} \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\quad + \frac{b_2^2 K_3^2}{2^{2j-1}} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{\nu=1}^{j+2} \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|Pu\|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда получаем оценку

$$\left(\int_{0 < |x| < 2^{j-1}} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \leq a_1(j) \|Pu\|_{L^p} + a_2(j) \|u\|_{W^\ell(L^p)}, \quad |\alpha| \leq \ell,$$

$$a_1(j) = K_3 + \frac{b_2 K_3^2}{2^j} \left(\frac{2^{q(j+2)/p} - 1}{2^{q/p} - 1} \right)^{1/q}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad (8)$$

$$a_1(j) = 2^{j+1} \left(K_3 + \frac{K_3 + b_2 K_3^2}{2^{j-1}} \right), \quad p = 1,$$

$$a_2(j) = \frac{b_2^2 K_3^2}{2^{2j-1}} \left(\frac{2^{q(j+2)/p} - 1}{2^{q/p} - 1} \right)^{1/q}, \quad p < 1, \quad a_2(j) = \frac{b_2^2 K_3^2}{2^{j-1}}, \quad p = 1.$$

Следует заметить, что неравенство (8), впрочем, как и все остальные неравенства, носит исключительно качественный характер. Далее, из равенства (2) и ℓ -коэрцитивности оператора $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ находим

$$\begin{aligned} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p &\leq \int_{0 < |x| < 2^{j-1}} \|D^\alpha u\|^p dx + \frac{7}{2} 6^{p-1} K_3^p \|Pu\|_{L^p}^p \\ &\quad + \frac{7}{2} 6^{p-1} N^{p-1} \left(\frac{b_2 K_3^2}{2^{j-3}} \right)^p \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^\ell(L^p)} &\leq \left(\left(\frac{7}{2} \right)^{1/p} 6^{(p-1)/p} K_3 + a_1(j) \right) N \|Pu\|_{L^p} \\ &\quad + \left(\left(\frac{7}{2} \right)^{1/p} N^{(p-1)/p} \frac{b_2 K_3}{2^{j-3}} + a_2(j) \right) N \|u\|_{W^\ell(L^p)}. \end{aligned}$$

Так как $a_2(j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^\ell(L^p)} &\leq C_3 K_3 \|Pu\|_{L^p}, \\ C_3 &= 2N \left(\left(\frac{7}{2} \right)^{1/p} 6^{(p-1)/p} + \frac{a_1(j)}{K_3} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Неравенство (10) показывает, что оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ ℓ -корректен и $K_1 \leq C_3 K_3$. Теорема доказана.

3. Обратимость операторов $P: W^m(F) \rightarrow F$.

ТЕОРЕМА 3. *Если обратим один из операторов*

$$P: W^m(L^p) \rightarrow L^p, \quad P: W^m(M^p) \rightarrow M^p, \quad P: W^m(V^p) \rightarrow V^p,$$

то остальные два оператора также обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ обратим и $f \in V^p$. Тогда уравнение $Pu = f$ имеет единственное решение $u \in W^m(L^p)$. Покажем, что $u \in W^m(V^p)$. Обратимый оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ m -корректен (это вытекает из непрерывности оператора $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ и теоремы Банаха). По теореме 2 оператор $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ тоже m -корректен. Следовательно, имеет место неравенство (7), из которого при $b_2^2 K_3^2 N < 2^{2j-2}$ получим

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{\nu=1}^j \left(2^{\nu-1} \int_{R_\nu} \|D^\alpha u\|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq N \left(2K_3 + \frac{b_2 K_3^2}{2^{j-2}} \right) \|Pu\|_{V^p} + 2^{2-2j} b_2^2 K_3^2 N (2^{j/p} + 2^{j+1/p}) \|u\|_{W^m(L^p)}. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть ограничена относительно j , то $u \in W^m(V^p)$, а оператор $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ обратим.

Предполагая теперь обратимость оператора $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$, возьмем произвольный элемент $f \in L^p$ и положим $f_j = \varphi(x, 0, 2^j)f$. Ясно, что $f_j \in V_1^p$ и уравнение $Pu = f_j$ имеет единственное решение $u_j \in W^m(V^p)$. По теореме Банаха оператор $P: W^m(V^p) \rightarrow V^p$ непрерывно обратим и автоматически m -корректен. Согласно теореме 2 оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ m -корректен. В этом случае имеет место неравенство [14]

$$\left(\int_{0 < |x| < 2^j} \|D^\alpha u_j(x) - D^\alpha u_i(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq a_3 \left(\int_{0 < |x| < 2^{j+1}} \|f_j(x) - f_i(x)\|^p dx \right)^{1/p} + \frac{a_4}{2^j} \|f_j - f_i\|_{L^p}, \quad |\alpha| \leq m,$$

где постоянные $a_3, a_4 > 0$ не зависят от j и $u(x)$, $i > j$. Отсюда следует, что последовательность u_j локально фундаментальна в $W^m(L^p)$ и локально сходится к некоторой функции $u \in W^m(L^p)$ (ограниченность u_j в $W^m(L^p)$ следует из m -корректности оператора $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$). Оператор $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ локально непрерывен, т.е. если последовательность u_j локально сходится в $W^m(L^p)$ к u и последовательность $Pu_j = f_j$ локально сходится в L^p к f , то $Pu = f$. Поэтому из равенства $Pu_j = f_j$ получаем $Pu = f$. Так как f — произвольный элемент из L^p , то $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ обратим (непрерывно). Так как согласно [14] операторы $P: W^m(L^p) \rightarrow L^p$ и $P: W^m(M^p) \rightarrow M^p$ обратимы одновременно, то теорема доказана.

4. Теорема о совпадении спектров. Резольвента возмущенного оператора в V^p . Рассмотрим оператор P в пространстве F на области определения $D(P, F) = W^m(F)$.

ТЕОРЕМА 4. Спектры операторов

$$P: D(P, L^p) \rightarrow L^p, \quad P: D(P, V^p) \rightarrow V^p, \quad P: D(P, M^p) \rightarrow M^p$$

совпадают; L^p -резольвента оператора P является непрерывным оператором в V^p , а M^p -резольвента оператора P есть непрерывный оператор в L^p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. F -резольвента оператора P представляет собой непрерывный оператор $R(\lambda, P, F) = (P - \lambda)^{-1}: F \rightarrow D(P, F)$. Поэтому, привлекая теорему Банаха об обратном операторе, заключаем, что λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(P, F)$ оператора $P: D(P, F) \rightarrow F$ тогда и только тогда, когда обратим оператор $(P - \lambda): W^m(F) \rightarrow F$. По теореме 3 операторы $(P - \lambda): W^m(L^p) \rightarrow L^p$, $(P - \lambda): W^m(V^p) \rightarrow V^p$, $(P - \lambda): W^m(M^p) \rightarrow M^p$ обратимы одновременно, т.е. $\rho(P, L^p) = \rho(P, V^p) = \rho(P, M^p)$. Отсюда следует совпадение спектров: $\sigma(P, L^p) = \sigma(P, V^p) = \sigma(P, M^p)$.

Поскольку $V^p \subset L^p$, то при любом $f \in V^p$ уравнение $(P - \lambda)u = f$ ($\lambda \in \rho(P, L^p)$) имеет единственное решение $u = R(\lambda, P, L^p)f \in W^m(L^p)$. На самом деле по теореме 3 $u \in W^m(V^p)$; при этом

$$\|u\|_{V^p} \leq \|u\|_{W^m(V^p)} \leq K_3(\lambda) \|(P - \lambda)u\|_{V^p},$$

откуда

$$\|R(\lambda, P, L^p)f\|_{V^p} \leq K_3(\lambda) \|f\|_{V^p}.$$

Таким образом, оператор $R(\lambda, P, L^p): V^p \rightarrow V^p$ непрерывен. Аналогично рассматривается непрерывность оператора $R(\lambda, P, M^p): L^p \rightarrow L^p$. Теорема доказана.

В теории рассеяния [12, гл. 14] полезно иметь представление L^p -резольвенты возмущенного оператора $P_1 = P + Q$ в пространстве V^p через L^p -резольвенту исходного оператора P . Предположим, что возмущающий оператор Q имеет вид

$$Q = \sum_{|\alpha| \leq m-1} Q_\alpha(x) i^{-|\alpha|} D^\alpha,$$

где коэффициенты $Q_\alpha \in C(\mathbb{R}^n, \text{End } X)$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}^n$ и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu < \infty, \quad \sup_{x \in R_\nu} \|Q_\alpha(x)\| \leq M_\nu, \quad |\alpha| \leq m-1,$$

а пространство X конечномерно.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\lambda \in \rho(P, L^p)$, но не является собственным значением оператора P_1 в V^p . Тогда $\lambda \in \rho(P_1, L^p)$ и имеет место формула

$$R(\lambda, P_1, L^p)u = R(\lambda, P, L^p)(I + QR(\lambda, P, L^p))^{-1}u, \quad u \in V^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейный оператор $QR = QR(\lambda, P, L^p)$ действует в V^p и непрерывен, так как

$$\|QRu\|_{V^p} \leq a_5 K_3(\lambda) \|u\|_{V^p}, \quad u \in V^p, \quad a_5 = \max_{|\alpha| \leq m-1} \|Q_\alpha\|_C.$$

Проверим, что оператор $QR: V^p \rightarrow V^p$ компактен. Возьмем ограниченную в V^p последовательность u_j , $\|u_j\|_{V^p} \leq C_4$. Последовательность $v_j = QRu_j$ обладает следующими свойствами:

1) имеет место оценка

$$\|v_j\|_{L^p} \leq a_5 C_4 K_3(\lambda) 2^{1/p}, \quad (11)$$

т.е. последовательность v_j ограничена в L^p ;

2) имеет место оценка

$$\int_{|x| > 2^\ell} \|v_j\|^p dx \leq \frac{a_5^p C_4^p K_3^p N_1}{(2^{1/p} - 1)^p \cdot 2^{\ell-1}}, \quad 2 \leq \ell \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

где N_1 – число производных порядка $|\alpha| \leq m-1$;

3) имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \|v_j(x+y) - v_j(x)\|^p dx \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq m-1} 2^p C_4^p K_3^p(\lambda) \omega_\alpha^p(|y|) + 2^{p^2-p+1} a_5^p C_4 K_3(\lambda) n^{p-1} N_1 |y|^p, \end{aligned} \quad (13)$$

где ω_α – модуль непрерывности функции $Q_\alpha(x)$.

Неравенства (11)–(13) показывают, что множество функций v_j по теореме Рисса–Колмогорова предкомпактно в L^p . Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность v_j фундаментальна в L^p и, следовательно, в L^p существует предел $v = \lim_{j \rightarrow \infty} v_j$. Из оценки

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \left(2^{\nu-1} \int_{R_{\nu}} \|v(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^{1/p} a_5 C_4 K_3(\alpha) + \|v - v_j\|_{L^p} \frac{2^{\ell/p} - 1}{2^{1/p} - 1}$$

следует, что $v \in V^p$ и $\|v\|_{V^p} \leq 2^{1/p} a_5 C_4 K_3(\lambda)$. Для любого числа $\mu \in \mathbb{N}$ выберем номер j_{μ} так, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \left(2^{\nu-1} \int_{R_{\nu}} \|v(x) - v_{j_{\mu}}(x)\|^p dx \right)^{1/p} < \frac{1}{\mu}.$$

Тогда

$$\|v - v_{j_{\mu}}\|_{V^p} \leq \frac{1}{\mu} + C_4 K_3(\lambda) \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} + \sum_{\nu=\mu+1}^{\ell} M_{\nu} \left(2^{\nu-1} \int_{R_{\nu}} \|v(x)\|^p dx \right)^{1/p}. \quad (14)$$

Согласно (14) $\lim_{\mu \rightarrow \infty} v_{j_{\mu}} = v$ в V^p , а это значит, что оператор $QR: V^p \rightarrow V^p$ компактен.

В силу свойств λ из формулы

$$(P_1 - \lambda)R(\lambda, P, L^p)f = f + QR(\lambda, P, L^p)f, \quad f \in V^p,$$

следует, что ядро оператора $I + QR(\lambda, P, L^p)$ в V^p равно нулю. По альтернативе Фредгольма оператор $(I + QR(\lambda, P, L^p)): V^p \rightarrow V^p$ обратим. Поэтому при любом $f \in V^p$ уравнение $(P_1 - \lambda)u = f$ имеет единственное решение

$$u = R(\lambda, P, L^p) \cdot (I + QR(\lambda, P, L^p))^{-1} f \in W^m(V^p),$$

т.е. оператор $(P_1 - \lambda): W^m(L^p) \rightarrow L^p$ обратим. По теореме 3 обратим и оператор $(P_1 - \lambda): W^m(L^p) \rightarrow L^p$, что равносильно существованию в точке λ резольвенты $R(\lambda, P_1, L^p)$ (см. теорему 4) и, следовательно, $\lambda \in \rho(P_1, L^p)$. Применяя к обеим частям равенства

$$(P_1 - \lambda)R(\lambda, P, L^p)(I + QR(\lambda, P, L^p))f = f, \quad f \in V^p,$$

оператор $R(\lambda, P_1, L^p)$, получим

$$R(\lambda, P_1, L^p)f = R(\lambda, P, L^p)(I + QR(\lambda, P, L^p))^{-1}f, \quad f \in V^p.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Мухамадиев Э. М. Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. № 6. С. 1292–1293.
- [2] Жиков В. В. К теории допустимости пар функциональных пространств // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. № 6. С. 1281–1283.
- [3] Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
- [4] Шубин М. А. Теоремы о совпадении спектров псевдодифференциального почти периодического оператора в пространствах $L^2(\mathbb{R}^n)$ и $B^2(\mathbb{R}^n)$ // Сиб. матем. ж. 1976. Т. 17. № 1. С. 200–215.
- [5] Курбатов В. Г. Об ограниченных решениях дифференциально-разностных уравнений // Сиб. матем. ж. 1986. Т. 27. № 1. С. 89–99.
- [6] Слюсарчук В. Е. Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Матем. заметки. 1987. Т. 42. № 2. С. 262–267.
- [7] Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 3. С. 160–165.
- [8] Баскаков А. Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 282–284.
- [9] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1988.
- [10] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [11] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. 2-е изд. М.: Наука, 1977.
- [12] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
- [13] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд. МГУ, 1978.
- [14] Тюрин В. М. К обратимости линейных дифференциальных операторов с частными производными в некоторых пространствах функций на $\mathbb{R}^n$ // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 10. С. 1419–1425.