Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Хей, О необходимых условиях существования локальных решений сингулярных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств, *Матем. заметки*, 2002, том 72, выпуск 6, 924–935

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 18:16:36

УДК 517.9

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Дж. Хей

Получены условия отсутствия глобального решения и оценки времени существования локальных решений задачи

$$\frac{d^k y}{dt^k} \geq a_1(t)|y|^{q_1} + a_2(t)|y|^{q_2} + \dots + a_n(t)|y|^{q_n}.$$

Доказательства основаны на разработанном Митидиери и Похожаевым методе пробных функций.

Библиография: 17 названий.

Введение

Стандартный курс обыкновенных дифференциальных уравнений начинается с доказательства существования единственного локального решения регулярных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти доказательства известны более ста лет. Классический подход состоит в рассмотрении существования решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (0.1)$$

в ограниченной области $\Omega = \Omega((t_0, x_0), a, b) = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$. Далее показывается, что единственное решение существует на интервале $|t - t_0| \leq \alpha$, где $f(x, t)$

- 1) непрерывна и ограничена в Ω ,
- 2) удовлетворяет условиям регулярности или липшицевости, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что $|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq L|x_1 - x_2|$ в Ω , где положительное число α определено формулой

$$\alpha = \begin{cases} a, & \text{если } M = 0, \\ \min\left(a, \frac{b}{M}\right), & \text{если } M > 0, \end{cases} \quad (0.2)$$

где $M = \max_{\Omega} |f(x, t)|$.

Здесь первое условие обеспечивает существование, но не единственность, гарантированную на интервале $|t - t_0| \leq \alpha$.

Однако эти хорошо известные теоремы существования не применимы к обыкновенным дифференциальным уравнениям и неравенствам с сингулярностями, правые части которых не удовлетворяют приведенным условиям и которые часто не имеют даже локального решения. Главной целью настоящей статьи является нахождение достаточных условий отсутствия локальных решений (тогда как в стандартной теории исследуются в основном достаточные условия существования локальных решений). Основной рассматриваемой задачей является

$$\frac{d^k x}{dt^k} \geq a_1(t)|x|^{q_1} + a_2(t)|x|^{q_2} + \dots + a_n(t)|x|^{q_n}, \quad t, a_i(t) > 0. \quad (0.3)$$

Используемый подход основан на технике, разработанной Митидиери и Похожаевым [1] для нахождения достаточных условий отсутствия глобальных решений нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и модельных задач для обыкновенных дифференциальных неравенств. В работах автора [2], [3] данная техника применена к доказательству отсутствия глобальных решений широкого класса обыкновенных дифференциальных неравенств и систем. В настоящей работе мы доказываем отсутствие локальных решений задач с сингулярностями. Полученные результаты дополняют хорошо известные утверждения о существовании решений дифференциальных уравнений (см. [4]–[17]).

В дальнейшем локальное решение понимается в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. *Локальным решением задачи (0.3) называется функция $x(t) \in C^k$, определенная на некотором интервале $(0, t_1)$, $t_1 > 0$, и удовлетворяющая (0.3) в каждой точке интервала в обычном смысле.*

1. Модельная задача

В данном разделе мы устанавливаем необходимые условия существования локального решения модельной задачи

$$\frac{d^k x}{dt^k} \geq a(t)|x|^q, \quad q > 1, \quad a(t) > \beta t^\alpha, \quad \beta, t > 0. \quad (1.1)$$

В приводимой ниже теореме мы налагаем дополнительные ограничения на начальные данные, зависящие от порядка производной k в (1.1).

1.1. Задача первого порядка. Установим необходимые условия существования локального решения для $k = 1$, т.е. рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} \geq a(t)|x|^q, \quad q > 1, \quad a(t) > \beta t^\alpha, \quad \beta, t > 0. \quad (1.2)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. При $\alpha \leq -1$ задача (1.2) не имеет локального нетривиального решения, удовлетворяющего условию $x(t_0) \leq 0$ для некоторого $t_0 \in (0, t_1)$.

Эквивалентно, задача (1.2) может иметь локальное нетривиальное решение только в случаях

$$\begin{aligned} x(t_0) > 0 \quad \text{для всех } t_0 \in (0, t_1) \quad \text{и} \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{или} \quad x(t_0) < 0 \quad \text{и} \quad \alpha > -1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы сводим задачу на ограниченном интервале к задаче на луче, используя замену переменных $t \rightarrow \tau = 1/t$, $x(t) = \hat{x}(\tau)$. В дальнейшем для простоты будем писать, по-прежнему, $x(\tau)$ вместо $\hat{x}(\tau)$ и $a(\tau)$ вместо $a(1/\tau)$.

После замены переменных неравенство (1.1) принимает вид

$$-\frac{dx}{d\tau}\tau^2 \geq a(\tau)|x|^q. \quad (1.4)$$

Используя предположение $a(\tau) > \beta\tau^{-\alpha}$, из неравенства (1.4) получаем

$$-\frac{dx}{d\tau} \geq \beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q. \quad (1.5)$$

Вводим пробную функцию $\varphi(\tau) \in C^1[\tau_0, \infty)$, $\tau_0 = 1/t_0$, $0 \leq \varphi(\tau) \leq 1$, со следующими свойствами при $T \rightarrow \infty$:

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{для } \tau \in [T, \infty), \\ 1 & \text{для } \tau \in \left[\tau_0, \frac{T}{2}\right]. \end{cases} \quad (1.6)$$

Умножая обе части неравенства (1.5) на $\varphi(\tau)$ и интегрируя на интервале $[\tau_0, T]$, получим

$$-\int_{\tau_0}^T \varphi(\tau) \frac{dx}{d\tau} d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi(\tau) \beta \tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \quad (1.7)$$

Левую часть неравенства (1.7) интегрируем по частям:

$$x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^T \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} x d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi(\tau) \beta \tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \quad (1.8)$$

В (1.8) мы использовали то, что $\varphi(\tau) = 0$ для всех $\tau \geq T$ и $\varphi(\tau_0) = 1$. Преобразуем левую часть неравенства (1.8):

$$x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|}{((\varphi\beta)^{1/q} \tau^{-(2-\alpha)/q})} (\varphi\beta)^{1/q} \tau^{-(2-\alpha)/q} |x| d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi \beta \tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau, \quad (1.9)$$

а затем применяем неравенство Юнга:

$$x(\tau_0) + \frac{1}{q'} \int_{\tau_0}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|^{q'}}{(\varphi\beta\tau^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\tau + \frac{1}{q} \int_{\tau_0}^T \varphi \beta \tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi \beta \tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau, \quad (1.10)$$

откуда получаем

$$q'x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|^{q'}}{(\varphi\beta\tau^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q d\tau. \quad (1.11)$$

По определению пробной функции

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \quad \text{для } \tau \in \left[\tau_0, \frac{T}{2}\right]. \quad (1.12)$$

Тогда

$$\int_{\tau_0}^T \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} x d\tau = \int_{T/2}^T \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} x d\tau \quad (1.13)$$

и неравенство (1.11) принимает вид

$$q'x(\tau_0) + \int_{T/2}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|^{q'}}{(\varphi\beta\tau^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q d\tau. \quad (1.14)$$

Выполним замену переменных: $\tau \rightarrow \omega = \tau/T$. Тогда неравенство (1.14) дает

$$q'x(\tau_0) + \frac{1}{T^{(-2-\alpha)(q'-1)+1+q'}} \int_{1/2}^1 \frac{|d\varphi(\omega)/d\omega|^{q'}}{(\varphi\beta\omega^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\omega \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q d\tau. \quad (1.15)$$

Функция $\varphi(\omega)$ может быть выбрана таким образом, что

$$\int_{1/2}^1 \frac{|d\varphi(\omega)/d\omega|^{q'}}{(\varphi\omega^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\omega < C. \quad (1.16)$$

Тогда неравенство (1.15) можно переписать в виде

$$q'x(\tau_0) + T^{(2+\alpha)(q'-1)+1-q'} C \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q d\tau. \quad (1.17)$$

Поскольку неравенство (1.17) выполняется при $T \rightarrow \infty$, в нем возможно перейти к пределу:

$$q'x(\tau_0) + \lim_{T \rightarrow \infty} T^{(2+\alpha)(q'-1)+1-q'} C \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha}|x|^q d\tau. \quad (1.18)$$

Неравенство (1.18) приводит к противоречию в случае, когда

$$(2+\alpha)(q'-1)+1-q' < 0, \quad (1.19)$$

т.е.

$$\alpha < -1. \quad (1.20)$$

Таким образом, мы доказали, что в случае $x(\tau_0) \leq 0$ и $\alpha < -1$ задача не имеет локального решения.

Для завершения доказательства теоремы 1.1 покажем, что локального решения нет и при $\alpha = -1$. Заметим, что $d\varphi/d\tau = 0$ для $\tau \in [\tau_0, T/2]$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_0}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|}{((\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q})} (\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q} |x| d\tau \\ &= \int_{T/2}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|}{((\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q})} (\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q} |x| d\tau. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Таким образом, можно переписать неравенство (1.9) в следующем виде (при этом интеграл в левой части берется по носителю $d\varphi/dt$):

$$x(\tau_0) + \int_{T/2}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|}{((\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q})} (\varphi\beta)^{1/q}\tau^{(-2-\alpha)/q} |x| d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \quad (1.22)$$

Применяя неравенство Гёльдера к (1.22), получим

$$x(\tau_0) + \left(\int_{T/2}^T \frac{|d\varphi(\tau)/d\tau|^{q'}}{(\varphi\beta\tau^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\tau \right)^{1/q'} \left(\int_{T/2}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau \right)^{1/q} \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \quad (1.23)$$

Делая замену переменных в первом интеграле в левой части (1.23), получим

$$\begin{aligned} & x(\tau_0) + \left(\frac{1}{T^{(-2-\alpha)(q'-1)-1+q'}} \int_{1/2}^1 \frac{|d\varphi(\omega)/d\omega|^{q'}}{(\varphi\beta\omega^{-2-\alpha})^{q'-1}} d\omega \right)^{1/q'} \\ & \times \left(\int_{T/2}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau \right)^{1/q} \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Используя (1.16), рассмотрим (1.24) при $\alpha = -1$, т.е. когда $(2+\alpha)(q'-1)+1-q'=0$; получим

$$x(\tau_0) + C^{1/q'} \left(\int_{T/2}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau \right)^{1/q} \geq \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-2-\alpha} |x|^q d\tau. \quad (1.25)$$

Отсюда отсутствие решения следует аналогично стандартной технике Митидиери и Похожаева [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Интересно заметить, что для модельной задачи первого порядка необходимое условие отсутствия локального решения в окрестности $t = 0$ совпадает с необходимым условием отсутствия глобальных решений, полученных в [2]. В [2] показано, что глобального решения не существует, когда $\alpha < -q(k-1)-1$. Для задачи первого порядка это условие эквивалентно (1.20).

1.2. Точность теоремы 1.1. Точность теоремы 1.1 для случая $x(t_0) > 0$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно проверить непосредственным интегрированием уравнения

$$\frac{dx}{dt} = t^\alpha x^q, \quad x_0 = x(t_0) > 0, \quad (1.26)$$

которое дает для $0 < t \leq t_0$ и $\alpha + 1 \neq 0$

$$\frac{1}{(q-1)x^{q-1}} = \frac{t_0^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{(q-1)x_0^{q-1}}. \quad (1.27)$$

В случае, когда выполнено условие (1.20) (т.е. $\alpha + 1 < 0$), в интервале $t_0 \geq t > 0$ получаем

$$\frac{t_0^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \geq 0 \quad (1.28)$$

и

$$\frac{1}{(q-1)x_0^{q-1}} > 0, \quad (1.29)$$

что следует из условия $x(t_0) > 0$. Очевидно, что уравнение (1.27) имеет решение $x(t)$ для всех $t \in (0, t_0]$, что и утверждалось. Если же $\alpha + 1 > 0$, то неравенства (1.28) и (1.29) сохраняются и снова приводят к решению $x(t)$ уравнения (1.27) и задачи (1.26) для всех $t \in (0, t_0]$. Наконец, случай $\alpha + 1 = 0$ очевиден. Тем самым, проверено существование решения задачи (1.26) для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, если $x(t_0) > 0$.

Рассмотрим теперь второй вариант условий (1.3): $x(t_0) < 0$ и $\alpha > -1$. Покажем, что уравнение

$$\frac{dx}{dt} = t^\alpha |x|^q, \quad x_0 = x(t_0) < 0, \quad (1.30)$$

допускает нетривиальное локальное решение. Введем замену $y(t) = -x(t)$. Тогда уравнение (1.30) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = -t^\alpha |y|^q, \quad y_0 = y(t_0) > 0. \quad (1.31)$$

Ищем положительные решения этой задачи, т.е. решаем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -t^\alpha y^q, \quad y_0 = y(t_0). \quad (1.32)$$

Аналогично (1.27) получаем

$$\frac{1}{(q-1)y^{q-1}(t)} = -\frac{t_0^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{1}{(q-1)y_0^{q-1}}. \quad (1.33)$$

Чтобы получить решение уравнения (1.33), определенное для всех $t \in (0, t_0]$, необходимо условие

$$\frac{1}{(q-1)y_0^{q-1}} > \frac{t_0^{\alpha+1} - t^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad 0 < t \leq t_0,$$

которое равносильно требованию

$$|x(t_0)| = y_0 < \left(\frac{\alpha+1}{q-1}\right)^{1/(q-1)} t_0^{-(\alpha+1)/(q-1)}. \quad (1.34)$$

Таким образом, когда начальное условие задачи (1.30) удовлетворяет неравенству (1.34), существует локальное решение $y(t)$ задачи (1.31), по которому строится локальное решение $x(t) = -y(t)$ задачи (1.30), что доказывает точность условия теоремы 1.1.

ТАБЛИЦА 1. Сводная таблица результатов

	$x(t_0) < 0$	$x(t_0) > 0$
$\alpha + 1 < 0$	не существует локального решения	локальное решение существует
$\alpha + 1 > 0$	локальное решение существует, если $ x(t_0) < t_0^{-(\alpha+1)/(q-1)} \left(\frac{\alpha+1}{q-1}\right)^{1/(q-1)}$	локальное решение существует

2. Неравенство второго порядка

В настоящем разделе мы рассматриваем неравенство второго порядка:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \geq a(t)|x|^q, \quad a(t) > \beta t^\alpha, \quad \beta > 0, \quad q > 1, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть при $t = t_0$ выполняется соотношение

$$t_0 \frac{dx(t_0)}{dt} - x(t_0) \leq 0. \quad (2.2)$$

Тогда задача (2.1) не имеет локального нетривиального решения на интервале $(0, t_0]$ при $\alpha \leq -q - 1$.

Если при $t = t_0$ выполняется соотношение

$$x'(t_0) \leq 0,$$

то задача (2.1) не имеет локального нетривиального решения на интервале $(0, t_0]$ при $\alpha \leq -2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (2.1) в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \geq \beta t^\alpha |x|^q. \quad (2.3)$$

Проведем замену переменных $t \rightarrow \tau = 1/t$. Тогда неравенство (2.3) принимает вид

$$\tau^4 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\tau^3 \frac{dx}{d\tau} \geq \beta \tau^{-\alpha} |x|^q. \quad (2.4)$$

Вводим пробную функцию $\varphi(\tau)$ аналогично предыдущему разделу. Однако для задачи второго порядка мы должны модифицировать эту функцию следующим образом:

$$\varphi(\tau) = \tau^\delta \varphi_1(\tau), \quad \varphi_1(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau_0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \tau \geq T, \end{cases} \quad \varphi_1(\tau) \in C^2(0, T]. \quad (2.5)$$

Умножаем обе части неравенства (2.4) на эту пробную функцию и интегрируем от τ_0 до T :

$$\int_{\tau_0}^T \left(\varphi_1 \tau^{4+\delta} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\varphi_1 \tau^{3+\delta} \frac{dx}{d\tau} \right) d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q d\tau. \quad (2.6)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части (2.6), получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \tau^{4+\delta} \frac{d^2 x}{d\tau^2} d\tau &= -\tau_0^{4+\delta} \frac{dx(\tau_0)}{d\tau} + (4+\delta)\tau_0^{3+\delta} x(\tau_0) \\ &+ \int_{\tau_0}^T [\varphi_1'' \tau^{4+\delta} + 2(4+\delta)\varphi_1' \tau^{3+\delta} + (4+\delta)(3+\delta)\varphi_1 \tau^{2+\delta}] x d\tau. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Интегрируя второй член (2.6), получим

$$2 \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \tau^{3+\delta} \frac{dx}{d\tau} d\tau = -2\tau_0^{3+\delta} x(\tau_0) - \int_{\tau_0}^T [2\varphi_1' \tau^{3+\delta} + 2(3+\delta)\varphi_1 \tau^{2+\delta}] x d\tau. \quad (2.8)$$

При этом используем то, что

$$\varphi_1(T) = 0, \quad \varphi_1'(T) = 0, \quad \varphi_1'(\tau_0) = 0, \quad \varphi_1(\tau_0) = 1.$$

Далее, объединяя (2.6), (2.7) и (2.8), получим

$$\begin{aligned} &(2+\delta)\tau_0^{3+\delta} x(\tau_0) - \tau_0^{4+\delta} \frac{dx(\tau_0)}{d\tau} \\ &+ \int_{\tau_0}^T ([\varphi_1'' \tau^{4+\delta} + 2(3+\delta)\varphi_1' \tau^{3+\delta}] x + [(2+\delta)(3+\delta)\varphi_1 \tau^{2+\delta} x]) d\tau \\ &\geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Выбираем параметр δ с целью избавиться от члена $(2+\delta)(3+\delta)\varphi_1 \tau^{2+\delta}$, т.е. $\delta = -2$ или $\delta = -3$. Для используемой техники важно выбрать пробную функцию $\varphi(\tau) = \tau^\delta \varphi_1(\tau)$ с параметром δ таким образом, чтобы уничтожить все члены вида $\int_{\tau_0}^T \varphi_1 \tau^\mu x d\tau$, имеющие носитель на интервале $[\tau_0, T]$, тогда как члены вида $\int_{\tau_0}^T \varphi_1^{(k)} \tau^\mu x d\tau$, $k > 0$, имеют носитель только на интервале $[T/2, T]$. Эти факты существенно используются в дальнейшем.

Итак, при $\delta = -2$ или $\delta = -3$ получим

$$\begin{aligned} &(2+\delta)\tau_0^{3+\delta} x(\tau_0) - \tau_0^{4+\delta} \frac{dx(\tau_0)}{d\tau} + \int_{\tau_0}^T [\varphi_1'' \tau^{4+\delta} + 2(3+\delta)\varphi_1' \tau^{3+\delta}] x d\tau \\ &\geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для упрощения положим

$$I_0 = (2 + \delta)\tau_0^{3+\delta}x(\tau_0) - \tau_0^{4+\delta} \frac{dx(\tau_0)}{d\tau}. \quad (2.11)$$

Тогда (2.10) примет вид

$$I_0 + \int_{\tau_0}^T [\varphi_1'' \tau^{4+\delta} + 2(3 + \delta)\varphi_1' \tau^{3+\delta}]x \, d\tau \geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q \, d\tau. \quad (2.12)$$

Вводим множители $(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta)/q}$, $(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta)/q}$ в первом и втором подынтегральных слагаемых левой части неравенства (2.12) с положительными постоянными c_1 и c_2 :

$$\begin{aligned} I_0 + \int_{\tau_0}^T & \left[(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta)/q} x \frac{|\varphi_1''|}{(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta-q(4+\delta))/q}} \right. \\ & \left. + 2(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta)/q} x \frac{|\varphi_1'|}{(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha+\delta-q(3+\delta))/q}} \right] d\tau \\ & \geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Применяя параметрическое неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} I_0 + \int_{\tau_0}^T & \left[\frac{c_1}{q} \beta \varphi_1 \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q + \frac{1}{q'} \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_1 \tau^{-\alpha+\delta-q(4+\delta)})^{q'-1}} \right. \\ & \left. + \frac{c_2}{q} \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q + \frac{2^{q'}}{q'} \frac{|\varphi_1'|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_2 \tau^{-\alpha+\delta-q(3+\delta)})^{q'-1}} \right] d\tau \\ & \geq \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Группируем члены:

$$\begin{aligned} I_0 + \int_{\tau_0}^T & \left[\frac{1}{q'} \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_1 \tau^{-\alpha+\delta-q(4+\delta)})^{q'-1}} + \frac{2^{q'}}{q'} \frac{|\varphi_1'|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_2 \tau^{-\alpha+\delta-q(3+\delta)})^{q'-1}} \right] d\tau \\ & \geq \frac{q - c_1 - c_2}{q} \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Коэффициенты c_1, c_2 выбираем так, чтобы они удовлетворяли соотношению $(q - c_1 - c_2)/q = C_0 > 0$. Как и ранее, используем свойства пробной функции для изменения пределов интегрирования в левой части неравенства (2.15):

$$\begin{aligned} I_0 + \int_{T/2}^T & \left[\frac{1}{q'} \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_1 \tau^{-\alpha+\delta-q(4+\delta)})^{q'-1}} + \frac{2^{q'}}{q'} \frac{|\varphi_1'|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_2 \tau^{-\alpha+\delta-q(3+\delta)})^{q'-1}} \right] d\tau \\ & \geq C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha+\delta} |x|^q \, d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Вводя замену переменных $\omega \rightarrow \tau/T$, приводим неравенство (2.16) к виду

$$\begin{aligned} I_0 + T^{(\alpha-\delta+q(4+\delta))(q'-1)-2q'+1} \int_{1/2}^1 \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{q'(\varphi_1\beta c_1\omega^{-\alpha+\delta-q(4+\delta)})^{q'-1}} d\omega \\ + T^{(\alpha-\delta+q(3+\delta))(q'-1)-q'+1} \int_{1/2}^1 \frac{2^{q'}|\varphi_1'|^{q'}}{q'(\varphi_1\beta c_2\omega^{-\alpha+\delta-q(3+\delta)})^{q'-1}} d\omega \\ \geq C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1\beta\tau^{-\alpha+\delta}|x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Легко показать, что можно выбрать $\varphi_1(\tau)$ таким образом, чтобы существовала константа C_1 такая, что

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{q'(\varphi_1\beta c_1\omega^{-\alpha+\delta-q(4+\delta)})^{q'-1}} d\omega < C_1, \\ \int_{1/2}^1 \frac{2^{q'}|\varphi_1'|^{q'}}{q'(\varphi_1\beta c_2\omega^{-\alpha+\delta-q(3+\delta)})^{q'-1}} d\omega < C_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда из (2.17), (2.18) следует

$$\begin{aligned} I_0 + C_1(T^{(\alpha-\delta+q(4+\delta))(q'-1)-2q'+1} + T^{(\alpha-\delta+q(3+\delta))(q'-1)-q'+1}) \\ \geq C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1\beta\tau^{-\alpha+\delta}|x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Рассматриваем это неравенство при $T \rightarrow \infty$, т.е.

$$\begin{aligned} I_0 + C_1 \lim_{T \rightarrow \infty} (T^{(\alpha-\delta+q(4+\delta))(q'-1)-2q'+1} + T^{(\alpha-\delta+q(3+\delta))(q'-1)-q'+1}) \\ \geq \lim_{T \rightarrow \infty} C_0 \int_{\tau_0}^{\infty} \varphi_1\beta\tau^{-\alpha+\delta}|x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T^{(\alpha-\delta+q(4+\delta))(q'-1)-2q'+1} + T^{(\alpha-\delta+q(3+\delta))(q'-1)-q'+1}) = 0,$$

если каждый из показателей отрицателен, т.е.

$$\begin{aligned} (\alpha - \delta + q(4 + \delta))(q' - 1) - 2q' + 1 < 0, \\ (\alpha - \delta + q(3 + \delta))(q' - 1) - q' + 1 < 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

После упрощения получаем единое неравенство

$$\alpha < \delta - q(3 + \delta) + 1. \quad (2.22)$$

При условиях теоремы 2.1 всегда $I_1 \leq 0$. Пусть еще выполнено неравенство (2.22). Тогда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi\beta\tau^{-\alpha-2}|x|^q d\tau = 0,$$

откуда $x(t) \equiv 0$. Таким образом, условие $\alpha < \delta - q(3 + \delta) + 1$ есть достаточное условие отсутствия локального решения задачи (2.1), (2.2) на интервале $(0, t_0]$.

Напомним, что возможными значениями для δ являются -2 и -3 . Значение $\delta = -2$ дает достаточное условие отсутствия локального решения

$$\alpha < -1 - q. \quad (2.23)$$

Значение $\delta = -3$ дает условие следующего вида:

$$\alpha < -2. \quad (2.24)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что в критических случаях $\alpha = -1 - q$ и $\alpha = -2$ решение задачи (2.1), (2.2) также разрушается. Для этого возвращаемся к неравенству (2.13) и замечаем, что при $\delta = -3$ выполнено

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_0}^T \left[(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q} x \frac{|\varphi_1''|}{(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3-q)/q}} \right. \\ & \quad \left. + 2(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q} x \frac{|\varphi_1'|}{(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q}} \right] d\tau \\ &= \int_{T/2}^T \left[(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q} x \frac{|\varphi_1''|}{(\varphi_1 \beta c_1)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3-q)/q}} \right. \\ & \quad \left. + 2(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q} x \frac{|\varphi_1'|}{(\varphi_1 \beta c_2)^{1/q} \tau^{(-\alpha-3)/q}} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Применяя неравенство Гёльдера к правой части соотношения (2.25), получим

$$\begin{aligned} I_0 + & \left(\int_{T/2}^T \varphi_1 \beta c_1 \tau^{-\alpha-3} x^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_{T/2}^T \frac{|\varphi_1''|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_1 \tau^{-\alpha-3-q})^{q'-1}} d\tau \right)^{1/q'} \\ & + \left(2 \int_{T/2}^T \varphi_1 \beta c_2 \tau^{-\alpha-3} x^q d\tau \right)^{1/q} \left(\int_{T/2}^T \frac{|\varphi_1'|^{q'}}{(\varphi_1 \beta c_2 \tau^{-\alpha-3})^{q'-1}} d\tau \right)^{1/q'} \\ & \geq C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha-3} |x|^q d\tau. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из (2.19) следует, что в случае $\alpha = -2$ интеграл

$$C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha-3} |x|^q d\tau$$

равномерно ограничен для всех $T \rightarrow \infty$, что влечет соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{T/2}^T \varphi_1 \beta c_i \tau^{-\alpha-3} x^q d\tau = 0. \quad (2.27)$$

После введения новой переменной $\tau \rightarrow \omega T$, действуя аналогично (2.17), перепишем неравенство (2.26) в виде

$$I_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon 2C_1^{1/q} \geq \lim_{T \rightarrow \infty} C_0 \int_{\tau_0}^T \varphi_1 \beta \tau^{-\alpha-3} |x|^q d\tau, \quad (2.28)$$

что противоречит предположению о существовании нетривиального решения. Аналогичное рассуждение справедливо и при $\alpha = -1 - q$. Теорема 2.1 доказана.

В заключение автор выражает благодарность Г. Г. Лаптеву за помощь в подготовке рукописи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Митидиери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных. Тр. МИАН. Т. 234. М.: Наука, 2001.
- [2] Хей Дж. О необходимых условиях существования глобальных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных неравенств высокого порядка // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 3. С. 1–7.
- [3] Хей Дж. О необходимых условиях существования глобальных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств высокого порядка // Дифференц. уравнения. (в печати).
- [4] Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
- [5] Кигурадзе И. Т. Начальные и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, I. Тбилиси: Метсниереба, 1997.
- [6] Коньков А. А. О решениях неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 81–125.
- [7] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие глобальных положительных решений для квазилинейных эллиптических неравенств // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 456–460.
- [8] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. МИАН. 1999. Т. 227. С. 192–222.
- [9] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие положительных решений для систем квазилинейных эллиптических уравнений и неравенств в $\mathbb{R}^N$ // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 1. С. 13–17.
- [10] Митидиери Э., Похожаев С. И. Отсутствие слабых решений для некоторых вырожденных и сингулярных гиперболических задач в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 248–267.
- [11] Levine H. A. The role of critical exponents in blow-up theorems // SIAM Reviews. 1990. V. 32. P. 371–386.
- [12] Лаптев Г. Г. Отсутствие глобальных положительных решений систем полулинейных эллиптических неравенств в конусах // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. С. 107–124.
- [13] Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференциальных неравенств // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 223–235.
- [14] Laptev G. G. Some nonexistence results for higher-order evolution inequalities in cone-like domains // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 7. P. 87–93.
- [15] Лаптев Г. Г. Об отсутствии глобальных решений параболических уравнений типа пористой среды // ЖВМиМФ. 2002. Т. 42. № 8. С. 1224–1232.
- [16] Laptev G. G. Absence of solutions to evolution-type differential inequalities in the exterior of a ball // Russ. J. Math. Phys. 2002. V. 9. № 2. P. 180–187.
- [17] Лаптев Г. Г. Об отсутствии решений эллиптических дифференциальных неравенств в конических областях // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 855–866.