Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Басов, Бифуркация инвариантного тора коразмерности единица, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:22:42

УДК 517.925

БИФУРКАЦИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА КОРАЗМЕРНОСТИ ЕДИНИЦА

В. В. Басов

Предлагается процесс конструктивного построения классов вещественных систем дифференциальных уравнений порядка 2^d ($d \geq 1$), в том числе полиномиальных, в которых при всех достаточно малых положительных значениях параметра происходит бифуркация рождения инвариантного тора размерности на единицу меньшей, чем размерность системы.

Библиография: 3 названия.

0. Введение. Рассмотрим вещественную автономную систему 2^d дифференциальных уравнений ($d \geq 1$) с малым положительным параметром ε

$$\dot{x} = Ax + X(x, \varepsilon), \quad (0)$$

в которой $x = (x_1, \dots, x_{2^d})$; A — постоянная $(2^d \times 2^d)$ -матрица, имеющая собственные числа $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_{2^d-1}$, которые удовлетворяют конечному числу условий несоизмеримости; вектор-функция X непрерывна и достаточное число раз непрерывно дифференцируема по x, ε ; $X(\sqrt{\varepsilon}x, \varepsilon) = \varepsilon X^*(x, \varepsilon)$. Таким образом, $X(0, 0) = 0$, и система (0) по теореме о неявной функции имеет при каждом достаточно малом $\varepsilon \geq 0$ положение равновесия $x^*(\varepsilon)$. Очевидно, что $x^*(0) = 0$ и $x^*(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Целью работы является построение класса систем вида (0), имеющих при каждом достаточно малом положительном значении параметра инвариантную поверхность максимальной размерности $2^d - 1$, гомеоморфную тору. Иными словами, в явном виде будет указан класс систем, в которых при малых $\varepsilon \geq 0$ от положения равновесия $x^*(\varepsilon)$ ответвляется инвариантный тор коразмерности единица или, что то же самое, происходит бифуркация рождения инвариантного тора максимальной размерности. При этом константы, в известном смысле задающие амплитуды и частоты колебаний на торе, могут быть выбраны произвольным образом. По ним будут построены младшие члены разложения функции $X(x, \varepsilon)$ из системы (0). Оставшаяся часть функции X , начинающаяся с указанного порядка по x, ε и нужное число раз непрерывно дифференцируемая по ним, произвольна.

Работа, помимо введения, состоит из трех разделов. В разделе 1 разработана система обозначений и на основе некоего семейства произвольно выбранных констант построены вышеупомянутые младшие члены разложения функции $X(x, \varepsilon)$, которые и определяют наличие у системы (0) инвариантной поверхности размерности, на единицу меньшей размерности самой системы. В разделе 2 предложен итерационный процесс преобразований исходной системы, который после d итераций сводит ее к системе, имеющей

инвариантную поверхность требуемой размерности. Раздел 3 посвящен доказательству основной теоремы о бифуркации; полученные результаты подробнейшим образом разобраны на примере четырехмерной системы, полиномы из правой части которой непосредственно вычислены, а итерационная замена явно выписана. И, наконец, приведены комментарии, устанавливающие связь уже имеющихся результатов по данной тематике с результатами, полученными в предлагаемой работе.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения.

1.1. Пусть ε – малый положительный параметр; d и n – целые числа, $d \geq 1$, $0 \leq n \leq d$; $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)})$, в частности, $x^{(0)} = x_1^{(0)}$. При $n \geq 1$, кроме того, $x^{(n)} = (x_{(1)}^{(n)}, x_{(2)}^{(n)})$, где $x_{(1)}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \dots, x_{2^{n-1}}^{(n)})$, $x_{(2)}^{(n)} = (x_{2^{n-1}+1}^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)})$. Через $x^{(n)}, y^{(n)}$ будем обозначать вещественные декартовы переменные, а через $r^{(n)}, \varphi^{(n)}$ – полярные координаты, при этом $x^{(n)} \cdot y^{(n)} = (x_1^{(n)} y_1^{(n)}, \dots, x_{2^n}^{(n)} y_{2^n}^{(n)})$, $x^{(n)2} = x^{(n)} \cdot x^{(n)}$, $\tilde{x}^{(n-1)} = (x_{(1)}^{(n)2} + x_{(2)}^{(n)2})$, $\tilde{\varphi}^{(n)} = (\varphi^{(n)}, \dots, \varphi^{(d-1)})$.

Далее, через $Q^k(x^{(n)}, \varepsilon)$ будем обозначать однородный вещественный полином степени k от своих переменных. Во взаимно однозначное соответствие с Q^k поставим полином $P^k(x^{(n)}) = Q^k(x^{(n)}, 1)$. Максимальная степень P^k может быть, очевидно, меньше k . Полином $T^k(x^{(n)})$ будет всегда начинаться со степени, большей k .

Для $n = 0, \dots, d-1$ введем три целочисленные последовательности:

$$k_n = 3^n, \quad m_n = \frac{3^n - 1}{2}, \quad \theta_n = \frac{3^d - 3^{n+1}}{2}.$$

Тогда $m_{n+1} = k_0 + \dots + k_n$, $\theta_n = k_{n+1} + \dots + k_{d-1}$, т.е.

$$k_n = 2m_n + 1, \quad m_{n+1} = m_n + k_n, \quad \theta_{n-1} = \theta_n + k_n.$$

Положим $\theta = k_0 + \dots + k_{d-1}$. Тогда $\theta_n + m_{n+1} = \theta$.

И, наконец, зафиксируем два набора векторов: $c^{(0)}, \dots, c^{(d-1)}$ с положительными компонентами и $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(d-1)}$ с ненулевыми вещественными компонентами, – а также ненулевое вещественное число λ .

1.2. В этом пункте верхний индекс, указывающий размерность векторов, не изменяется, поэтому он будет отсутствовать.

Положим $z = (z_1, \dots, z_m)$, $p = (p_1, \dots, p_m)$, $z^p = z_1^{p_1} \dots z_m^{p_m}$, $|p| = p_1 + \dots + p_m$, $e^\nu = (0, \dots, 1_\nu, \dots, 0)$. Множество m -мерных векторов с целочисленными неотрицательными компонентами вполне упорядочим соотношением: вектор p предшествует вектору q , если положительна первая ненулевая из последовательных разностей $|q| - |p|$, $q_1 - p_1, \dots, q_{m-1} - p_{m-1}$.

Пусть

$$P_j^k(z) = \sum_{p: |p|=0}^k \alpha_j^{(p)} z^p, \quad j = 1, \dots, m.$$

Число различных степеней полинома степени k от m переменных

$$\tau_{k,m} = \sum_{\nu=0}^k C_{m+\nu-1}^\nu.$$

Сделаем замену $z_j = (c_j + x_j)^2$, в которой все компоненты $c_j > 0$. Тогда

$$P_j^k((c+x)^2) = \check{P}_j^k(x) + \check{T}_j^k(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

где

$$\check{P}_j^k(x) = \sum_{p: |p|=0}^k \check{\alpha}_j^{(p)} x^p,$$

а степени полиномов $\check{T}_j^k(x)$ больше k .

Упорядочим семейства $\{\alpha_j^{(p)}\}$ и $\{\check{\alpha}_j^{(p)}\}$, в результате чего получим векторы α_j и $\check{\alpha}_j$ размерности $\tau_{k,m}$. Из равенства (1) вытекает, что α_j и $\check{\alpha}_j$ связаны линейным образом. При желании можно выписать матрицу $A(c)$ размерности $\tau_{k,m} \times \tau_{k,m}$ такую, что $A(c)\alpha_j = \check{\alpha}_j$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Имеем $\det A(c) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что нулевому вектору $\check{\alpha}$ (индекс j опускаем) отвечает единственное решение $\alpha = 0$ уравнения $A(c)\alpha = \check{\alpha}$. Это и будет означать, что $\det A(c) \neq 0$. Доказывать будем индукцией по $|p| = 1, \dots, k$. В последнюю очередь рассмотрим $p = 0$.

Продифференцируем (1) по x_ν . Тогда

$$\frac{\partial P^k((c+x)^2)}{\partial z_\nu} 2(c_\nu + x_\nu) = \frac{\partial(\check{P}^k(x) + \check{T}^k(x))}{\partial x_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Положив $x = 0$, получаем

$$\frac{\partial P^k(c^2)}{\partial z_\nu} 2c_\nu = \check{\alpha}^{(e^\nu)}.$$

Но вектор $\check{\alpha}$ выбран нулевым, а все компоненты вектора c положительны, поэтому

$$\frac{\partial P^k(c^2)}{\partial z_\nu} = 0.$$

Продифференцируем теперь последнее равенство по x_μ . Тогда

$$\frac{\partial^2 P^k((c+x)^2)}{\partial z_\nu \partial z_\mu} 4(c_\nu + x_\nu)(c_\mu + x_\mu) + \frac{\partial P^k((c+x)^2)}{\partial z_\nu} 2\delta_{\nu\mu} = \frac{\partial^2(\check{P}^k(x) + \check{T}^k(x))}{\partial x_\nu \partial x_\mu},$$

$\nu, \mu = 1, \dots, m.$

Положим опять $x = 0$ и используем тот факт, что все первые производные полинома P^k в точке c^2 равны нулю. Тогда получаем

$$\frac{\partial^2 P^k(c^2)}{\partial z_\nu \partial z_\mu} 4c_\nu c_\mu = \check{\alpha}^{(e^\nu + e^\mu)},$$

т.е.

$$\frac{\partial^2 P^k(c^2)}{\partial z_i \partial z_j} = 0.$$

Продолжая этот процесс, нетрудно заметить, что все частные производные P^k в точке c^2 равны нулю.

Переразложив теперь P^k по степеням $z - c^2$, немедленно убедимся, что $P^k \equiv \alpha^{(0)}$, а значит, все $\alpha^{(p)} = 0$ при $1 \leq |p| \leq k$. Но тогда и $\alpha^{(0)} = 0$, так как компонента $\check{\alpha}^{(0)}$ выбрана нулевой. Утверждение доказано.

В результате $\alpha_j = A(c)^{-1} \check{\alpha}_j$, т.е., выбрав произвольным образом полином $\check{P}^k(x)$, можно построить $P^k(z)$, удовлетворяющий равенству (1).

В дальнейшем вместо (1) потребуется равенство

$$(c_j + x_j)P_j^k((c + x)^2) = \check{P}_j^k(x) + T_j^k(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

которое получается домножением обеих частей (1) на $(c_j + x_j)$.

Пусть

$$\check{P}_j^k(x) = \sum_{p: |p|=0}^k \check{\alpha}_j^{(p)} x^p.$$

Тогда $\check{\alpha}_j^{(p)} = c_j \check{\alpha}_j^{(p)} + \check{\alpha}_j^{(p-e^j)}$, откуда $\check{\alpha}_j^{(p)} = c_j^{-1}(\check{\alpha}_j^{(p)} - \check{\alpha}_j^{(p-e^j)})$. Очевидно, что, задавая произвольно коэффициенты $\check{\alpha}_j^{(p)}$, можно последовательно для всех p с $|p| = 0, \dots, k$ получить любые значения коэффициентов $\check{\alpha}_j^{(p)}$. Таким образом, доказана следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для всякого полинома $\check{P}_j^k(x)$ однозначно найдутся полиномы $P_j^k(z)$ и $T_j^k(x)$, удовлетворяющие равенству (2). При этом коэффициенты $\check{\alpha}_j^{(p)}$ и $\alpha_j^{(p)}$ полиномов $\check{P}_j^k$ и P_j^k связаны формулами

$$\alpha_j = A(c)^{-1} \check{\alpha}_j, \quad \check{\alpha}_j^{(p)} = c_j^{-1}(\check{\alpha}_j^{(p)} - \check{\alpha}_j^{(p-e^j)}).$$

1.3. Для всякого $n = 0, \dots, d-1$, $j = 1, \dots, 2^n$ и $\nu = 0, \dots, m_n$ построим последовательно полиномы $\check{P}_j^{k_n, \nu}(x^{(n)})$, $P_j^{k_n, \nu}(x^{(n)})$ и $Q_j^{k_n, \nu}(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon)$, используя следующие рекуррентные формулы: при $n = 0$

$$\check{P}^{k_0, 0}(x^{(0)}) = \lambda x^{(0)},$$

при $n \geq 1$

$$\sum_{\nu=0}^{m_n} \check{P}_{(1)}^{k_n, \nu}(x^{(n)}) \varepsilon^\nu = -\lambda^{(n-1)} \cdot x_{(2)}^{(n)} + x_{(1)}^{(n)} \cdot \sum_{\nu=0}^{m_{n-1}} Q^{k_{n-1}, \nu}(\tilde{x}^{(n-1)}, \varepsilon) \varepsilon^\nu, \quad (3)$$

$$\sum_{\nu=0}^{m_n} \check{P}_{(2)}^{k_n, \nu}(x^{(n)}) \varepsilon^\nu = +\lambda^{(n-1)} \cdot x_{(1)}^{(n)} + x_{(2)}^{(n)} \cdot \sum_{\nu=0}^{m_{n-1}} Q^{k_{n-1}, \nu}(\tilde{x}^{(n-1)}, \varepsilon) \varepsilon^\nu,$$

$$(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \sum_{\nu=0}^{m_n} P^{k_n, \nu}((c^{(n)} + x^{(n)})^2) \varepsilon^\nu = \sum_{\nu=0}^{m_n} (\check{P}^{k_n, \nu}(x^{(n)}) + T^{k_n, \nu}(x^{(n)})) \varepsilon^\nu, \quad (4)$$

$$Q^{k_n, \nu}(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon) = \sum_{p: |p|=0}^{k_n} \alpha^{(p), \nu}(\tilde{x}^{(n)}) p \varepsilon^{k_n - |p|}, \quad (5)$$

где $k_n, m_n, \lambda^{(n)}, c^{(n)}, \tilde{x}^{(n)}$ определены в п. 1.1, полиномы $T^{k_n, \nu}(x^{(n)})$ берутся из формулы (2) и начинаются с $k_n + 1$ порядка, $\alpha^{(p), \nu}$ – коэффициенты полиномов $P^{k_n, \nu}(\tilde{x}^{(n)})$, полиномы $Q^{k_{n-1}, \nu}$ имеют размерность 2^{n-1} .

Предложенные формулы корректны, и полиномы определяются по ним единственным образом. Действительно, максимальная степень полиномов, стоящих в правой части (3), по $x^{(n)}$ равняется $2k_{n-1} + 1$, что не превосходит k_n , а по ε равняется $m_{n-1} + k_{n-1}$, что совпадает с m_n . По существу в правой части (3) происходит переразложение полиномов по степеням ε . Равенство (4) совпадает с равенством (2), поэтому существование и единственность полиномов $P^{k_n, \nu}$ вытекает из леммы 1. И, наконец, однородные полиномы $Q^{k_n, \nu}$ степени k_n в (5) получаются домножением каждого слагаемого $P^{k_n, \nu}$ на ε в соответствующей степени. Таким образом, доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Формулы (3)–(5) при $n = 0, \dots, d-1$ и $\nu = 0, \dots, m_n$ однозначно определяют полиномы $Q^{k_n, \nu}$ как функции $\lambda, \lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n-1)}$ и $c^{(0)}, \dots, c^{(n)}$.*

2. Теорема о приведении.

2.1. Зафиксируем натуральное число d и рассмотрим 2^d -мерную вещественную систему с малым положительным параметром ε

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)}^{(d)} &= -\lambda^{(d-1)} \cdot x_{(2)}^{(d)} + x_{(1)}^{(d)} \cdot S^{(d-1)}(\tilde{x}^{(d-1)}, \varepsilon) + \hat{X}_{(1)}^{(d)}(x^{(d)}, \varepsilon) + X_{(1)}^{(d)}(x^{(d)}, \sqrt{\varepsilon}), \\ \dot{x}_{(2)}^{(d)} &= +\lambda^{(d-1)} \cdot x_{(1)}^{(d)} + x_{(2)}^{(d)} \cdot S^{(d-1)}(\tilde{x}^{(d-1)}, \varepsilon) + \hat{X}_{(2)}^{(d)}(x^{(d)}, \varepsilon) + X_{(2)}^{(d)}(x^{(d)}, \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\tilde{x}^{(d-1)} = x_{(1)}^{(d)2} + x_{(2)}^{(d)2}$;

$$S^{(d-1)} = \sum_{\nu=0}^{m_{d-1}} Q^{k_{d-1}, \nu}(\tilde{x}^{(d-1)}, \varepsilon) \varepsilon^\nu,$$

причем $Q^{k_{d-1}, \nu}$ – это однородные вещественные полиномы порядка k_{d-1} , построенные в лемме 2 на основе выбранных в п. 1.1 двух наборов векторов $c^{(n)}$ и $\lambda^{(n)}$, двух наборов чисел k_n и m_n и числа $\lambda \neq 0$; $\hat{X}^{(d)}$ – произвольный полином, имеющий минимальную степень $k_d + 1$ и максимальную степень $k_d + (d-1)$ по $x^{(d)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$; $X^{(d)}(\sqrt{\varepsilon}x^{(d)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{k_d + (d-1)+1} X_*^{(d)}(x^{(d)}, \varepsilon)$, функция $X_*^{(d)}(x^{(d)}, \varepsilon)$ непрерывна при малых значениях аргументов и непрерывно дифференцируема по $x^{(d)}$. Отметим, что полиномы $Q^{k_{d-1}, \nu}$ имеют суммарную степень $2k_{d-1}$ по $x^{(d)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$, поэтому максимальная степень полиномов $x_{(j)}^{(d)} \cdot S^{(d-1)}$ ($j = 1, 2$) равняется $2k_{d-1} + 2m_{d-1} + 1 = k_d$.

Наложим дополнительно на векторы $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d-1)}$, когда $d > 1$, конечное число условий несоизмеримости. Пусть $p^{(1)}, \dots, p^{(d-1)}$ – произвольные целочисленные векторы. Тогда для $n = 1, \dots, d-1$ и $k_n = 3^n$

$$(\lambda^{(n)}, p^{(n)}) \neq 0 \quad \text{при } 0 < |p^{(n)}| \leq k_{n+1} + n. \quad (7)$$

В этом разделе методом математической индукции будет показано, что система (6) при условии (7) рекуррентной последовательностью замен после d шагов может быть сведена к вещественной 2^d -мерной системе

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} &= \varepsilon^\theta (\lambda x^{(0)} + T^{1,0}(x^{(0)}) + \sqrt{\varepsilon} X_*^{(0)}(x^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)), \\ \dot{\varphi}^{(l)} &= \varepsilon^{\theta_l} \lambda^{(l)} + \varepsilon^{\theta+1/2} \Phi_*^{(l),0}(x^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon), \quad l = 0, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (8)$$

в которой векторные переменные $\varphi^{(l)}$ имеют размерность 2^l , константы θ, θ_l определены в п. 1.1, а полином $T^{1,0}$ – в формуле (4) и начинается со второго порядка. Функции, отмеченные звездочкой, определены и непрерывны при малых значениях $x^{(0)}, \varepsilon$ и любых $\tilde{\varphi}^{(0)}$, 2π -периодичны по $\tilde{\varphi}^{(0)}$ и непрерывно дифференцируемы по $x^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}$.

Предваряя доказательство, заметим, что ограничения (7) не использовались при построении полиномов $S^{(d-1)}$. Они будут нужны только для нормализации возникающих на каждом шаге полиномов $\hat{X}^{(n)}$.

2.2. Предположим, что $d \geq 2$ и после $d - 1 - n$ шагов ($1 \leq n \leq d - 1$) из системы (6) получена система

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)}^{(n+1)} &= \varepsilon^{\theta_n} (-\lambda^{(n)} \cdot x_{(2)}^{(n+1)} + x_{(1)}^{(n+1)} \cdot S^{(n)}(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon) \\ &\quad + \hat{X}_{(1)}^{(n+1)}(x^{(n+1)}, \varepsilon) + X_{(1)}^{(n+1)}(x^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{x}_{(2)}^{(n+1)} &= \varepsilon^{\theta_n} (\lambda^{(n)} \cdot x_{(1)}^{(n+1)} + x_{(2)}^{(n+1)} \cdot S^{(n)}(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon) \\ &\quad + \hat{X}_{(2)}^{(n+1)}(x^{(n+1)}, \varepsilon) + X_{(2)}^{(n+1)}(x^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{\varphi}^{(l)} &= \varepsilon^{\theta_l} \lambda^{(l)} + \varepsilon^{\theta+1} \Phi_*^{(l), n+1}(x^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon}), \quad l = n+1, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (9)$$

в которой

$$S^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{m_n} Q^{k_n, \nu}(\tilde{x}^{(n)}, \varepsilon) \varepsilon^\nu, \quad \hat{X}^{(n+1)} = \sum_{\nu=0}^{\nu_2} \varepsilon^\nu \sum_{\mu=\mu_1}^{\mu_2} \hat{X}^{(n+1), \mu}(x^{(n+1)}),$$

где $\nu_2 = [(k_{n+1} + n)/2]$, $\mu_1 = \max\{0, k_{n+1} + 1 - 2\nu\}$, $\mu_2 = k_{n+1} + n - 2\nu$, а $\hat{X}^{(n+1), \mu}$ – это однородные полиномы от $x^{(n+1)}$ порядка μ ; $X^{(n+1)}(\sqrt{\varepsilon}x^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{k_{n+1}+n+1} X_*^{(n+1)}(x^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \varepsilon)$, а функции $X_*^{(n+1)}$ и $\Phi_*^{(l), n+1}$ непрерывны при малых значениях своих аргументов, 2π -периодичны по $\tilde{\varphi}^{(n+1)}$, непрерывно дифференцируемы по $x^{(n+1)}$ и $\tilde{\varphi}^{(n+1)}$. Очевидно, что при $n = d - 1$, когда не сделано еще ни одного шага, $\varepsilon^{\theta_n} = 1$, вектор $\tilde{\varphi}^{(n+1)}$ и уравнения для $\dot{\varphi}^{(l)}$ отсутствуют. Поэтому система (9) совпадает с исходной системой (6).

Опишем $d - n$ шаг. Его цель заключается в преобразовании первых 2^{n+1} уравнений системы (9), в результате которого из них будет снова получена система типа (9), но в два раза меньшего порядка. Однако, прежде чем делать необходимую в таких случаях полярную замену, требуется нормализовать специально выделенные для этого в системе (9) полиномы $\hat{X}^{(n+1)}$, чтобы в полярных координатах зависимость от угловых переменных появлялась только в членах, имеющих достаточно высокий порядок.

ЛЕММА 3. *Существует вещественная полиномиальная замена*

$$x^{(n+1)} = y^{(n+1)} + H^{(n+1)}(y^{(n+1)}, \varepsilon), \quad 1 \leq n \leq d-1, \quad (10)$$

минимальная степень полинома $H^{(n+1)}$ которой по $x^{(n+1)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ равняется $k_{n+1}+1$, а максимальная – $k_{n+1} + n$, преобразующая первые 2^{n+1} уравнений системы (9) при условиях (7) на вектор $\lambda^{(n)}$ в систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_{(1)}^{(n+1)} &= \varepsilon^{\theta_n} (-\lambda^{(n)} \cdot y_{(2)}^{(n+1)} + y_{(1)}^{(n+1)} \cdot (S^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) \\ &\quad + \hat{Y}_1^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) - y_{(2)}^{(n+1)} \cdot \hat{Y}_2^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) + Y_{(1)}^{(n+1)}(y^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{y}_{(2)}^{(n+1)} &= \varepsilon^{\theta_n} (\lambda^{(n)} \cdot y_{(1)}^{(n+1)} + y_{(2)}^{(n+1)} \cdot (S^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) \\ &\quad + \hat{Y}_1^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) + y_{(1)}^{(n+1)} \cdot \hat{Y}_2^{(n)}(\tilde{y}^{(n)}, \varepsilon) + Y_{(2)}^{(n+1)}(y^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \end{aligned} \quad (11)$$

в которой

$$\hat{Y}_j^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\nu_2} \varepsilon^\nu \sum_{\mu=\mu_1/2}^{[\mu_2/2]} \hat{Y}_j^{(n),\mu} (y_{(1)}^{(n+1)^2} + y_{(2)}^{(n+1)^2}), \quad j = 1, 2;$$

функция $Y^{(n+1)}$ имеет ту же структуру, что и функция $X^{(n+1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормализовать систему, имеющую различные благодаря (7) чисто мнимые собственные числа, удобно, когда матрица ее линейной части приведена к диагональному виду, для чего необходимо сделать линейную замену переменных

$$x_{(1)}^{(n+1)} = \frac{1}{2}(u^{(n)} + \bar{u}^{(n)}), \quad x_{(2)}^{(n+1)} = \frac{1}{2i}(u^{(n)} - \bar{u}^{(n)}), \quad (12)$$

где $u^{(n+1)} = (u^{(n)}, \bar{u}^{(n)})$, а черта – это знак комплексного сопряжения, переводящую уравнения для $\dot{x}^{(n+1)}$ системы (9) в систему

$$\begin{aligned} \dot{u}^{(n)} = & \varepsilon^{\theta_n} (u^{(n)} \cdot (i\lambda^{(n)} + S^{(n)}(u^{(n)} \cdot \bar{u}^{(n)}, \varepsilon)) \\ & + \hat{U}^{(n)}(u^{(n+1)}, \varepsilon) + U^{(n)}(u^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \end{aligned} \quad (13)$$

в которой остались не выписанными 2^n уравнений, являющихся комплексно сопряженными к уравнениям (13), а структура функций $\hat{U}^{(n)}$ и $U^{(n)}$ аналогична структуре функций $\hat{X}^{(n+1)}$ и $X^{(n+1)}$ системы (9).

Максимальная степень полинома $u^{(n)} \cdot S^{(n)}$ по $u^{(n+1)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ не превосходит k_{n+1} , и этот полином уже записан в нормальной форме. Нормализуем полином $\hat{U}^{(n)}$, который также не зависит от $\tilde{\varphi}^{(n+1)}$. Иными словами, приведем систему (13) к нормальной форме по $u^{(n+1)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ до порядка $k_{n+1} + n$ включительно при помощи полиномиальной замены

$$u^{(n)} = v^{(n)} + G^{(n)}(v^{(n+1)}, \varepsilon), \quad \bar{u}^{(n)} = \bar{v}^{(n)} + \bar{G}^{(n)}, \quad 1 \leq n \leq d-1, \quad (14)$$

в которой $G^{(n)}$ имеет ту же структуру, что и полином $H^{(n+1)}$ замены (10).

В лемме из работы [1, гл. 1, § 2, с. 28], в частности, доказывается, что при условии (7) система (13) заменой (14) может быть приведена к виду

$$\dot{v}^{(n)} = \varepsilon^{\theta_n} (v^{(n)} \cdot (i\lambda^{(n)} + S^{(n)}(v^{(n)} \cdot \bar{v}^{(n)}, \varepsilon)) + \hat{V}^{(n)}(v^{(n)} \cdot \bar{v}^{(n)}, \varepsilon) + V^{(n)}(v^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \quad (15)$$

где

$$\hat{V}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{\nu_2} \varepsilon^\nu \sum_{\mu=\mu_1/2}^{[\mu_2/2]} \hat{V}^{(n),\mu} (v^{(n)} \cdot \bar{v}^{(n)}),$$

а $V^{(n)}$ представляет собой сумму функции $U^{(n)}$, в которую подставлена (14), и некоторого полинома, степень которого по $v^{(n+1)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ ограничена снизу числом $k_{n+1} + n + 1$. Поэтому $V^{(n)}$ может быть записана в виде

$$V^{(n)}(\sqrt{\varepsilon}v^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{k_{n+1}+n+1} V_*^{(n)}(v^{(n+1)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \varepsilon).$$

Для того чтобы завершить доказательство леммы 3, остается овеществить систему (15), т.е. сделать линейную замену

$$v^{(n)} = y_{(1)}^{(n+1)} + iy_{(2)}^{(n+1)}, \quad \bar{v}^{(n)} = y_{(1)}^{(n+1)} - iy_{(2)}^{(n+1)}, \quad (16)$$

обратную к (12). В результате будет получена вещественная система (11), в которой $\hat{Y}_1^{(n)} = \text{Re } \hat{V}^{(n)}$, $\hat{Y}_2^{(n)} = \text{Im } \hat{V}^{(n)}$, а замена (10) представляет собой суперпозицию замен (12), (14) и (16). Лемма 3 доказана.

Надо отметить, что поскольку $\hat{Y}_j^{(n)}$ — полиномы по целым степеням ε и числа $k_{n+1} + 1$ всегда четные, то минимальная степень этих полиномов по $y^{(n+1)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ как раз равняется $k_{n+1} + 1$. Например, в системе (11) при $n = 1$ полиномы $\hat{Y}_j^{(n)}$ по этой причине отсутствуют.

Сделаем теперь в системе (11) полярную замену переменных

$$y_{(1)}^{(n+1)} = r^{(n)} \cdot \cos \varphi^{(n)}, \quad y_{(2)}^{(n+1)} = r^{(n)} \cdot \sin \varphi^{(n)}. \quad (17)$$

Тогда $r^{(n)2} = \tilde{y}^{(n)}$ и из (11) получим систему

$$\begin{aligned} \dot{r}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_n} (r^{(n)} \cdot (S^{(n)}(r^{(n)2}, \varepsilon) + \hat{Y}_1^{(n)}(r^{(n)2}, \varepsilon)) + R^{(n)}(r^{(n)}, \varphi^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ r^{(n)} \cdot \dot{\varphi}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_n} (r^{(n)} \cdot (\lambda^{(n)} + \hat{Y}_2^{(n)}(r^{(n)2}, \varepsilon)) + \Phi^{(n)}(r^{(n)}, \varphi^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon})), \end{aligned} \quad (18)$$

в которой

$$R^{(n)} = Y_{(1)}^{(n+1)}(r^{(n)} \cdot \cos \varphi^{(n)}, r^{(n)} \cdot \sin \varphi^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}, \sqrt{\varepsilon}) \cdot \cos \varphi^{(n)} + Y_{(2)}^{(n+1)}(\dots) \cdot \sin \varphi^{(n)},$$

а функция $\Phi^{(n)}$ записывается аналогично.

Возьмем произвольно выбранный вектор $c^{(n)}$ с положительными компонентами и сделаем расщепляющую замену переменных

$$r^{(n)} = \sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)}), \quad (19)$$

где $|x_j^{(n)}| < |c_j^{(n)}|$ при $j = 1, \dots, 2^n$.

В результате замены (19) из каждого слагаемого однородных полиномов $Q^{k_n, \nu}(\varepsilon \times (c^{(n)} + x^{(n)})^2, \varepsilon)$, входящих в функцию $S^{(n)}$ системы (18), стало возможно вынести ε^{k_n} , после чего они согласно (5) превратились в полиномы $P^{k_n, \nu}((c^{(n)} + x^{(n)})^2)$. Полиномы $\hat{Y}_j^{(n)}$ стали начинаться по $\sqrt{\varepsilon}$ с порядка $k_{n+1} + 1$, а функции $R^{(n)}$, $\Phi^{(n)}$ — с порядка $k_{n+1} + n + 1$. Поэтому полученные после замены (19) уравнения для $\dot{x}^{(n)}$ можно сократить на $\sqrt{\varepsilon}$ и из всех слагаемых правой части вынести $\sqrt{\varepsilon}^{2k_n}$, учитывая, что $k_{n+1} = 2k_n + k_n$ и $n \geq 1$. В свою очередь, в уравнениях для $\dot{\varphi}^{(n)}$ после деления на $\sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)})$ полученная из $\hat{Y}_2^{(n)} + r^{(n)-1} \cdot \Phi^{(n)}$ функция будет иметь минимальный порядок по $\sqrt{\varepsilon}$, равный $k_{n+1} + 1$. Используем также обозначение из п. 1.1, согласно которому $(\varphi^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n+1)}) = \tilde{\varphi}^{(n)}$. Тогда полученную из (18) систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_n + k_n} \left((c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \sum_{\nu=0}^{m_n} P^{k_n, \nu}((c^{(n)} + x^{(n)})^2) \varepsilon^\nu \right. \\ &\quad \left. + \hat{X}_2^{(n)}(x^{(n)}, \varepsilon) + X^{(n)}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}) \right), \\ \dot{\varphi}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_n} (\lambda^{(n)} + \sqrt{\varepsilon}^{k_{n+1}+1} \Phi_*^{(n), n}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (20)$$

где в полином $\widehat{X}_2^{(n)}$ собраны все слагаемые многочлена

$$(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \widehat{Y}_1^{(n)}(\varepsilon(c^{(n)} + x^{(n)})^2, \varepsilon)\varepsilon^{-k_n},$$

имеющие суммарную степень по $x^{(n)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ не выше $k_n + (n - 1)$. Остальные слагаемые этого многочлена вместе с $R^{(n)}$ образуют функцию $X^{(n)}$. Поэтому $\widehat{X}_2^{(n)}$ имеет минимальную степень $\sqrt{\varepsilon}$, равную $k_n + 1$, а

$$X^{(n)}(\sqrt{\varepsilon}x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{k_n+(n-1)+1} X_*^{(n)}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \varepsilon).$$

Разобьем уравнение для $\dot{x}^{(n)}$ на два, положив $\dot{x}^{(n)} = (\dot{x}_{(1)}^{(n)}, \dot{x}_{(2)}^{(n)})$, и поступим так же с вектор-функциями правой части. После этого переразложим полиномы $P_{(j)}^{k_n, \nu}$ ($j = 1, 2$), входящие в систему (20), по степеням $x^{(n)}$, как это сделано в формуле (4). Получившиеся после этого полиномы

$$\sum_{\nu=0}^{m_n} \tilde{P}_{(j)}^{k_n, \nu}(x^{(n)})\varepsilon^\nu$$

перепишем в виде (3). В свою очередь, образовавшийся после переразложения (4) полином

$$\sum_{\nu=0}^{m_n} T^{k_n, \nu}(x^{(n)})\varepsilon^\nu,$$

имеющий минимальный порядок $k_n + 1$ по $x^{(n)}$, аналогично предыдущему разделим на две части, одну из которых обозначим $\widehat{X}_1^{(n)}(x^{(n)}, \varepsilon)$. Ее порядок по $x^{(n)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$ не превышает $k_n + (n - 1)$. Оставшиеся слагаемые можно добавить в функцию $X^{(n)}$. И, наконец, согласно введенным в п. 1.1 обозначениям имеем $\theta_n + k_n = \theta_{n-1}$, $k_{n+1} + 1 = 2m_{n+1} + 2$, $\theta_n + m_{n+1} = \theta$.

Возвращаясь к системе (9), заметим, что суперпозиция замен (10), (17) и (19) не меняет структуры 2^n уравнений для $\dot{\varphi}^{(l)}$. Функции $\Phi_*^{(l), n+1}$ в них после подстановки обозначим через $\Phi_*^{(l), n}$.

Итак, из системы (9) после замен (10), (17) и (19) получена система

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_{n-1}} (-\lambda^{(n-1)} \cdot x_{(2)}^{(n)} + x_{(1)}^{(n)} \cdot S^{(n-1)}(\tilde{x}^{(n-1)}, \varepsilon) \\ &\quad + \widehat{X}_{(1)}^{(n)}(x^{(n)}, \varepsilon) + X_{(1)}^{(n)}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{x}_{(2)}^{(n)} &= \varepsilon^{\theta_{n-1}} (\lambda^{(n-1)} \cdot x_{(1)}^{(n)} + x_{(2)}^{(n)} \cdot S^{(n-1)}(\tilde{x}^{(n-1)}, \varepsilon) \\ &\quad + \widehat{X}_{(2)}^{(n)}(x^{(n)}, \varepsilon) + X_{(2)}^{(n)}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{\varphi}^{(l)} &= \varepsilon^{\theta_l} \lambda^{(l)} + \varepsilon^{\theta+1} \Phi_*^{(l), n}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}), \quad l = n, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (21)$$

в которой

$$S^{(n-1)} = \sum_{\nu=0}^{m_{n-1}} Q^{k_{n-1}, \nu}(x_{(1)}^{(n)2} + x_{(2)}^{(n)2}, \varepsilon)\varepsilon^\nu;$$

$\widehat{X}^{(n)} = \widehat{X}_1^{(n)} + \widehat{X}_2^{(n)}$; $X^{(n)}(\sqrt{\varepsilon}x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{k_n+(n-1)+1} X_*^{(n)}(x^{(n)}, \tilde{\varphi}^{(n)}, \varepsilon)$, а функции $X_*^{(n)}$ и $\Phi_*^{(l), n}$ точно так же непрерывны при малых значениях своих аргументов, 2π -периодичны по $\tilde{\varphi}^{(n)}$ и непрерывно дифференцируемы по $x^{(n)}$ и $\tilde{\varphi}^{(n)}$.

Шаг с номером $d - n$, где $d \geq 2$, $1 \leq n \leq d - 1$, завершен, так как система (21) является копией (9) при замене в последней n на $n - 1$.

2.3. Прodelав указанным способом $d - 1$ шагов, получим систему (21) с $n = 1$, когда $k_0 = 1$, $m_0 = 0$, $\lambda_1^{(0)} = \lambda^{(0)}$, т.е. (21) выглядит так:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{(1)} &= \varepsilon^{\theta_0} (-\lambda^{(0)} x_2^{(1)} + x_1^{(1)} S^{(0)}(\tilde{x}^{(0)}, \varepsilon) + X_1^{(1)}(x^{(1)}, \tilde{\varphi}^{(1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{x}_2^{(1)} &= \varepsilon^{\theta_0} (+\lambda^{(0)} x_1^{(1)} + x_2^{(1)} S^{(0)}(\tilde{x}^{(0)}, \varepsilon) + X_2^{(1)}(x^{(1)}, \tilde{\varphi}^{(1)}, \sqrt{\varepsilon})), \\ \dot{\varphi}^{(l)} &= \varepsilon^{\theta_l} \lambda^{(l)} + \varepsilon^{\theta+1} \Phi_*^{(l),1}(x^{(1)}, \tilde{\varphi}^{(1)}, \sqrt{\varepsilon}), \quad l = 1, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (22)$$

где $S^{(0)} = Q^{1,0}(x_1^{(1)^2} + x_2^{(1)^2}, \varepsilon)$, а $\hat{X}^{(1)} \equiv 0$, так как разрыв между функциями $x_j^{(1)} S^{(0)}$ и $X_j^{(1)}$ исчез.

До сих пор предполагалось, что $d \geq 2$. Это позволяло сделать по крайней мере один шаг процесса рекуррентных преобразований. При $d = 1$ исходная система (6) сразу совпадает с первыми двумя уравнениями системы (22), остальные уравнения в которой просто отсутствуют.

Сделаем завершающий шаг процесса с номером d , после которого линейная часть вновь получаемой системы, а в данном случае уравнения, перестанет быть критической. Для этого рассмотрим систему (9) при $n = 0$, очевидно совпадающую с системой (22).

В замене (10) из леммы 3 $H^{(1)} \equiv 0$, поскольку нормализовывать стало нечего. Поэтому $x^{(1)} = y^{(1)}$. Выполним замены (17) и (19) с $n = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (22) получим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(0)} &= \varepsilon^{\theta_0+k_0} ((c^{(0)} + x^{(0)}) P^{1,0}((c^{(0)} + x^{(0)})^2) + \sqrt{\varepsilon} X_*^{(0)}(x^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)), \\ \dot{\varphi}^{(0)} &= \varepsilon^{\theta_0} (\lambda^{(0)} + \sqrt{\varepsilon}^{k_1} \Phi_*^{(0),0}(x^{(0)}, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)), \end{aligned} \quad (23)$$

являющуюся аналогом системы (20) для $n = 0$, но в которой степень $\sqrt{\varepsilon}$ при функциях, отмеченных звездочкой, оказалась на единицу меньше ожидаемой. Поскольку $\theta_0 + 1 = \theta$ и справедливы равенства (4), (3) с $n = 0$, то первое уравнение системы (23) в точности совпадает с первым уравнением финальной системы (8).

Во втором уравнении системы (23) $\varepsilon^{\theta_0} \sqrt{\varepsilon}^{k_1} = \varepsilon^{\theta+1/2}$. А в уравнениях для $\dot{\varphi}^{(l)}$ системы (22) после подстановки в них новых переменных $x^{(0)}$, $\varphi^{(0)}$ “лишний” множитель $\sqrt{\varepsilon}$ просто занесем в функции $\Phi_*^{(l),1}$ и стандартно переобозначим их через $\Phi_*^{(l),0}$. В результате получаютcя оставшиеся $2^d - 1$ уравнений системы (8).

Приведенные рассуждения позволили доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в вещественной системе (6) $d \geq 1$ и выполняются условия несоизмеримости (7). Тогда существует рекуррентная последовательность вещественных замен переменных

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= (\sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \cos^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \sin^{(n)}) \\ &\quad + H^{(n+1)}((\sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \cos^{(n)}, \sqrt{\varepsilon}(c^{(n)} + x^{(n)}) \cdot \sin^{(n)}), \varepsilon) \end{aligned} \quad (24)$$

с $0 \leq n \leq d - 1$, являющаяся суперпозицией замен (10), (17) и (19), которая преобразует систему (6) в систему (8).

3. Теорема о бифуркации, пример, комментарий.

3.1. ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \geq 1$; $k_n = 3^n$, $m_n = (3^n - 1)/2$, $\theta_n = (3^d - 3^{n+1})/2$ ($0 \leq n \leq d-1$). Выберем $c^{(0)}, \dots, c^{(d-1)}$ – произвольные векторы с положительными компонентами, $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(d-1)}$ – произвольные вещественные векторы с ненулевыми компонентами, удовлетворяющие конечному числу условий несоизмеримости (7), и вещественные числа $\lambda^{(0)}$, $\lambda \neq 0$. Тогда в 2^d -мерной системе (6), полином S^{d-1} которой построен в лемме 2, а функции $\hat{X}^{(d)}, X^{(d)}$ произвольны, при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε происходит бифуркация рождения инвариантного тора максимальной размерности $2^d - 1$. Векторы амплитуд и частот колебаний на нем при малых ε близки к векторам с компонентами $\varepsilon^{(d-n)/2} c^{(n)}$ и $\varepsilon^{\theta_n} \lambda^{(n)}$ соответственно ($n = d-1, \dots, 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 1 2^d -мерная система (6) рекуррентной последовательностью замен (24) после d шагов сведена к системе (8). Сделаем масштабирующую замену

$$x^{(0)} = \sqrt{\varepsilon} z. \quad (25)$$

Тогда из системы (8) получим систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \varepsilon^\theta (\lambda z + Z_*(\varepsilon^{1/4} z, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)), \\ \dot{\varphi}^{(l)} &= \varepsilon^{\theta_l} \lambda^{(l)} + \varepsilon^{\theta+1/4} \Phi_*(\varepsilon^{1/4} z, \tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon), \quad l = 0, \dots, d-1, \end{aligned} \quad (26)$$

где Z_*, Φ_* – непрерывные классы $C_{x^{(0)}, \varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(d-1)}}^1$ при малых z и ε , 2π -периодические по компонентам вектора $\tilde{\varphi}^{(0)}$ функции.

Множитель $\varepsilon^{1/4}$ вместо $\varepsilon^{1/2}$ появился в системе (26) только из-за подстановки замены (25) в полином $T^{1,0}$ системы (8). При желании этого можно всегда избежать, сделав предварительно в системе (8) аналитическую в нуле замену переменных, которая аннулирует $T^{1,0}$. Однако, в этом нет необходимости, так как система (26) является частным случаем системы (4) из работы [1, гл. 1, § 3, с. 32], замена $\varepsilon^{1/2}$ в которой на $\varepsilon^{1/4}$ не существенна. Согласно теореме, доказанной в [1, с. 31] и являющейся одной из модификаций леммы Хейла [2], система (26) при всех достаточно малых положительных ε имеет инвариантное многообразие, задаваемое уравнением $z = F(\tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)$, где функция F непрерывная и 2π -периодическая по компонентам вектора $(\varphi^{(0)}, \dots, \varphi^{(d)})$ размерности $2^d - 1$. Но тогда исходная система (6) обладает инвариантной поверхностью, гомеоморфной тору коразмерности единица, которая получается из инвариантной поверхности $x^{(0)} = \sqrt{\varepsilon} F(\tilde{\varphi}^{(0)}, \varepsilon)$ системы (8) при помощи рекуррентных преобразований (24) и, очевидно, стягивается к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом вектор амплитуд колебаний на торе сколь угодно близок при малых ε к вектору $(\varepsilon^{1/2} c^{(d-1)}, \dots, \varepsilon^{d/2} c^{(0)})$, так как $H^{(n+1)}$ в (24) и инвариантная поверхность системы (8) имеют положительный порядок по ε . А из вида уравнений для $\dot{\varphi}^{(l)}$ системы (8) вытекает, что вектор частот колебаний при малых ε близок к вектору $(\varepsilon^{\theta_{d-1}} \lambda^{(d-1)}, \dots, \varepsilon^{\theta_0} \lambda^{(0)}) / (2\pi)$. Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При любом достаточно малом положительном ε полиномиальная 2^d -мерная система

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(1)}^{(d)} &= -\lambda^{(d-1)} \cdot x_{(2)}^{(d)} + x_{(1)}^{(d)} \cdot S^{(d-1)}(x_{(1)}^{(d)2} + x_{(2)}^{(d)2}, \varepsilon), \\ \dot{x}_{(2)}^{(d)} &= +\lambda^{(d-1)} \cdot x_{(1)}^{(d)} + x_{(2)}^{(d)} \cdot S^{(d-1)}(x_{(1)}^{(d)2} + x_{(2)}^{(d)2}, \varepsilon) \end{aligned} \quad (27)$$

имеет инвариантный тор максимальной размерности $2^d - 1$. Степень полиномов, входящих в правую часть системы (27) по $x^{(d)}$ не превосходит $2k_{d-1} + 1$, по ε не превосходит m_d , а их суммарная степень по $x^{(d)}$ и ε не превосходит $k_d - m_{d-1}$.

3.2. В качестве примера построим однородные полиномы $Q^{k_{d-1}, \nu}$ для $d = 2$, когда $k_{d-1} = 3$, а $\nu = 0, 1$. Тем самым, будет построено множество четырехмерных систем из теоремы 2, в которых происходит бифуркация трехмерного тора. Как уже отмечалось в п. 1.2, число различных степеней полинома третьей степени от двух переменных

$$\tau_{3,2} = \sum_{\nu=0}^3 (\nu + 1) = 10,$$

поэтому для нахождения коэффициентов полиномов $Q_j^{3,\nu}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon)$ ($j = 1, 2$) предстоит решить линейную систему 10-го порядка из леммы 1.

Учитывая, что $d = 2$, немного упростим обозначения. Вместо $c^{(0)}, \lambda^{(0)}, x^{(0)}$ будем писать c_0, λ_0, x_0 , а у компонент векторов $c^{(1)}$ и $\lambda^{(1)}$ не будем писать верхний индекс.

Итак, пусть сначала $n = 0$. Тогда $m_n = 0, k_n = 1$. Из равенств (3) и (4) получаем $\tilde{P}^{1,0}(x_0) = \lambda x_0, (c_0 + x_0)P^{1,0}((c_0 + x_0)^2) = \lambda x_0 + o(|x_0|)$.

Поскольку $P^{1,0}(z_0) = \alpha^{(0)0} + \alpha^{(1)0}z_0$, то $\alpha^{(1)0}c_0^2 + \alpha^{(0)0} = 0, 2c_0^2\alpha^{(1)0} = \lambda$, откуда $\alpha^{(1)0} = \lambda/(2c_0^2), \alpha^{(0)0} = -\lambda/2$, и полином $P^{1,0}$ найден. Дополнив его до однородного полинома $Q^{1,0}$ по формуле (5), получаем $S^{(0)} = Q^{1,0}(\tilde{x}_0, \varepsilon) = \alpha^{(0)0}\varepsilon + \alpha^{(1)0}\tilde{x}_0$.

Пусть теперь $n = 1$. Тогда в равенствах (3)–(5) векторные полиномы двумерны, $k_n = 3, m_n = 1, \nu = 0, 1, \tilde{x}_0 = x_1^{(1)^2} + x_2^{(1)^2}$. Из равенства (3) получаем следующие полиномы:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^{3,1}(x^{(1)}) &= \alpha^{(0)0}x_1^{(1)}, & \tilde{P}_1^{3,0}(x^{(1)}) &= -\lambda_0x_2^{(1)} + \alpha^{(1)0}x_1^{(1)}(x_1^{(1)^2} + x_2^{(1)^2}), \\ \tilde{P}_2^{3,1}(x^{(1)}) &= \alpha^{(0)0}x_2^{(1)}, & \tilde{P}_2^{3,0}(x^{(1)}) &= +\lambda_0x_1^{(1)} + \alpha^{(1)0}x_2^{(1)}(x_1^{(1)^2} + x_2^{(1)^2}). \end{aligned}$$

Обозначим через $\tilde{\alpha}_j^{\nu}$, где $j = 1, 2$ и $\nu = 0, 1$, вектор коэффициентов полинома $\tilde{P}_j^{3,\nu}$, т.е. вектор

$$(\tilde{\alpha}_j^{(0,0)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(1,0)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(0,1)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(2,0)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(1,1)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(0,2)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(3,0)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(2,1)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(1,2)\nu}, \tilde{\alpha}_j^{(0,3)\nu}),$$

и через α_j^{ν} аналогичный вектор коэффициентов полинома $P_j^{3,\nu}$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1^1 &= (0, \alpha^{(0)0}, 0, 0, \dots, 0), & \tilde{\alpha}_1^0 &= (0, 0, -\lambda_0, 0, 0, 0, \alpha^{(1)0}, 0, \alpha^{(1)0}, 0), \\ \tilde{\alpha}_2^1 &= (0, 0, \alpha^{(0)0}, 0, \dots, 0), & \tilde{\alpha}_2^0 &= (0, +\lambda_0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha^{(1)0}, 0, \alpha^{(1)0}). \end{aligned}$$

Из равенства (4) вытекает, что

$$A_j(c_1, c_2)\alpha_j^{\nu} = \tilde{\alpha}_j^{\nu}, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 0, 1, \quad (28)$$

где, например, матрица $A_1(c_1, c_2)$ равняется

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1^2 & c_2^2 & c_1^4 & c_1^2 c_2^2 & c_2^4 & c_1^6 & c_1^4 c_2^2 & c_1^2 c_2^4 & c_2^6 \\ 0 & 2c_1^2 & 0 & 4c_1^4 & 0 & 0 & 6c_1^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_1 c_2 & 0 & 0 & 4c_1 c_2^3 & 0 & 0 & 0 & 6c_1 c_2^5 \\ 0 & 3c_1 & 0 & 10c_1^3 & 0 & 0 & 21c_1^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 & 0 & 4c_1^2 c_2 & 4c_2^3 & 0 & 8c_1^4 c_2 & 8c_1^2 c_2^3 & 6c_2^5 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 6c_1 c_2^2 & 0 & 0 & 0 & 15c_1 c_2^4 \\ 0 & 1 & 0 & 10c_1^2 & 0 & 0 & 35c_1^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6c_1 c_2 & 0 & 0 & 20c_1^3 c_2 & 12c_1 c_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2c_1^2 & 6c_2^2 & 0 & 4c_1^4 & 12c_1^2 c_2^2 & 15c_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4c_1 c_2 & 0 & 0 & 0 & 20c_1 c_2^3 \end{pmatrix}.$$

Решив линейные системы (28) при $j = 1$ и подставив в решения уже найденные коэффициенты $\alpha^{(\nu)0}$, получаем вектор

$$\alpha_1^1 = \left(\frac{19\lambda}{32}, -\frac{35\lambda}{32c_1^2}, 0, \frac{21\lambda}{32c_1^4}, 0, 0, -\frac{5\lambda}{32c_1^6}, 0, 0, 0 \right)$$

и вектор α_1^0 с компонентами

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0,0)0} &= \frac{3c_2}{16c_1} \lambda_0 - \frac{c_1^2 - c_2^2}{16c_0^2} \lambda, & \alpha_1^{(1,0)0} &= \frac{3\lambda}{16c_0^2}, & \alpha_1^{(0,1)0} &= -\frac{15\lambda_0}{16c_1 c_2}, \\ \alpha_1^{(2,0)0} &= -\frac{3\lambda}{16c_0^2 c_1^2}, & \alpha_1^{(1,1)0} &= \frac{3\lambda_0}{4c_1^3 c_2} - \frac{\lambda}{8c_0^2 c_1^2}, & \alpha_1^{(0,2)0} &= \frac{5\lambda_0}{16c_1 c_2^3}, \\ \alpha_1^{(3,0)0} &= \frac{\lambda}{16c_0^2 c_1^4}, & \alpha_1^{(2,1)0} &= -\frac{3\lambda_0}{16c_1^5 c_2}, \\ \alpha_1^{(1,2)0} &= -\frac{\lambda_0}{16c_1^3 c_2^3} + \frac{\lambda}{16c_0^2 c_1^2 c_2^2}, & \alpha_1^{(0,3)0} &= \frac{\lambda_0}{16c_1 c_2^5}. \end{aligned}$$

Таким образом, полиномы $P_1^{3,0}$ и $P_1^{3,1}$ построены. Полиномы $P_2^{k_1, \nu}$ строятся точно так же. При этом оказывается, что полином

$$P_1^{3,1}(x^{(1)}) = \frac{19\lambda}{32} - \frac{35\lambda}{32c_1^2} x_1^{(1)} + \frac{21\lambda}{32c_1^4} x_1^{(1)2} - \frac{5\lambda}{32c_1^6} x_1^{(1)3}$$

не зависит от второй компоненты двумерного вектора $x^{(1)}$.

Теперь остается дополнить полиномы $P_j^{3, \nu}$ по формуле (5) до однородных многочленов третьего порядка $Q_j^{3, \nu}$. Так, например,

$$Q_1^{3,1}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) = \frac{19\lambda}{32} \varepsilon^3 - \frac{35\lambda}{32c_1^2} \tilde{x}_1^{(1)} \varepsilon^2 + \frac{21\lambda}{32c_1^4} (\tilde{x}_1^{(1)})^2 \varepsilon - \frac{5\lambda}{32c_1^6} (\tilde{x}_1^{(1)})^3.$$

Согласно введенным в п. 1.1 обозначениям $\tilde{x}^{(1)} = x_{(1)}^{(2)} + x_{(2)}^{(2)}$ или $\tilde{x}^{(1)} = (\tilde{x}_1^{(1)}, \tilde{x}_2^{(1)}) = (x_1^{(2)2} + x_3^{(2)2}, x_2^{(2)2} + x_4^{(2)2})$. Опуская для краткости верхний индекс у компонент вектора $x^{(2)}$, выпишем в общем виде все однородные многочлены $Q_j^{3, \nu}$:

$$\begin{aligned} Q_j^{3, \nu}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) &= \alpha_j^{(0,0)\nu} \varepsilon^3 + (\alpha_j^{(1,0)\nu} (x_1^2 + x_3^2) + \alpha_j^{(0,1)\nu} (x_2^2 + x_4^2)) \varepsilon^2 \\ &\quad + (\alpha_j^{(2,0)\nu} (x_1^2 + x_3^2)^2 + \alpha_j^{(1,1)\nu} (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2) \\ &\quad + \alpha_j^{(0,2)\nu} (x_2^2 + x_4^2)^2) \varepsilon + \alpha_j^{(3,0)\nu} (x_1^2 + x_3^2)^3 + \alpha_j^{(2,1)\nu} (x_1^2 + x_3^2)^2 (x_2^2 + x_4^2) \\ &\quad + \alpha_j^{(1,2)\nu} (x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2)^2 + \alpha_j^{(0,3)\nu} (x_2^2 + x_4^2)^3, \end{aligned}$$

где $j = 1, 2$, $\nu = 0, 1$; коэффициенты α_j^ν подсчитаны выше и зависят от параметров $c_0, c_1, c_2, \lambda, \lambda_0$.

Рассмотрим четырехмерную вещественную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_3 + x_1 (Q_1^{3,0}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{3,1}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon)) + \hat{X}_1(x^{(2)}, \varepsilon) + X_1(x^{(2)}, \sqrt{\varepsilon}), \\ \dot{x}_2 &= -\lambda_2 x_4 + x_2 (Q_2^{3,0}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) + \varepsilon Q_2^{3,1}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon)) + \hat{X}_2(x^{(2)}, \varepsilon) + X_2(x^{(2)}, \sqrt{\varepsilon}), \\ \dot{x}_3 &= +\lambda_1 x_1 + x_3 (Q_1^{3,0}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{3,1}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon)) + \hat{X}_3(x^{(2)}, \varepsilon) + X_3(x^{(2)}, \sqrt{\varepsilon}), \\ \dot{x}_4 &= +\lambda_2 x_2 + x_4 (Q_2^{3,0}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon) + \varepsilon Q_2^{3,1}(\tilde{x}^{(1)}, \varepsilon)) + \hat{X}_4(x^{(2)}, \varepsilon) + X_4(x^{(2)}, \sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (29)$$

в которой однородные многочлены $Q_j^{3,\nu}$ только что построены; $\hat{X}^{(d)}$ – произвольный однородный полином десятого порядка относительно $x^{(2)}$ и $\sqrt{\varepsilon}$;

$$X^{(2)}(\sqrt{\varepsilon}x^{(2)}, \sqrt{\varepsilon}) = \sqrt{\varepsilon}^{11} X_*^{(2)}(x^{(2)}, \varepsilon),$$

а $X_*^{(2)}(x^{(2)}, \varepsilon)$ – произвольная функция, указанного в теореме 1 класса гладкости.

Суперпозиция замен (24) с $n = 1$ и $n = 0$ ($H^{(1)} \equiv 0$) преобразует систему (29) согласно теореме 1 в систему (8) с $d = 2$, которая имеет по теореме 2 трехмерное инвариантное многообразие $x_0 = \sqrt{\varepsilon}F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)$. В результате можно в явном виде выписать инвариантное многообразие системы (29), гомеоморфное трехмерному тору:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\varepsilon}(c_1 + \sqrt{\varepsilon}(c_0 + \sqrt{\varepsilon}F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)) \cos \varphi_0) \cos \varphi_1 + H_1(x^{(2)}, \varepsilon), \\ x_2 &= \sqrt{\varepsilon}(c_2 + \sqrt{\varepsilon}(c_0 + \sqrt{\varepsilon}F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)) \sin \varphi_0) \cos \varphi_2 + H_2(x^{(2)}, \varepsilon), \\ x_3 &= \sqrt{\varepsilon}(c_1 + \sqrt{\varepsilon}(c_0 + \sqrt{\varepsilon}F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)) \cos \varphi_0) \sin \varphi_1 + H_3(x^{(2)}, \varepsilon), \\ x_4 &= \sqrt{\varepsilon}(c_2 + \sqrt{\varepsilon}(c_0 + \sqrt{\varepsilon}F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon)) \sin \varphi_0) \sin \varphi_2 + H_4(x^{(2)}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= H^{(2)}(\sqrt{\varepsilon}(c^{(1)} + (\sqrt{\varepsilon}(c_0 + x_0) \cos \varphi_0, \sqrt{\varepsilon}(c_0 + x_0) \sin \varphi_0)) \cdot \cos \varphi^{(1)}, \\ &\quad \sqrt{\varepsilon}(c^{(1)} + x^{(1)}) \cdot \sin \varphi^{(1)}, \varepsilon). \end{aligned}$$

Разложение полинома $H^{(2)}$ по степеням $\sqrt{\varepsilon}$, как уже было установлено, начинается с одиннадцатого порядка и не может оказывать существенного влияния на координаты инвариантного тора. Поэтому справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *В системе (29) при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε происходит бифуркация трехмерного инвариантного тора (30) с векторами амплитуд и частот колебаний на нем, стремящимися при $\varepsilon \rightarrow 0$ соответственно к векторам $(\sqrt{\varepsilon}c_1, \sqrt{\varepsilon}c_2, \varepsilon c_0)$ и $(\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon^3 \lambda_0)/(2\pi)$, причем константы $c^{(1)}, c^{(0)}$ и $\lambda^{(1)}, \lambda^{(0)}$ выбраны произвольным образом.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в системе (29) выбрать функции $\hat{X}^{(2)}$ и $X^{(2)}$ тождественно равными нулю, то (29) превратится в четырехмерную полиномиальную систему, порядок которой по $x^{(2)}$ не превосходит 7, по ε – 4, а суммарный порядок не превосходит 8. Согласно теореме 3 в системе (29) при каждом малом положительном значении параметра от положения равновесия ответвляется трехмерный инвариантный тор с наперед заданными амплитудами и частотами колебаний на нем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построенные в примере полиномы $Q^{3,\nu}$ можно использовать для построения систем более высокого порядка и в первую очередь восьмимерных, в которых бифурцирует семимерный тор. Однако, чисто технически сделать это затруднительно, так как уже при $d = 3$, когда $k_2 = 9$, а переменных у полиномов $Q^{9,\nu}$ четыре, пришлось бы решать линейную систему из леммы 1 порядка

$$\tau_{9,4} = \sum_{\nu=0}^9 \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{6} = 715.$$

3.3. Обсудим полученные результаты. В основу статьи легла работа Ю. Н. Бибикова [1], в которой, в частности, рассматривались системы вида (0) из введения. Для таких систем был предложен некий рекуррентный процесс, после каждого шага которого при выполнении ряда условий получалась система, аналогичная исходной, порядок которой уменьшался в два раза или более, а также дифференциальные уравнения для угловых и некритических переменных. Но процесс Бибикова оказался не приспособленным для нахождения инвариантных торов именно максимальной размерности. В ряде случаев он должен автоматически прерваться после первого же шага. Дело в том, что в предложенном Бибиковым процессе все константы k_n обязаны равняться единице, т.е. после каждой итерации степень ε в правой части уравнения для $\dot{x}^{(n)}$ увеличивается только на единицу. В этом случае свободных параметров, требующихся для выполнения условий, необходимых для продолжения процесса, после первого шага или позднее оказывается недостаточно. Поэтому для практического нахождения систем, в которых происходит бифуркация тора максимальной размерности, процесс Бибикова пришлось существенно модифицировать. В частности, полиномы $Q^{k_{d-1},\nu}$ в лемме 2 построены таким образом, что после каждой итерации они переходят в себя, а члены более высокого порядка не могут их разрушить; уравнения для $\dot{x}^{(n)}$ системы (21) имеют размерность ровно в два раза меньшую, чем предшествующие им уравнения для $\dot{x}^{(n+1)}$ системы (9); полученная на последнем шаге система (8) удовлетворяет теореме о существовании инвариантного многообразия. Таким образом, множество систем (6) реализует модифицированный процесс на практике.

В заключение отметим, что при $d = 1$ имеет место вариант хорошо известного случая бифуркации Хопфа, а при $d = 2$ существование четырехмерных систем, в которых бифурцирует трехмерный тор, было доказано в работе [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бибиков Ю. Н. Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации. Л.: Ленинградский ун-т, 1991.
- [2] Hale J. K. Integral manifolds of perturbed differential systems // Ann. of Math. 1961. V. 73. № 3. P. 496–531.
- [3] Maffei C., Negrini P., Scalla M. Bifurcation from 2-dimensional to 3-dimensional invariant tori // Ann. di Matematica pura ed applicata. IV. 1989. V. CLV. P. 117–136.

Научно-исследовательский институт математики и механики им. В. И. Смирнова
Санкт-Петербургского государственного университета
E-mail: basov@vb2674.spb.edu

Поступило
20.04.1999
Исправленный вариант
04.07.2000