Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Аветисян, Неравенства типа Литтлвуда–Пэли для n -гармонических функций в поликруге, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 4, 483–492

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm48>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:31:19

УДК 517.55

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ n -ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПОЛИКРУГЕ

К. Л. Аветисян

Для n -гармонических функций в единичном поликруге пространства $\mathbb{C}^n$ определены g -функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p -неравенства. Основные теоремы настоящей статьи распространяют на поликруг и обобщают на дробные производные произвольного порядка некоторые результаты Литтлвуда, Пэли, Флетта. Этим дается ответ на один вопрос, поставленный Литтлвудом.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть

$$U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$$

– единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$ и

$$T^n = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$$

– n -мерный тор (остов поликруга). В поликруге U^n будем рассматривать n -гармонические функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности.

Исследования в теории рядов Фурье в 30-х годах привели Литтлвуда и Пэли [1] к так называемой g -функции, носящей их имя:

$$g(f)(\theta) = \left(\int_0^1 (1-r) |f'(re^{i\theta})|^2 dr \right)^{1/2}, \quad \theta \in (-\pi, \pi), \quad (1)$$

где $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге U^1 . Один из основных результатов Литтлвуда и Пэли в связи с g -функцией – это эквивалентность норм $\|g(f)\|_{L^p}$ и $\|f\|_{L^p}$ на единичной окружности при $p > 1$ (см. [1], [2, гл. 14]). Аналогичный результат в верхнем полупространстве пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ установлен Стейном [3, гл. 4]. Ряд исследователей, в частности, Флетт [4], значительно расширили определение g -функции в единичном круге с помощью дробной производной и применили это в теоремах о мультипликаторах. Литтлвуд [5, задача 28, с. 43] высказал предположение о справедливости L^p -неравенств для g -функции в случае двух комплексных переменных и выразил желание обойтись без “плоских” комплексных методов.

В настоящей заметке с помощью дробных производных D^α (α – произвольный положительный мультииндекс) определены g -функции типа Литтлвуда–Пэли и установлены связанные с ними L^p -неравенства для n -гармонических функций в поликруге. Хотя

примененный в доказательстве теоремы 1 метод интерполяции операторов хорошо известен и применялся еще Зигмундом [2], но тем не менее, в отличие от [1], [2], [4] наши доказательства независимы от комплексных методов и, тем самым, пригодны для распространения на другие области в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$. С другой стороны, распространение вещественных методов [3] (таких, как формула Грина, методы гильбертовых пространств) на дробные производные произвольного порядка и значения параметров $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ проблематично.

2. Обозначения и формулировка основных теорем. Пусть

$$I^n = [0, 1]^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad r \in I^n, \quad dr = dr_1 \cdots dr_n, \quad r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n).$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m = (m_1, \dots, m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Считая также, что $q \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \quad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \quad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}, \quad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1).$$

Произведение $\prod$ далее всюду распространено от $j = 1$ до $j = n$, если не указано иное.

Для функции $f(z) = f(rw)$, $r \in I^n$, $w \in T^n$, заданной в U^n , введем в рассмотрение оператор $D^\alpha \equiv D_r^\alpha$ дробного интегродифференцирования Римана–Лиувилля относительно переменной $r \in I^n$:

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z) d\eta,$$

$$D^\alpha f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m D^{-(m-\alpha)} f(z),$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $1 \leq j \leq n$. Вместо D^α иногда будем писать $D^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$. Некоторые из координат α_j мультииндекса α могут быть равны нулю, например, оператор $D^{(0, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)}$ будем понимать как

$$D^{(0, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)} f(z) = \frac{\prod_{j=2}^n r_j^{\alpha_j}}{\prod_{j=2}^n \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^{n-1}} \prod_{j=2}^n (1-\eta_j)^{\alpha_j-1} f(\eta z) d\eta_2 \cdots d\eta_n.$$

Из определения оператора D^α ясно, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$,

$$D^{\pm\alpha} f = D_{r_1}^{\pm\alpha_1} D_{r_2}^{\pm\alpha_2} \cdots D_{r_n}^{\pm\alpha_n} f, \quad (2)$$

где $D_{r_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной r_j . В частности,

$$D^1 f \equiv D^{(1, 1, \dots, 1)} f = D_{r_1}^1 D_{r_2}^1 \cdots D_{r_n}^1 f.$$

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных параметров

$\alpha, \beta, \dots$. Для любого p , $1 \leq p \leq \infty$, число p' означает сопряженный индекс, т.е. $p' = p/(p-1)$ (мы полагаем $1/(+\infty) = 0$ и $1/0 = +\infty$). Все неравенства $A \leq B$ в формулировках следует понимать в следующем смысле: если B конечно, то и A конечно и $A \leq B$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и параметров $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, $0 < q \leq \infty$ определим g -функцию типа Литтлвуда–Пэли (ср. [4]):

$$g_{q,\alpha}(f)(w) \equiv g_q(D^\alpha f)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} |D^\alpha f(rw)|^q dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \text{ess sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |D^\alpha f(rw)|, & q = \infty. \end{cases}$$

Легко видеть, что при $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ функция $g_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g -функции (1).

Основными результатами заметки являются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, $1 < p < \infty$, $2 \leq q < \infty$ и $u(z)$ – интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда функция

$$g_q(r^\alpha D^\alpha u)(w) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} |r^\alpha D^\alpha u(rw)|^q dr \right)^{1/q}, \quad w \in T^n, \quad (3)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|g_q(r^\alpha D^\alpha u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \quad (3')$$

Если, к тому же, α_j целые либо $0 < \alpha_j < 1$, $1 \leq j \leq n$, то имеет место более сильное неравенство

$$\|g_q(D^\alpha u)\|_{L^p} \equiv \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \quad (3'')$$

Для произвольных $\alpha_j > 0$ неравенство (3'') имеет место при дополнительном предположении

$$D^{(k_1, \dots, k_n)} u(rw) = 0 \quad (4)$$

при всех $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\prod r_j = 0$, $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq k_j \leq [\alpha_j] - 1$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq 2$, $u(z)$ – n -гармоническая функция в U^n , удовлетворяющая условию (4), и $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причем

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

В случае $0 < \alpha_j < 1$, $1 \leq j \leq n$, предположение (4) становится излишним.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $n = 2$, $q = 2$, $\alpha = (1, 1)$ теоремы 1 и 2 дают положительный ответ на вопрос Литтлвуда [5, с. 39, 43].

3. Вспомогательные утверждения. Ядро Пуассона в поликруге U^n задается формулой

$$P(z, \zeta) = \prod P(z_j, \zeta_j) = \prod \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

ЛЕММА 1. Если $\alpha_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$, то

$$|r^\alpha D^\alpha P(z, \zeta)| \leq C(\alpha, n) \prod \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{\alpha_j + 1}}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

А если, к тому же, α_j целые, то сомножитель r^α в левой части можно удалить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается прямой оценкой.

ЛЕММА 2. Пусть $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n и $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$|r^\alpha D^\alpha f(z)| \leq C(p, q, \alpha, n) \|g_{q, \alpha}(f)\|_{L^p} \prod \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha_j + 1/p}}, \quad z \in U^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО мы опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гёльдера и n -субгармоническому поведению функции $|r^\alpha D^\alpha f|^p$, $p > 0$.

Следующая лемма, в частности, показывает, что функция $g_{q, \alpha}(f)$ “существенно” возрастающая по α .

ЛЕММА 3. Пусть $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n , $1 \leq q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, $D^{-\alpha} D^{\alpha+\beta} f = D^\beta f$. Тогда

$$g_{q, \beta}(f)(w) \leq C(\alpha, \beta, q, n) g_{q, \beta+\alpha}(f)(w), \quad w \in T^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается n -кратным повторением одномерного варианта этого же неравенства (см. [4]). Заметим, что если $0 < \alpha_j + \beta_j < 1$, то тождество $D^{-\alpha} D^{\alpha+\beta} f = D^\beta f$ заведомо выполнимо.

Далее, при фиксированных δ , $0 < \delta < 1$, и $\zeta = e^{i\theta} \in T^1$ будем рассматривать стандартную область $\Gamma_\delta(\zeta) \equiv \Gamma_\delta(\theta)$ в единичном круге U^1 , ограниченную двумя касательными к окружности $|z| = \delta$, проведенными из точки $\zeta = e^{i\theta}$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \delta$. При фиксированных δ_j , $0 < \delta_j < 1$, $1 \leq j \leq n$, и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$ определим $\Gamma_\delta(\zeta)$ как $\Gamma_\delta(\zeta) = \Gamma_{\delta_1}(\zeta_1) \times \dots \times \Gamma_{\delta_n}(\zeta_n)$.

ЛЕММА 4. Пусть $\alpha_j > 0$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, и $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n . Тогда для ее некасательной максимальной функции

$$f_\delta^*(\zeta) = \sup\{|f(z)| : z \in \Gamma_\delta(\zeta)\}$$

справедлива оценка

$$|r^\alpha D^\alpha f(rw)| \leq C(\alpha, \delta, n) \frac{f_\delta^*(w)}{(1-r)^\alpha}, \quad z = rw \in U^n. \quad (5)$$

А если, к тому же, α_j целые, то сомножитель r^α в левой части (5) можно удалить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $z = rw \in U^n$. Обозначим через $B = B_z$ поликруг с центром в этой точке и радиусом $(\delta_1(1 - r_1)/2, \dots, \delta_n(1 - r_n)/2)$ и заметим, что $B \subset \Gamma_\delta(w)$. Запишем представление Пуассона функции f в B :

$$f(z) = \int_{T_B} P_B(z, \zeta) f(\zeta) dm_n(\zeta),$$

где P_B – ядро Пуассона в поликруге B , T_B – остов поликруга B , m_n – поверхностная мера Лебега на T_B . Дифференцируя посредством оператора D^α и используя оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство (5).

4. Доказательство основных теорем. Для n -гармонической в U^n функции $u(z)$ и посредством области $\Gamma_\delta(\zeta)$ определим вариант интеграла площадей Лузина:

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |D^1 u(z)|^2 dm_{2n}(z) \right)^{1/2}, \quad \zeta \in T^n,$$

где m_{2n} – мера Лебега на поликруге U^n . Нам понадобится следующая лемма, доказанная Марцинкевичем и Зигмундом [2, с. 315] в единичном круге для $k = 1$ и классической g -функции (1).

ЛЕММА 5. Пусть $u(z)$ – n -гармоническая функция в U^n , $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_j \geq 1$, $0 < \delta_j < 1$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$g_{2,k}(u)(\zeta) \leq C(n, k, \delta) S_\delta(u)(\zeta), \quad \zeta \in T^n. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем лемму при $n = 1$, т.е. для единичного круга U^1 . Зафиксируем точку $z = re^{i\theta} \in U^1$ и рассмотрим круг

$$B = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \frac{\delta(1-r)}{2} \right\} \subset \Gamma_\delta(e^{i\theta}) \equiv \Gamma_\delta(\theta).$$

Из интегральной формулы Пуассона в круге B нетрудно получить неравенство

$$|D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{C(k)}{|B|(1-r)^{2(k-1)}} \iint_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt,$$

где $|B|$ – площадь круга B . При $\rho e^{it} \in B$ имеем $C'_\delta(1-r) < 1 - \rho < C''_\delta(1-r)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k, \delta) \iint_B |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}. \quad (7)$$

Теперь рассмотрим два случая. Вначале положим $0 \leq r \leq \delta/(2+\delta)$. Тогда расширим область интегрирования в (7) до круга

$$E \equiv E(r, \delta) = \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_2 \equiv r + \frac{\delta(1-r)}{2} \right\}.$$

Легко видеть, что $E(r, \delta) \subset \Gamma_\delta(\theta)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} \mathcal{X}_{(0, r_2)}(\rho) |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho},$$

где через $\mathcal{X}$ обозначена характеристическая функция интервала, указанного в индексе. Интегрирование по r и оценка внутреннего интеграла приводят к

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \\ & \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} \left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(0, r_2)}(\rho) dr \right) |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho} \\ & \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt. \end{aligned}$$

Теперь положим $\delta/(2+\delta) < r < 1$. Тогда расширим область интегрирования в (7) до кольцевого сектора, стороны которого касаются круга B :

$$(1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k, \delta) \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}, \quad (8)$$

где обозначено

$$r_{1,2} = r \mp \frac{\delta(1-r)}{2}, \quad \theta_{1,2} = \theta \mp \arcsin \frac{\delta(1-r)}{2r}.$$

Интегрирование неравенства (8) по r приводит к оценке

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(re^{i\theta})|^2 dr \\ & \leq C(k, \delta) \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \left(\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1, r_2)}(\rho) \mathcal{X}_{(\theta_1, \theta_2)}(t) dr \right) |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

Остается должным образом оценить внутренний интеграл. Имеем

$$\mathcal{X}_{(r_1, r_2)}(\rho) \mathcal{X}_{(\theta_1, \theta_2)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } r_1 < \rho < r_2, \theta_1 < t < \theta_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Условие $r_1 < \rho < r_2$ равносильно условию $\rho_1 < r < \rho_2$, где $\rho_{1,2} = (\rho \mp \delta/2)/(1 \mp \delta/2)$. Кроме того, $\theta_1 < t < \theta_2$ равносильно условию

$$r < r_0 \equiv \frac{1}{1 + 2/(\delta \sin |t - \theta|)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \mathcal{X}_{(r_1, r_2)}(\rho) \mathcal{X}_{(\theta_1, \theta_2)}(t) dr = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \mathcal{X}_{(0, r_0)}(r) dr \leq \begin{cases} \rho_2 - \rho_1, & \text{если } \rho_1 < r_0 < 1, \\ 0, & \text{если } 0 < r_0 \leq \rho_1. \end{cases}$$

Определим множество $G_\delta = \{\xi = \rho e^{it} \in U^1 : \rho_1 < r_0\}$ и подсчитаем $\rho_2 - \rho_1 = C_\delta(1 - \rho)$. После подстановки в (9) получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(\rho e^{it})|^2 dr \leq C(k, \delta) \iint_{G_\delta} |D^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt. \quad (10)$$

Теперь остается доказать вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\theta)$. Пусть $\xi = \rho e^{it} \in G_\delta$ и $\delta \leq \rho < 1$. Множество $\Gamma_\delta(\theta) \setminus \{|\xi| < \delta\}$ характеризуется тремя условиями:

$$\delta \leq \rho < 1, \quad |t| = |\arg \xi| < \arccos \delta, \quad |\arg(1 - \xi)| < \arcsin \delta. \quad (11)$$

В то же время множество G_δ определяется условием $\rho_1 < r_0$ или

$$\sin |t| < \frac{\delta}{2} \frac{1 - \rho}{\rho - \delta/2}.$$

Из двух справедливых оценок

$$\begin{aligned} \sin |t| &< \frac{\delta}{2} \frac{1 - \rho}{\rho - \delta/2} \leq 1 - \delta < \sqrt{1 - \delta^2}, \\ \sin |t| &< \frac{\delta}{2} \frac{1 - \rho}{\rho - \delta/2} \leq \frac{\delta}{\rho} \sqrt{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} \end{aligned}$$

вытекают два последних условия в (11), что доказывает вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\theta)$. Таким образом, из (10) получаем требуемое неравенство

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |D^k u(\rho e^{it})|^2 dr \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} |D^1 u(\xi)|^2 dm_2(\xi). \quad (12)$$

Случай $n = 1$ доказан. Общий случай $n > 1$ получается n -кратным применением (12) с использованием разложения (2). Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Сначала докажем теорему для целых значений $\alpha_j \geq 1$. Дифференцирование функции u посредством оператора D^α и оценка с помощью леммы 1 приводят к

$$|D^\alpha u(z)| \leq \int_{T^n} |D^\alpha P(z, \zeta)| |f(\zeta)| dm_n(\zeta) \leq \frac{C(\alpha, n)}{(1 - |z|)^\alpha} \int_{T^n} P(z, \zeta) |f(\zeta)| dm_n(\zeta).$$

Отсюда получаем поточечную оценку через некасательную максимальную функцию u_δ^* :

$$g_{\infty, \alpha}(u)(w) \leq C(\alpha, n) \sup_{r \in I^n} \int_{T^n} P(rw, \zeta) |f(\zeta)| dm_n(\zeta) \leq C(\alpha, n) u_\delta^*(w), \quad w \in T^n,$$

где $0 < \delta_j < 1$, $1 \leq j \leq n$, фиксированы. Используя максимальную теорему Зигмунда [6]

$$\|u_\delta^*\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}, \quad (13)$$

имеем

$$\|g_{\infty, \alpha}(u)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (14)$$

С другой стороны, последовательно применяя лемму 5, теорему Ганди–Стейна [7] об эквивалентности L^p -норм функций $S_\delta(u)$ и u_δ^* , а затем вновь неравенство (13), получаем оценку

$$\|g_{2,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C \|S_\delta(u)\|_{L^p} \leq C \|u_\delta^*\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}. \quad (15)$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса–Торина для пространств со смешанной нормой (см. [8, с. 316]) неравенства (14) и (15) влекут (3'') для всех q , $2 \leq q \leq \infty$, и целых $\alpha_j \geq 1$.

В общем случае $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq j \leq n$, докажем теорему сначала при $n = 1$. Производную D^α представим в виде (см., например, [9, с. 52])

$$D^\alpha u = D^{-(m-\alpha)} D^m u + \sum_{k=1}^m D^{m-k} u(0) \frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}, \quad (16)$$

$$|r^\alpha D^\alpha u| \leq D^{-(m-\alpha)} |D^m u| + C_\alpha \sum_{k=1}^m |D^{m-k} u(0)|, \quad (17)$$

что ввиду леммы 3 позволяет свести оценку к рассмотренному случаю целых α . Интегрирование неравенства (17) с q -й степенью и мерой $(1-r)^{\alpha q-1} dr$ на $(0, 1)$, а затем на окружности T^1 с p -й степенью приводит к (3'). При $0 < \alpha < 1$ получаем более сильное неравенство (3''), так как расходимости интеграла в нуле не возникает и можно оценить (16) без умножения на r^α .

При $n = 2$ представление (16) приобретает вид

$$\begin{aligned} D^{(\alpha_1, \alpha_2)} u(z_1, z_2) &= D^{-(m_1-\alpha_1), -(m_2-\alpha_2)} D^{(m_1, m_2)} u(z_1, z_2) \\ &+ \sum_{k_1=1}^{m_1} D_{r_1}^{m_1-k_1} D_{r_2}^{\alpha_2} u(0, z_2) \frac{r_1^{m_1-\alpha_1-k_1}}{\Gamma(1+m_1-\alpha_1-k_1)} \\ &+ \sum_{k_2=1}^{m_2} D_{r_1}^{\alpha_1} D_{r_2}^{m_2-k_2} u(z_1, 0) \frac{r_2^{m_2-\alpha_2-k_2}}{\Gamma(1+m_2-\alpha_2-k_2)} \\ &- \sum_{k_1=1}^{m_1} \sum_{k_2=1}^{m_2} D^{(m_1-k_1, m_2-k_2)} u(0, 0) \frac{r^{m-\alpha-k}}{\Gamma(1+m-\alpha-k)}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения с использованием оценки одномерного случая ведут к (3') и (3''). Ясно, что процедуру можно распространить на все $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду леммы 3 и условий (4) достаточно доказать теорему лишь для $0 < \alpha_j < 1$. Вначале положим $1 < q \leq 2$. Для произвольного фиксированного $r \in I^n$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(T^n)$, порожденный функцией $u(z)$:

$$F_u(v) = \int_{T^n} u(rw) v(w) dm_n(w), \quad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Считая, что $v(rw)$ – интеграл Пуассона функции $v(w)$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – малый положительный мультииндекс такой, что $0 < \alpha_j + \gamma_j < 1$, и воспользовавшись тождеством $r^\alpha D_r^\alpha = \eta^\alpha D_\eta^\alpha$, будем иметь

$$\begin{aligned} F_u(v) &= \int_{T^n} D_r^{-\alpha-\gamma} D_r^{\alpha+\gamma} u(rw) v(w) dm_n(w) \\ &= \frac{r^\gamma}{\prod \Gamma(\alpha_j + \gamma_j)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha+\gamma-1} \eta^\alpha \left[\int_{T^n} v(w) D_\eta^\alpha D_r^\gamma u(\eta rw) dm_n(w) \right] d\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Преобразуем внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} &\int_{T^n} v(w) D_\eta^\alpha D_r^\gamma u(\eta rw) dm_n(w) \\ &= \int_{T^n} v(w) D_r^\gamma \left[\int_{T^n} P(\sqrt{\eta} rw, \zeta) D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) dm_n(\zeta) \right] dm_n(w) \\ &= \int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) \left[\int_{T^n} D_r^\gamma P(\sqrt{\eta} rw, \zeta) v(w) dm_n(w) \right] dm_n(\zeta) \\ &= \int_{T^n} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) D_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r\zeta) dm_n(\zeta). \end{aligned}$$

Подставляя полученное в (18) и меняя порядок интегрирования, приходим к

$$F_u(v) = C(\alpha, \gamma, n) r^\gamma \int_{T^n} \left[\int_{I^n} \eta^\alpha (1-\eta)^{\alpha+\gamma-1} D_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) D_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r\zeta) d\eta \right] dm_n(\zeta).$$

Обозначая

$$h_{q', \gamma}(r\zeta) = \left(\int_{I^n} (1-\eta)^{\gamma q' - 1} |D_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r\zeta)|^{q'} d\eta \right)^{1/q'}$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} |F_u(v)| &\leq C \int_{T^n} g_{q, \alpha}(u)(\zeta) h_{q', \gamma}(r\zeta) dm_n(\zeta) \\ &\leq C \|g_{q, \alpha}(u)\|_{L^p} \|h_{q', \gamma}(r\zeta)\|_{L^{p'}(T^n)} \\ &\leq C(p, q, \alpha, \gamma, n) \|g_{q, \alpha}(u)\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}(T^n)}. \end{aligned}$$

В силу двойственности $(L^{p'})^* = L^p$ будем иметь

$$\|u(rw)\|_{L^p(T^n)} = \sup\{|F_u(v)| : \|v\|_{L^{p'}} = 1\} \leq C \|g_{q, \alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Теперь положим $0 < q < 1$ (при $q = 1$ теорема очевидна). По лемме 4

$$\begin{aligned} |u(rw)| &\leq \frac{1}{\prod \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} |D^\alpha u(\eta rw)| d\eta \\ &\leq C(\alpha, \delta, n) (u_\delta^*(w))^{1-q} \int_{I^n} \frac{(1-\eta)^{\alpha-1}}{(1-\eta r)^{\alpha(1-q)}} |D^\alpha u(\eta rw)|^q d\eta \\ &\leq C(\alpha, \delta, n) (u_\delta^*(w))^{1-q} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha q - 1} |D^\alpha u(\eta rw)|^q d\eta, \end{aligned}$$

где $u_{\delta}^*(w)$ – некасательная максимальная функция. Далее, применяя неравенство Гёльдера с индексами $1/q$ и $1/(1-q)$, получаем

$$\|u(rw)\|_{L^p(T^n)}^p \leq C \|u_{\delta}^*\|_{L^p}^{p(1-q)} \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^{pq}.$$

Следовательно, в силу неравенства (13)

$$\|f\|_{L^p} = \|u(rw)\|_{L^p(T^n)} \leq C \|u_{\delta}^*\|_{L^p}^{1-q} \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q \leq C \|f\|_{L^p}^{1-q} \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q,$$

что завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Littlewood J. E., Paley R. E. A. C. Theorems on Fourier series and power series I // J. London Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230–233; II // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1936. V. 42. P. 52–89.
- [2] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. II. М.: Мир, 1965.
- [3] Стейн И. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [4] Flett T. M. Mean values of power series // Pacific J. Math. 1968. V. 25. P. 463–494.
- [5] Littlewood J. E. Some Problems in Real and Complex Analysis. Massachusetts: Raytheon Education Company, 1968.
- [6] Zygmund A. On the boundary values of functions of several complex variables I // Fund. Math. 1949. V. 36. P. 207–235.
- [7] Gundy R., Stein E. M. H^p theory for the poly-disc // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1979. V. 76. № 3. P. 1026–1029.
- [8] Benedek A., Panzone R. The spaces L^p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28. P. 301–324.
- [9] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: avetkaren@ysu.am

Поступило
25.02.2002