Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Бикчантаев, Интегральные операторы И.Н. Векуа на римановой поверхности, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 18–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:59:00

УДК 517.968.25+517.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И. Н. ВЕКУА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. А. Бикчантаев

На произвольной (вообще говоря, некомпактной) римановой поверхности R исследуются интегральные операторы T и P , являющиеся аналогами соответствующих операторов, введенных И. Н. Векуа при построении им теории обобщенных аналитических функций. В качестве приложения получены необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана $\bar{\partial}f = F$ в классе функций f с Λ_0 -поведением в окрестности идеальной границы поверхности R .

Библиография: 7 названий.

Неоднородное уравнение Коши–Римана

$$\bar{\partial}f = F \quad (1)$$

на компактной римановой поверхности в естественных пространствах является нётеровым, в то время как на некомпактной римановой поверхности R оно разрешимо при любой правой части F и его решение определяется с точностью до произвольной аналитической на R функции [1]. В этой статье уравнение (1) рассматривается на произвольной римановой поверхности в таких классах функций, в которых соответствующее однородное уравнение ($F = 0$) имеет лишь конечное число линейно независимых решений. При построении теории обобщенных аналитических функций на плоскости и, в частности, при исследовании уравнения вида (1) И. Н. Векуа [2] ввел в рассмотрение и изучил интегральные операторы T и P . Изучению аналогов этих операторов на произвольной (вообще говоря, некомпактной) римановой поверхности в классах квадратично интегрируемых линейных дифференциалов и посвящена в основном эта статья. В качестве приложения получены необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (1) в классе функций с Λ_0 -поведением и приведена структурная формула для его решений.

1. Предварительные результаты. В статьях Сиба [3], [4] многие классические результаты теории функций на компактных римановых поверхностях были распространены на случай произвольных некомпактных римановых поверхностей при определенных ограничениях на поведение мероморфных функций и дифференциалов в окрестности идеальной границы (при так называемом Λ_0 -поведении). В статье [5] было получено необходимое и достаточное условие разрешимости и построено решение уравнения (1) в классе функций с Λ_0 -поведением в случае, когда носитель дифференциальной формы F

компактен. Здесь мы рассмотрим уравнение (1) в случае, когда правая часть есть произвольная линейная квадратично суммируемая дифференциальная форма типа $(0, 1)$. При этом данное Сива [3], [4] определение Λ_0 -поведения линейных дифференциалов является недостаточно общим. Поэтому мы начнем с обобщения этого определения на более широкий класс дифференциальных форм.

Пусть R есть произвольная (вообще говоря, некомпактная) риманова поверхность рода h ($\leq \infty$), J – множество $\{1, 2, \dots, 2h\}$, $\mathcal{R} = \{R_n\}_{n=1}^\infty$ – каноническое исчерпание поверхности R . Обозначим через h_n род поверхности R_n и положим $J_n = \{1, 2, \dots, 2h_n\}$. Пусть $\{D_j\}_{j \in J}$ есть канонический базис гомологий поверхности R по модулю разбивающих циклов такой, что $\{D_j\}_{j \in J_n}$ есть канонический базис гомологий для R_n по модулю границы и $D_j \subset R \setminus \bar{R}_n$ для $j \in J \setminus J_n$. Для удобства положим $R_0 = \emptyset$ и $J_0 = \emptyset$.

Пусть $\Lambda = \Lambda(R)$ есть действительное гильбертово пространство квадратично интегрируемых комплексных дифференциалов первого порядка на R с внутренним произведением

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \operatorname{Re} \iint_R \lambda_1 \wedge \bar{*}\lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Норма дифференциала $\lambda \in \Lambda$ определяется равенством $\|\lambda\| = \sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle}$. Положим $\Lambda_h = \Lambda_h(R) = \{\lambda \in \Lambda : \lambda \text{ гармонический на } R\}$, $\Lambda_{\text{hse}} = \Lambda_{\text{hse}}(R) = \{\lambda \in \Lambda_h : \lambda \text{ полуточен (т.е. имеет нулевые периоды вдоль всех разбивающих циклов на } R)\}$, $\Lambda_{e0}^1 = \Lambda_{e0}^1(R) = \{\lambda \in \Lambda : \text{существуют } f \in C^2(R), f_n \in C_0^2(R) \text{ такие, что } d f = \lambda \text{ и } \|d f - d f_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$, $\Lambda_c^1 = \Lambda_c^1(R) (\subset \Lambda(R))$ – множество замкнутых дифференциалов класса $C^1(R)$, $\Lambda_{c0}^1 = \Lambda_{c0}^1(R)$ – подмножество Λ_c^1 , состоящее из финитных дифференциалов. Через Λ_{e0} , Λ_c , Λ_{c0} обозначим замыкания пространств Λ_{e0}^1 , Λ_c^1 , Λ_{c0}^1 в Λ . Тогда $\Lambda = \Lambda_{e0} \oplus \Lambda_{e0}^* \oplus \Lambda_h$, где $\Lambda_{e0}^* = \{\lambda : * \lambda \in \Lambda_{e0}\}$. Подпространство Λ , состоящее из действительных дифференциалов, обозначим через Γ ; соответствующие действительные подпространства пространств Λ_{e0} , Λ_c , ... будем обозначать Γ_{e0} , Γ_c , ...

Пусть $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^h$ семейство прямых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, проходящих через начало координат. Приведем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Замкнутое подпространство $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ пространства Λ_{hse} называется *пространством поведения, ассоциированным с $\mathcal{L}$* , если $i\Lambda_0^* = \Lambda_0^\perp$ (т.е. $\Lambda_h = \Lambda_0 \oplus i\Lambda_0^*$) и $\int_{D_j} \lambda_0 \in L_{[(j+1)/2]}$, $j \in J$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$, где $\Lambda_0^\perp$ означает ортогональное дополнение Λ_0 в Λ_h , $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Пространство $\bar{\Lambda}_0 = \{\lambda : \bar{\lambda} \in \Lambda_0\}$ является пространством поведения, ассоциированным с семейством прямых $\bar{\mathcal{L}} = \{\bar{L}_j\}_{j=1}^h$, где $\bar{L}_j$ означает прямую в $\mathbb{C}$, симметричную с L_j относительно действительной оси; оно называется *двойственным с Λ_0* [4].

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (ср. [4]). Пусть $R_n \in \mathcal{R}$, $V = R \setminus \bar{R}_n$ и $\varphi \in \Lambda(V)$ – полуточный дифференциал такой, что $\int_{D_j} \varphi \in L_{[(j+1)/2]}$, $j \in J \setminus J_n$. Пусть Φ есть (вообще говоря, многозначная) функция на $\bar{V}$ такая, что $d\Phi = \varphi$. Тогда следующие три условия эквивалентны:

(I) существуют $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ такие, что $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ на V ;

$$(II) \quad \langle \varphi, i * \omega \rangle_V = -\operatorname{Im} \int_{\partial V} \Phi \bar{\omega} \text{ для любого } \omega \in \Lambda_0;$$

$$(III) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\partial R_m} \Phi \bar{\omega} = 0 \text{ для любого } \omega \in \Lambda_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема была доказана Сибя [4] при условии, что $\varphi \in C^1(\bar{V})$. Для доказательства того, что (I) $\implies$ (II) достаточно заметить, что подмножество дифференциалов класса $C^1(\bar{V})$ плотно в $\Lambda(V)$, а функционалы в обеих частях равенства (II) непрерывны по φ в топологии пространства $\Lambda(V)$ (левая часть равенства непрерывна в силу неравенства Шварца, а правая – в силу полуточности ω и теоремы о следах [6, с. 140]). Эквивалентность (II) и (III) следует из легко проверяемого равенства (ср. [4])

$$\langle \varphi, i * \omega \rangle_{V \cap R_m} = -\operatorname{Im} \int_{\partial V} \Phi \bar{\omega} - \operatorname{Im} \int_{\partial R_m} \Phi \bar{\omega}, \quad m > n.$$

Наконец, докажем импликацию (III) $\implies$ (I). Доопределим φ на всей римановой поверхности R так, чтобы $\varphi \in \Lambda_c(R)$. Поскольку дифференциал φ полуточен на V , то это продолжение можно выбрать точным на $R \setminus \bar{V} = R_n$. Пусть ω – произвольный дифференциал из $\Lambda_0(R)$. Применяя формулу Стокса к области $R'_m = R_m \setminus \bigcup_{\nu=1}^{2h_m} D_\nu$ и учитывая нормировку периодов дифференциалов $d\Phi$ и ω , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{\partial R_m} \Phi \bar{\omega} &= -\langle d\Phi, i * \omega \rangle_{R_m} - \operatorname{Im} \sum_{\nu=1}^{h_m} \left(\int_{D_{2\nu-1}} d\Phi \int_{D_{2\nu}} \bar{\omega} - \int_{D_{2\nu}} d\Phi \int_{D_{2\nu-1}} \bar{\omega} \right) \\ &= -\langle d\Phi, i * \omega \rangle_{R_m}. \end{aligned}$$

Устремляя в этом равенстве m к бесконечности, из (III) получим, что φ ортогонален $i\Lambda_0^*(R) = \Lambda_0^\perp(R)$. Теперь из разложения $\Lambda_c = \Lambda_h \oplus \Lambda_{e0}$ следует существование дифференциалов $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ таких, что $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ на R . Это завершает доказательство теоремы.

Понятие Λ_0 -поведения было определено Сибя [4] для дифференциалов класса $C^1(V)$. Обобщая это понятие, мы дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что дифференциал φ , определенный в окрестности идеальной границы поверхности R , имеет Λ_0 -поведение, если существуют $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ и $R_n \in \mathcal{R}$ такие, что $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ на $R \setminus R_n$. Будем говорить, что функция f (вообще говоря, многозначная) имеет Λ_0 -поведение, если ее дифференциал df имеет Λ_0 -поведение.

Теорема 1 характеризует свойства дифференциалов с Λ_0 -поведением. Из нее имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (ср. [4]). Пусть φ есть полуточный дифференциал на $\bar{V} = R \setminus R_n$, $R_n \in \mathcal{R}$, такой, что $\int_{D_j} \varphi \in L_{[(j+1)/2]}$, $j \in J \setminus J_n$. Предположим, что φ имеет Λ_0 -поведение. Тогда φ допускает представление $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ на всей V .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $d\Phi$ и ψ – дифференциалы с Λ_0 -поведением, определенные в некоторой окрестности идеальной границы поверхности R . Тогда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_{\partial R_m} \Phi \bar{\psi} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию в некоторой окрестности идеальной границы справедливы представления $d\Phi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$, $\psi = \psi_0 + \psi_{e0}$, где $\lambda_0, \psi_0 \in \Lambda_0(R)$, $\lambda_{e0}, \psi_{e0} \in \Lambda_{e0}(R)$. С помощью этих равенств доопределим дифференциалы $d\Phi$ и ψ на всей римановой поверхности R . Применяя формулу Стокса к области R'_m и учитывая нормировку периодов дифференциалов $d\Phi$ и ψ , аналогично тому, как при доказательстве импликации (III) $\Rightarrow$ (I) в теореме 1, получаем равенство

$$\operatorname{Im} \int_{\partial R_m} \Phi \bar{\psi} = -\langle d\Phi, i*\psi \rangle_{R_m}.$$

Так как $d\Phi \in \Lambda_0 \oplus \Lambda_{e0}$ и $i*\psi \in i\Lambda_0^* \oplus i\Lambda_{e0}^* = \Lambda_0^\perp \oplus \Lambda_{e0}^*$, в силу ортогональных разложений $\Lambda = \Lambda_{e0} \oplus \Lambda_{e0}^* \oplus \Lambda_h$, $\Lambda_h = \Lambda_0 \oplus i\Lambda_0^*$ выражение $\langle d\Phi, i*\psi \rangle_{R_m}$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Предложение 2 доказано.

2. Интегральные операторы T и П. В статье [3] доказано существование и единственность следующих нормированных абелевых дифференциалов на R , имеющих Λ_0 -поведение.

1) Абелевы дифференциалы первого рода φ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, 2h$, нормированные условиями

$$\int_{D_\nu} \varphi_\mu - \gamma_\mu D_\mu \circ D_\nu \in L_{[(\nu+1)/2]}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 2h, \quad (2)$$

где γ_μ – заданные комплексные числа, не принадлежащие $L_{[(\mu+1)/2]}$, $D_\mu \circ D_\nu$ означает индекс пересечения циклов D_μ и D_ν . Дифференциалы φ_ν образуют алгебраический базис пространства абелевых дифференциалов первого рода с Λ_0 -поведением.

2) Абелевы дифференциалы третьего рода ω_{pq}, σ_{pq} , имеющие единственные простые полюсы в точках p и q с вычетами 1, i в p и $-1, -i$ в q . Периоды дифференциалов ω_{pq} и σ_{pq} удовлетворяют соотношениям

$$\int_{D_\nu} \omega_{pq} \in L_{[(\nu+1)/2]}, \quad \int_{D_\nu} \sigma_{pq} \in L_{[(\nu+1)/2]}, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h.$$

Через $\varphi'_\nu, \omega'_{pq}, \sigma'_{pq}$ условимся обозначать дифференциалы, которые получаются, если в определении $\varphi_\nu, \omega_{pq}, \sigma_{pq}$ Λ_0 -поведение заменить на двойственное $\bar{\Lambda}_0$ -поведение. При этом вместо соотношений (2) будем иметь

$$\int_{D_\nu} \varphi'_\mu - \gamma'_\mu D_\mu \circ D_\nu \in \bar{L}_{[(\nu+1)/2]}, \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, 2h,$$

где $\gamma'_\mu \notin \bar{L}_{[(\mu+1)/2]}$. Для определенности будем считать числа γ_μ и γ'_μ выбранными таким образом, что $|\gamma_\mu| = 1$, $i\gamma_{2\mu-1} = i\gamma_{2\mu} \in L_\mu$, $\gamma'_\mu = \bar{\gamma}_\mu$.

Положим

$$H_1(p, q) = \frac{1}{2} d_p \int_{q_0}^q (\omega_{pp_0} - i\sigma_{pp_0}), \quad H_2(p, q) = -\frac{1}{2} d_p \int_{q_0}^q (\omega_{pp_0} + i\sigma_{pp_0}). \quad (3)$$

Выражения (3) суть многозначные (по q) аналоги ядра Коши, соответствующие дивизору $1/q_0$, характер многозначности которых описывается равенствами [7]

$$\int_{D_\nu} d_q H_1(p, q) = -\pi i \gamma_\nu \varphi'_\nu(p), \quad \int_{D_\nu} d_q H_2(p, q) = \pi i \gamma_\nu \overline{\varphi'_\nu(p)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h. \quad (4)$$

Через $h_1(p, q)$, $h_2(p, q)$ обозначим однозначные на $R' := R \setminus \bigcup_{\nu=1}^{2h} D_\nu$ ветви ядер (3), исчезающие при $q = q_0$.

Введем следующие банаховы пространства. $L_\infty(R)$ – пространство функций на R с конечной нормой $\|f\| = \text{vrai sup}_{q \in R} |f(q)|$; $L_1^{(2)}(R)$ – пространство дифференциалов второго порядка, интегрируемых по R , с нормой $\|\Psi\| = \iint_R |\Psi|$; $L_2^{(1)}(R)$ – гильбертово пространство дифференциалов первого порядка, интегрируемых с квадратом (в предыдущем пункте оно обозначалось $\Lambda(R)$); $L_2^{1,0}(R)$ и $L_2^{0,1}(R)$ – подпространства $L_2^{(1)}(R)$, состоящие из дифференциалов типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Очевидно, $L_2^{(1)}(R) = L_2^{1,0}(R) \oplus L_2^{0,1}(R)$. Положим

$$(\varphi, \psi)_1 := \text{Re} \iint_R \varphi \wedge \psi, \quad \varphi, \psi \in L_2^{(1)}(R),$$

$$(f, \Psi)_2 := \text{Re} \iint_R f \Psi, \quad f \in L_\infty(R), \quad \Psi \in L_1^{(2)}(R).$$

Билинейная форма $(\cdot, \cdot)_1$ связана со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в гильбертовом пространстве $L_2^{(1)}(R)$ соотношением $\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, * \bar{\psi})_1$. Пространства $L_1^{(2)}(R)$ и $L_\infty(R)$ являются сопряженными относительно билинейной формы $(\cdot, \cdot)_2$.

Пусть $U = \{q \in R: |z(q) - z(q_0)| < 1\}$ – параметрический круг с центром в точке $q_0 \in R$, $z(q)$ – локальная униформизирующая. Положим

$$m_0(q) = \begin{cases} |z(q) - z(q_0)| & \text{при } q \in U, \\ 1 & \text{при } q \in R \setminus U. \end{cases}$$

Наряду с введенными функциональными пространствами будем рассматривать также пространства с весом

$$L_1^{(2)}(R, m_0) := \{\Psi: m_0 \Psi \in L_1^{(2)}(R)\} \quad \text{и} \quad L_2^{(1)}(R, 1/m_0) := \{\varphi: \varphi/m_0 \in L_2^{(1)}(R)\}$$

с нормами

$$\|\Psi\|_{L_1^{(2)}(R, m_0)} := \|m_0 \Psi\|_{L_1^{(2)}(R)}, \quad \|\varphi\|_{L_2^{(1)}(R, 1/m_0)} := \|\varphi/m_0\|_{L_2^{(1)}(R)},$$

а также соответствующие подпространства $L_2^{1,0}(R, 1/m_0)$ и $L_2^{0,1}(R, 1/m_0)$.

Введем в пространстве $L_2^{(1)}(R, 1/m_0)$ интегральные операторы

$$\begin{aligned} T F(q) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_R h_1(p, q) \wedge F(p) + h_2(p, q) \wedge \overline{F(p)}, \\ \tilde{T} F(q) &= \frac{1}{2\pi i} \iint_R H_1(p, q) \wedge F(p) + H_2(p, q) \wedge \overline{F(p)}. \end{aligned}$$

Очевидно, $T F$ является однозначной на R' ветвью многозначной функции $\tilde{T} F$, исчезающей в точке q_0 . Функция $\tilde{T} F$ удовлетворяет уравнению (1) [5]. Характер многозначности функции $\tilde{T} F$ определяется формулами

$$\int_{D_\nu} d\tilde{T} F = -i\gamma_\nu(F, i\varphi'_\nu)_1, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h, \quad (5)$$

вытекающими из формул (4).

Легко видеть, что $\ker T = \ker \tilde{T} = L_2^{1,0}(R, 1/m_0)$. Действительно, включение $L_2^{1,0}(R, 1/m_0) \subset \ker T$ очевидно. Обратное включение следует из того, что сужение оператора $\bar{\partial}\tilde{T}$ на подпространство $L_2^{0,1}(R, 1/m_0)$ является единичным оператором [5].

В случае, когда носитель дифференциала F компактен, конечность интеграла Дирихле функции $\tilde{T} F$ по некоторой окрестности V идеальной границы легко следовала из возможности дифференцирования и интегрирования в области V выражения для $\tilde{T} F$ под знаком интеграла [5]. Для доказательства этого результата в случае произвольного F из $L_2^{(1)}(R)$ требуются нетривиальные рассуждения, некоторые идеи которых восходят к Векуа [2]. С этой целью мы введем еще и другие интегральные операторы и исследуем их свойства.

В пространстве $L_1^{(2)}(R, m_0)$ рассмотрим интегральный оператор

$$T^* \Psi = \frac{i}{2\pi} \iint_R h_1(\cdot, q) \Psi(q) - \overline{h_2(\cdot, q) \Psi(q)}.$$

В случае, когда этот интеграл сходится и $T^* \Psi \in L_2^{1,0}(R, m_0)$, справедливы соотношения $\bar{\partial} T^* \Psi = -\Psi$ в $R \setminus \{q_0\}$ и $(T F, \Psi)_2 = (F, T^* \Psi)_1$ [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\Psi \in L_1^{(2)}(R, m_0)$ и $m_0 \Psi \in C_0^\infty(R')$. Тогда

$$\int_{D_\nu} T^* \Psi = \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \iint_R \Psi(q) \int_{q_0}^q \varphi_\nu,$$

где путь интегрирования в последнем интеграле не пересекает канонических сечений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражая ядра $h_i(p, q)$ через нормированные абелевы дифференциалы третьего рода с $\bar{\Lambda}_0$ -поведением [7], перепишем выражение $T^* \Psi$ в виде

$$T^* \Psi = \frac{i}{2\pi} \iint_R \omega'_{qq_0} \operatorname{Re} \Psi(q) + \sigma'_{qq_0} \operatorname{Im} \Psi(q).$$

Учитывая формулы (см. [7])

$$\int_{D_\nu} \omega'_{qq_0} = -2\pi i \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \int_{q_0}^q \varphi_\nu, \quad \int_{D_\nu} \sigma'_{qq_0} = 2\pi i \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Im} \int_{q_0}^q \varphi_\nu$$

и возможность перестановки интегралов, получим доказываемое соотношение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор $-T^* \bar{\partial}$ совпадает с единичным оператором на подмножестве пространства $L_2^{1,0}(R)$, состоящем из гладких дифференциалов с компактным в R' носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in L_2^{1,0}(R)$ и принадлежит классу $C_0^\infty(R')$. Тогда с учетом предложения 3 получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_\nu} T^* \bar{\partial} \psi &= \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \iint_R (\bar{\partial} \psi(q)) \int_{q_0}^q \varphi_\nu = \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \iint_{R'} \bar{\partial} \left(\psi(q) \int_{q_0}^q \varphi_\nu \right) \\ &= \bar{\gamma}_\nu \operatorname{Re} \iint_{R'} d \left(\psi(q) \int_{q_0}^q \varphi_\nu \right) = \bar{\gamma}_\nu \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_{\partial R'_n} \psi(q) \int_{q_0}^q \varphi_\nu = 0. \end{aligned}$$

Положим $\alpha := \psi + T^* \bar{\partial} \psi$. Из равенства $\bar{\partial} T^* \Psi = -\Psi$ следует, что дифференциал α голоморфный. Покажем, что он полуточный. Для этого достаточно установить, что при достаточно больших m $\int_\gamma \alpha = 0$, где γ – любая компонента края ∂R_m . Но при $\operatorname{supp} \psi \subset R_m$ это следует из полуточности ядер $H_k(p, q)$ по переменной p и возможности переставить порядок интегрирования по γ и по R . Из предложения 3 следует, что периоды дифференциала α нормированы условием $\int_{D_j} i \alpha \in \bar{L}_{[(j+1)/2]}$, $j \in J$. При финитных Ψ дифференциал $T^* \Psi$, а стало быть и α , имеет $i \bar{L}_0$ -поведение [5]. Следовательно (см. [3]), $\alpha = 0$. Предложение доказано.

В пространстве $L_2^{(1)}(R, 1/m_0)$ введем интегральный оператор $\Pi := \partial \tilde{T}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Оператор $\Pi: L_2^{0,1}(R) \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ сохраняет скалярное произведение, т.е. имеет место тождество $\langle \Pi F, \Pi E \rangle = \langle F, E \rangle$, $F, E \in L_2^{0,1}(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – дифференциал типа $(0,1)$, причем дифференциал F/m_0 является гладким и его носитель является компактным в R' , и $G \in L_2^{1,0}(R)$, причем $\bar{\partial} G$ принадлежит $L_1^{(2)}(R, m_0)$ и имеет компактный носитель в R' . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Pi F, G \rangle &= \langle \partial \tilde{T} F, G \rangle = \operatorname{Re} \iint_R \partial \tilde{T} F \wedge * \bar{G} \\ &= \operatorname{Re} \iint_R i \partial \tilde{T} F \wedge \bar{G} = \operatorname{Re} \iint_{R'} i \partial T F \wedge \bar{G} \\ &= -\operatorname{Re} \left(i \iint_R T F \partial \bar{G} \right) + \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} (T F) \bar{G} \right) \\ &= -\operatorname{Re} \iint_R F \wedge T^* (i \partial \bar{G}) + \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \bar{G} T F \right) \\ &= \langle F, i T^* (i \partial \bar{G}) \rangle + \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \bar{G} T F \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\partial R'$ – относительная граница области R' на R в топологии, определяемой метрикой Мазуркевича, β – идеальная граница поверхности R , причем

$$\int_\beta \varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R_n} \varphi, \quad R_n \in \mathcal{R}.$$

Под значением подынтегрального выражения на $\partial R'$ понимается предельное значение изнутри области R' .

Положим $\Pi^* G := i T^*(i \partial \overline{G})$. Тогда из (6) получаем

$$\langle \Pi F, G \rangle = \langle F, \Pi^* G \rangle + \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \overline{G} T F \right). \quad (7)$$

Подсчитаем второе слагаемое в правой части равенства (7) при $G = \Pi E$, где E/m_0 — гладкий дифференциал типа $(0, 1)$, носитель которого является компактным подмножеством в R' . Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \overline{G} T F \right) &= \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \overline{\Pi E} \cdot T F \right) = \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} T F \cdot \overline{\partial T E} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} (\overline{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) - F \overline{T E}) \right) = \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \overline{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) получаем

$$\langle \Pi F, \Pi E \rangle = \langle F, \Pi^* \Pi E \rangle + \operatorname{Re} \left(i \int_{\beta \cup \partial R'} \overline{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) \right). \quad (9)$$

Покажем, что последнее слагаемое в (9) равно нулю. Действительно, учитывая формулы (5), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\partial R'} \overline{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) &= \int_{\partial R'} T F \cdot \overline{\partial T E} = \int_{\partial R'} T F \cdot d \overline{T E} \\ &= \sum_{\nu=1}^h \left(\int_{D_{2\nu-1}} \left(- \int_{D_{2\nu}} d \tilde{T} F \right) d \overline{T E} + \int_{D_{2\nu}} \left(\int_{D_{2\nu-1}} d \tilde{T} F \right) d \overline{T E} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^h \left(\int_{D_{2\nu-1}} d \tilde{T} F \int_{D_{2\nu}} d \overline{T E} - \int_{D_{2\nu}} d \tilde{T} F \int_{D_{2\nu-1}} d \overline{T E} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^h \left(\left(-i \gamma_{2\nu-1} \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu-1} \wedge F \right) \left(i \overline{\gamma}_{2\nu} \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu} \wedge E \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-i \gamma_{2\nu} \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu} \wedge F \right) \left(i \overline{\gamma}_{2\nu-1} \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu-1} \wedge E \right) \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^h \left(\operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu-1} \wedge F \cdot \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu} \wedge E \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu} \wedge F \cdot \operatorname{Im} \iint_R \varphi'_{2\nu-1} \wedge E \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Правая часть формулы (10) вещественна, откуда следует, что

$$\operatorname{Re} \left(i \int_{\partial R'} \overline{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) \right) = 0.$$

Так как носители дифференциалов F и E компактны, то дифференциалы $d\tilde{T}F$ и $d\tilde{T}E$ имеют Λ_0 -поведение [5]. Поэтому из предложения 2 следует, что интеграл

$$\int_{\beta} \bar{\partial}(T F \cdot \overline{T E}) = \int_{\beta} T F \cdot d\overline{T E} = \int_{\beta} \tilde{T}F \cdot d\overline{\tilde{T}E}$$

вещественный. Таким образом, из равенства (9) получаем

$$\langle \Pi F, \Pi E \rangle = \langle F, \Pi^* \Pi E \rangle. \quad (11)$$

Из определения операторов Π и Π^* , равенства $\bar{\partial}\tilde{T} = I$ и предложения 4 имеем

$$\Pi^* \Pi E = i \overline{T^*(i \bar{\partial} \tilde{T} E)} = i \overline{T^*(i \bar{\partial} \overline{E})} = i \overline{(i \overline{E})} = E.$$

Поскольку это равенство имеет место на плотном в $L_2^{0,1}(R)$ подмножестве, то $\Pi^* \Pi = I$ — единичный оператор в пространстве $L_2^{0,1}(R)$. Отсюда и из равенства (11) следует, что

$$\langle \Pi F, \Pi E \rangle = \langle F, E \rangle. \quad (12)$$

Так как равенство (12) установлено для плотного в $L_2^{0,1}(R)$ подмножества и билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ непрерывна в $L_2^{(1)}(R)$, то предложение 5 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Оператор $\Pi : L_2^{0,1}(R) \rightarrow L_2^{1,0}(R)$ изометричен и, стало быть, его норма равна единице. Оператор $\Pi^* : L_2^{1,0}(R) \rightarrow L_2^{0,1}(R)$ является для него левым обратным.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Функция $\tilde{T}F$, $F \in L_2^{(1)}(R)$, имеет Λ_0 -поведение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 1 вытекает, что $\tilde{T}F$ имеет конечный интеграл Дирихле. Так как ядра $H_i(p, q)$ по переменной q не имеют периодов вдоль разбивающих циклов, то дифференциал $d\tilde{T}F$ полуточен на R . Из формул (5) следует, что периоды $d\tilde{T}F$ вдоль канонических циклов нормированы. Для завершения доказательства того, что $\tilde{T}F$ имеет Λ_0 -поведение достаточно согласно теореме 1 установить соотношение

$$\langle d\tilde{T}F, i * \omega \rangle = 0 \quad \text{для всех } \omega \in \Lambda_0. \quad (13)$$

Для финитных в R дифференциалов F функция $\tilde{T}F$ имеет Λ_0 -поведение [5], откуда и следует соотношение (13). Так как $d\tilde{T}F = (I + \Pi)F$, оператор $I + \Pi$ и билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ непрерывны в пространстве $L_2^{(1)}(R)$, то (13) верно для всех $F \in L_2^{(1)}(R)$. Предложение 6 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Оператор $d\tilde{T}$ ограничен в пространстве $L_2^{(1)}(R)$ и его ядром служит подпространство $L_2^{1,0}(R)$. Подпространство $L_2^{0,1}(R)$ он взаимно однозначно отображает на подпространство $\Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $L_2^{1,0}(R) \subset \ker d\tilde{T}$ очевидно. Поэтому ограниченность оператора $d\tilde{T}$ вытекает из представления $L_2^{(1)}(R) = L_2^{1,0}(R) \oplus L_2^{0,1}(R)$, равенства $d\tilde{T} = I + \Pi$ на $L_2^{0,1}(R)$ и следствия 1. Из свойств оператора $\tilde{T}$, теоремы 1 и предложения 1 вытекает, что образ $\operatorname{im} d\tilde{T}$ оператора $d\tilde{T}$ принадлежит подпространству $\Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R)$.

Рассмотрим уравнение

$$d\tilde{T}\psi = \varphi, \quad \psi \in L_2^{0,1}(R), \quad \varphi \in \Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R).$$

Оно эквивалентно уравнению $(\tilde{T}\psi)(q) = \int_{q_0}^q \varphi$. (Равенство этих двух многозначных функций понимается в том смысле, что на R' совпадают их однозначные ветви, исчезающие при $q = q_0$, а также ветви, которые получаются из отмеченных непрерывным продолжением вдоль одного и того же пути.) Применяя оператор $\bar{\partial}$ к обеим частям последнего равенства, получаем $\psi(q) = \bar{\partial} \int_{q_0}^q \varphi$. Отсюда, в частности, вытекает, что оператор $d\tilde{T}$ однозначно разрешим в подпространстве $L_2^{0,1}(R)$ и, следовательно, $\ker d\tilde{T} = L_2^{1,0}(R)$.

Для доказательства везде разрешимости оператора $d\tilde{T}: L_2^{0,1}(R) \rightarrow \Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R)$ достаточно показать, что любой дифференциал вида $\psi = \bar{\partial} \int_{q_0}^q \varphi$, где $\varphi \in \Lambda_0 \oplus \Lambda_{e0}$, удовлетворяет уравнению $(\tilde{T}\psi)(q) = \int_{q_0}^q \varphi$, т.е. $\tilde{T}\bar{\partial} \int_{q_0}^q \varphi = \int_{q_0}^q \varphi$. Легко видеть, что функция $\tilde{T}\bar{\partial} \int_{q_0}^q \varphi - \int_{q_0}^q \varphi$ (под суммой этих двух многозначных функций имеется в виду функция, одна из однозначных ветвей которой на R' равна сумме однозначных ветвей этих функций, исчезающих в точке q_0 ; остальные ветви получаются продолжением слагаемых вдоль одного и того же пути) аналитична на R , имеет Λ_0 -поведение, ее периоды вдоль разбивающих циклов равны нулю, а периоды вдоль канонических циклов нормированы и одна из ее однозначных ветвей исчезает в точке q_0 . По теореме единственности [3] она равна нулю. Предложение 7 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеем*

$$\tilde{T}\bar{\partial}f - f = \text{const}$$

для многозначных на R функций f таких, что $df \in \Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\tilde{T}\bar{\partial}f = g$. Тогда $\bar{\partial}(f - g) = 0$. Таким образом, $f - g$ есть аналитическая на R функция с Λ_0 -поведением. Следовательно, $f - g$ постоянна [3], что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Оператор $\Pi^*: L_2^{(1,0)}(R) \rightarrow L_2^{(0,1)}(R)$ является обратным для оператора $\Pi: L_2^{0,1}(R) \rightarrow L_2^{1,0}(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие обозначения:

$$H'_1(q, p) := \frac{1}{2} d_q \int_{p_0}^p (\omega'_{qq_0} - i\sigma'_{qq_0}), \quad H'_2(q, p) := -\frac{1}{2} d_q \int_{p_0}^p (\omega'_{qq_0} + i\sigma'_{qq_0}).$$

Ядра $H'_k(q, p)$, $k = 1, 2$, отличаются от ядер $H_k(p, q)$ заменой p и p_0 соответственно на q и q_0 и наоборот, а также заменой Λ_0 -поведения на двойственное $\bar{\Lambda}_0$ -поведение. Положим

$$\tilde{T}'F(p) := \frac{1}{2\pi i} \iint_R H'_1(q, p) \wedge F(q) + H'_2(q, p) \wedge \overline{F(q)}$$

и через $T' F$ обозначим однозначную на R' ветвь этой функции, исчезающую в точке p_0 . Положим $\Pi' = \partial \tilde{T}'$ и $\bar{\Pi}' G := \overline{\Pi' G}$.

Установим равенство

$$\Pi^* = \bar{\Pi}'. \quad (14)$$

Используя формулы перестановки аргумента с параметром в нормированных абелевых дифференциалах третьего рода [7], представим ядра $H_k(p, q)$ в виде

$$H_1(p, q) = \frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) - i\sigma'_{qq_0}(p)), \quad H_2(p, q) = -\frac{1}{2}(\overline{\omega'_{qq_0}(p) + i\sigma'_{qq_0}(p)}).$$

Преобразуем выражение $T^*(i\partial\bar{G})$, считая G гладким дифференциалом типа $(1, 0)$ с носителем в R' . Обозначим через z и ζ локальные параметры точек q и p соответственно и через d_ε — параметрический круг на R с центром в точке p , определяемый неравенством $|z - \zeta| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} T^*(i\partial\bar{G})(p) &= \frac{i}{2\pi} \iint_R H_1(p, q) i\partial\bar{G}(q) - \overline{H_2(p, q) i\partial\bar{G}(q)} \\ &= \frac{i}{2\pi} \left(\iint_{R \setminus d_\varepsilon} + \iint_{d_\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) - i\sigma'_{qq_0}(p)) i\partial\bar{G}(q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) + i\sigma'_{qq_0}(p)) i\partial\bar{G}(q) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Интеграл по d_ε в правой части этого равенства стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Интеграл по $R \setminus d_\varepsilon$ преобразуем интегрированием по частям

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2\pi} \iint_{R \setminus d_\varepsilon} \left(\frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) - i\sigma'_{qq_0}(p)) i\partial\bar{G}(q) + \frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) + i\sigma'_{qq_0}(p)) i\partial\bar{G}(q) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R \setminus d_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} d_q(\omega'_{qq_0}(p) - i\sigma'_{qq_0}(p)) \wedge \bar{G}(q) - \frac{1}{2} d_q(\omega'_{qq_0}(p) + i\sigma'_{qq_0}(p)) \wedge G(q) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial d_\varepsilon} \left(\frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) - i\sigma'_{qq_0}(p)) \bar{G}(q) - \frac{1}{2}(\omega'_{qq_0}(p) + i\sigma'_{qq_0}(p)) G(q) \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \partial \iint_{R \setminus d_\varepsilon} (H'_1(q, p) \wedge \bar{G}(q) + H'_2(q, p) \wedge G(q)). \quad (17)$$

Вычислим предел интеграла по ∂d_ε в равенстве (16) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как ω'_{qq_0} и σ'_{qq_0} имеют в точке q полюс первого порядка с вычетом 1 и i соответственно, то дифференциал $\omega'_{qq_0} + i\sigma'_{qq_0}$ в точке q регулярен и поэтому предел интеграла по ∂d_ε от $(\omega'_{qq_0} + i\sigma'_{qq_0})G(q)$ равен нулю. Полагая $G(q) = g(z) dz$, интеграл по ∂d_ε от первого подынтегрального слагаемого запишем в виде

$$\begin{aligned} &\int_{\partial d_\varepsilon} \frac{1}{2}(\omega'_{qq_0} - i\sigma'_{qq_0}) \bar{G}(q) = d\zeta \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \left(\frac{1}{\zeta - z} + a(\zeta, z) \right) \overline{g(z)} dz \\ &= d\zeta \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} a(\zeta, z) \overline{g(z)} dz + d\zeta \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{(\overline{g(z)} - \overline{g(\zeta)}) d\bar{z}}{\zeta - z} + \overline{g(\zeta)} d\zeta \int_{|z-\zeta|=\varepsilon} \frac{d\bar{z}}{\zeta - z}, \end{aligned}$$

где функция $a(\zeta, z)$ голоморфная по ζ и z . Последний интеграл в этом равенстве равен нулю, а два первых интеграла справа стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теперь очевидно, что предел интеграла по ∂d_ε в равенстве (16) при $\varepsilon \rightarrow 0$ равен нулю. Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в равенстве (15) и учитывая (16), (17), получим формулу

$$T^*(i \partial \bar{G}) = i \partial \tilde{T}' \bar{G},$$

из которой вытекает формула (14).

Из предложения 7, примененного к оператору $d \tilde{T}'$, вытекает, что $\text{im } d \tilde{T}' = \overline{\Lambda_0(R)} \oplus \Lambda_{e0}(R)$ и, значит, $\text{im } d \tilde{T}' = \Lambda_0(R) \oplus \Lambda_{e0}(R)$. Используя формулу (14), предложения 6 и 8 и равенство $\partial \tilde{T}' = I$, получаем $\Pi \Pi^* G = \Pi \tilde{T}' G = \partial \tilde{T} \partial \tilde{T}' \bar{G} = \partial \tilde{T}' \bar{G} = G$. Так как соотношение $\Pi \Pi^* G = G$ установлено для плотного в $L_2^{(1,0)}(R)$ подмножества дифференциалов G , то предложение 9 доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\Pi^* : L_2^{(1,0)}(R) \rightarrow L_2^{(0,1)}(R)$ изометрический и его норма равна единице.

СЛЕДСТВИЕ 3. Оператор $\Pi^* : L_2^{(1,0)}(R) \rightarrow L_2^{(0,1)}(R)$ является сопряженным оператору $\Pi : L_2^{(0,1)}(R) \rightarrow L_2^{(1,0)}(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (7) для гладких и финитных в R' дифференциалов F и G получаем $\langle \Pi F, G \rangle = \langle F, \Pi^* G \rangle$. Так как множество таких дифференциалов плотно в $L_2^{(0,1)}(R)$ и $L_2^{(1,0)}(R)$ соответственно, а операторы Π и Π^* непрерывны, то это равенство справедливо при всех $F \in L_2^{(0,1)}(R)$ и $G \in L_2^{(1,0)}(R)$, что и требовалось доказать.

Отметим теперь случай, когда все прямые L_j , образующие $\mathcal{L}$, суть мнимые оси $i\mathbb{R}$ и $\bar{\Lambda}_0 = \Lambda_0$. Примером такого пространства поведения служит пространство $\Lambda_K := \Gamma_{hm} + i\Gamma_{hse}$, где Γ_{hm} есть ортогональное дополнение для Γ_{hse}^* в Γ_h . Мероморфные функции и дифференциалы с Λ_K -поведением были введены (в иных терминах) и изучены независимо друг от друга Кусуноки, Альфорсом и Ройденом. При таком выборе пространства поведения $\Pi' = \Pi$, $\Pi^* = \bar{\Pi}$.

В случае, когда риманова поверхность R является комплексной плоскостью, в силу наличия глобальной системы координат операторы T и Π обычно рассматривают в пространстве функций, а не дифференциальных форм. Если при этом в качестве точки q_0 выбрать бесконечно удаленную точку, то построенные здесь операторы T и Π совпадут с соответствующими операторами Векуа [2].

3. Решение уравнения (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $F \in L_2^{(0,1)}(R)$. Для существования регулярного (регулярность решения f означает, что $d f \in L_2^{(1)}(R)$) на R решения уравнения (1) в классе функций с Λ_0 -поведением необходимо и достаточно выполнения условий

$$\text{Im} \iint_R F \wedge \varphi'_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h, \quad (18)$$

где φ'_ν , $\nu = 1, 2, \dots, 2h$, – нормированный базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на R с $\bar{\Lambda}_0$ -поведением. При их выполнении общее решение имеет вид

$$f = \tilde{T}F + c = T F + c, \quad (19)$$

где c — произвольная комплексная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий (18) следует из равенств

$$\operatorname{Im} \iint_R F \wedge \varphi'_\nu = -(F, i\varphi'_\nu)_1 = -(\bar{\partial}f, i\varphi'_\nu)_1 = (f, i\bar{\partial}\varphi'_\nu)_2 = 0, \quad \nu = 1, 2, \dots, 2h.$$

Достаточность. Из следствия 1 и предложения 6 вытекает, что $df \in L_2^{(1)}(R)$ и f имеет Λ_0 -поведение независимо от условий (18). Учитывая соотношения (5), мы видим, что условия (18) обеспечивают однозначность функции $\tilde{T}F$. Из равенства $\bar{\partial}\tilde{T}F = F$ следует, что f удовлетворяет уравнению (1).

Предложение доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
- [2] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
- [3] Shiba M. On the Riemann–Roch theorem on open Riemann surfaces // J. Math. Kyoto Univ. 1971. V. 11. №3. P. 495–525.
- [4] Shiba M. Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface // Hiroshima Math. J. 1978. V. 8. № 1. P. 151–164.
- [5] Бикчантаев И. А. Интегральные представления решений эллиптических систем первого порядка на римановых поверхностях // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №9. С. 1557–1565.
- [6] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
- [7] Бикчантаев И. А. Аналогии ядра Коши на римановой поверхности и некоторые их приложения // Матем. сб. 1980. Т. 112. №2. С. 256–282.

Казанский государственный университет
E-mail: Ildar.Bikchantaev@ksu.ru

Поступило
04.02.2000