Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Дегтев, О p -сводимости вычислимых нумераций, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 31–35

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:09:44

УДК 517.11

О p -СВОДИМОСТИ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

А. Н. Дёгтев

Доказывается, что если ν_1 и ν_2 — две вычислимые нумерации некоторого семейства рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ), причем $\nu_2 <_p \nu_1$ и ν_1 — не p -главная нумерация, то найдется вычислимая нумерация ν_0 такая, что $\nu_2 <_p \nu_0$ и ν_0, ν_1 p -несравнимы. Из нее следует описание инъективных объектов и отсутствие проективных в категории K_p нумерованных множеств, согласованное с p -сводимостью вычислимых нумераций.

Библиография: 4 названия.

В работе [1] автор определил p -сводимость двух нумераций ν_0 и ν_1 множества S . Именно, $\nu_0 \leqslant_p \nu_1$, если существует p -оператор Φ такой, что

$$(\forall s \in S)[\nu_0^{-1}(s) = \Phi(\nu_1^{-1}(s))], \quad \nu^{-1}(s) = \{x : \nu(x) = s\}.$$

Напомним, что p -оператором Φ называется отображение множества всех подмножеств $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ в себя, для которого найдется общерекурсивная функция (ОРФ) f такая, что

$$\Phi(X) = \{x : (\exists y)(y \in D_{f(x)} \ \& \ D_y \subseteq X)\},$$

где D_n — конечное множество с каноническим номером n . В этом случае говорим, что $\nu_0 \leqslant_p \nu_1$ посредством ОРФ f . В монографии [2] подробно рассматривалась обычная (m -) сводимость нумерации и категория нумерованных множеств, согласованная с ней. В статье [3] были получены первые результаты о p -сводимости вычислимых нумераций всех рекурсивно-перечислимых множеств. В данной заметке продолжается это исследование.

Пусть ν_0 и ν_1 — две вычислимые нумерации семейства РПМ S . Обозначим через $\nu^t(n)$ конечное множество элементов $\nu(n)$, вычисленное к шагу t . Говорим, что ν_0 p -сводима к ν_1 на шаге t в точке $x \in \mathbb{N}$ посредством частично-рекурсивной функции (ЧРФ) φ с высотой m , если выполнены следующие условия:

- а) $\varphi(x) = y$ вычислено к шагу t ;
- б) существует $z \in D_y$ такое, что для всякого $u \in D_z$

$$\{v \leqslant m : v \in \nu_1^t(u)\} = \{v \leqslant m : v \in \nu_0^t(x)\};$$

- в) не существует $z \in D_y$ такого, что для всех $u_1, u_2 \in D_z$

$$\{v \leqslant m : v \in \nu_1^t(u_1)\} = \{v \leqslant m : v \in \nu_1^t(u_2)\} \neq \{v \leqslant m : v \in \nu_0^t(x)\}.$$

Определим теперь *счетчик* $C_{0,1}(n, t)$ для сводимостей нумераций ν_0 и ν_1 , полагая

$$C_{0,1}(n, 0) = 0, \quad C_{0,1}(n, t + 1) = \max\{f(n, t + 1), C_{0,1}(n, t)\},$$

где $f(n, t)$ равно наибольшему числу m такому, что для всякого $x \leq m$ ν_0 p -сводима к ν_1 на шаге t в точке x посредством ЧРФ φ_n с высотой m . Если же такого числа m нет, то полагаем $f(n, t) = 0$. Понятно, что $C_{0,1}$ – монотонная по t ОРФ и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{0,1}(n, t) = \infty \iff \varphi_n - \text{ОРФ и } \nu_0 \leq_p \nu_1 \text{ посредством } \varphi_n.$$

ТЕОРЕМА. Пусть ν_1 и ν_2 – две вычислимые нумерации одного и того же семейства РПМ S , причем $\nu_2 <_p \nu_1$ и ν_1 не является p -главной нумерацией S . Тогда существует вычислимая нумерация ν_0 семейства S такая, что $\nu_2 <_p \nu_0$ и ν_0, ν_1 p -несравнимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо построить ν_0 такую, что $\nu_2 \leq_p \nu_0$ и для каждого n

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{0,1}(n, t) < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} C_{1,0}(n, t) < \infty. \quad (1)$$

Пусть ν_3 – вычислимая нумерация S такая, что $\nu_1 <_p \nu_3$. Потребуется маркеры двух сортов: $a(x)$ и $b(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Перед шагом 0 числам вида $2x + 1$ сопоставляем маркеры $a(x)$. Маркеры, сопоставленные нечетным числам, в дальнейшем заменяться не будут и поэтому окажется, что $\nu_0(2x + 1) = \nu_2(x)$, т.е. $\nu_2 \leq_m \nu_0$.

Шаг t . Сопоставляем числу $2t$ маркер $b(x)$, где x – наименьшее число такое, что маркер $b(x)$ к шагу t никакому числу еще не сопоставлен. Затем ищем наименьшее $n \leq t$ такое, что

$$C_{0,1}(n, t + 1) > C_{0,1}(n, t) > C_{1,0}(n, t) \quad (2)$$

или

$$C_{1,0}(n, t + 1) > C_{1,0}(n, t) > C_{0,1}(n - 1, t), \quad (3)$$

считая $C_{0,1}(-1, t) = 0$. Если такого n нет или выполнено условие (2), то переходим к выполнению инструкций пункта А (см. ниже).

Если же такое число n есть, что выясняется эффективно, то пусть $2x_1 < \dots < 2x_k \leq 2t$ – все числа в порядке возрастания, которым сопоставлены маркеры вида $b(x)$ и такие, что

$$C_{1,0}(n, t) < x_i < C_{1,0}(n, t + 1).$$

Для каждого $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$ пусть y – наименьшее число такое, что $\nu_0^t(x) \subseteq \nu_2^t(y)$. Заменяем маркер, сопоставленный числу $2x$, на маркер $a(x)$ и переходим к выполнению инструкций пункта А.

Пункт А. Для каждого $x \leq t$ полагаем $\nu_0^{t+1}(x) = \nu_3^{t+1}(y)$, если числу x сопоставлен маркер $b(y)$, и $\nu_0^{t+1}(x) = \nu_2^{t+1}(y)$, если числу x сопоставлен маркер $a(y)$. Переходим к шагу $t + 1$.

Проверим для каждого n выполнение условия (1). Предполагая противное, пусть n – наименьшее число, для которого (1) не имеет места. Если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{0,1}(n, t) = \infty,$$

то, как следует из свойств счетчиков, $\nu_1 \leq_p \nu_0$ посредством ОРФ φ_n . С другой стороны, начиная с некоторого шага t , на подходящих больших шагах числам $x_0 < x_1 < \dots$ будут выставлены маркеры $b(0), b(1), \dots$, которые в дальнейшем заменены на другие быть не могут. Из инструкций пункта А имеем $\nu_0(x_n) = \nu_3(n)$. Таким образом, $\nu_3 \leq_p \nu_1$, что противоречит выбору нумерации ν_3 . Если же

$$\lim_{t \rightarrow \infty} = C_{1,0}(n, t) = \infty,$$

то $\nu_1 \leq_p \nu_0$ посредством ОРФ φ_n . Но, начиная с некоторого шага, все маркеры вида $b(x)$, кроме конечного их числа, будут заменены на маркеры вида $a(y)$. Согласно пункту А если числу x сопоставлен маркер $a(y)$, то $\nu_0(x) = \nu_2(y)$. Поэтому $\nu_0 \leq_p \nu_2$ и, следовательно, $\nu_1 \leq_p \nu_2$. Это противоречит выбору нумерации ν_2 .

Разумеется, теорема верна не для любого вычислимого семейства РПМ S . Например, эффективно дискретные вычисляемые семейства имеют с точностью до m -эквивалентности только одну вычислимую нумерацию.

Определим теперь категорию K_p , согласованную с p -сводимостью нумераций. Объектами K_p является множество L_p всех p -степеней вычисляемых нумераций семейства S – всех РПМ. Отображение $\mu: \nu_0 \rightarrow \nu_1$ назовем *морфизмом*, если $\nu_0 \leq_p \nu_1$. Заметим, что в категории K_p морфизмы будут являться одновременно мономорфизмами и эпиморфизмами.

Существование прямых сумм и произведений в K_p равносильно существованию точных верхних и нижних граней для элементов из L_p . Хорошо известно [1], что L_p является верхней, но не нижней полурешеткой. Поэтому в L_p для любых двух объектов существует их прямая сумма $\nu_0 \oplus \nu_1$, но не всегда их прямое произведение.

Инъективным объектом категории K_p называется объект ν_1 такой, что для любых двух морфизмов $\mu_0: \nu_2 \rightarrow \nu_0$ и $\mu_1: \nu_2 \rightarrow \nu_1$, где ν_0 и ν_2 – произвольные объекты, существует морфизм $\mu: \nu_0 \rightarrow \nu_1$ такой, что $\mu_1 = \mu\mu_0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Объект ν_1 в категории K_p является инъективным тогда и только тогда, когда ν_1 – p -главная нумерация S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как к p -главной нумерации S p -сводима любая вычислимая нумерация S , то достаточность очевидна. Если же ν_1 не является p -главной, то в качестве ν_0 можно взять нумерацию S такую, что $\nu_1 <_p \nu_0$.

Проективным объектом категории K_p называется объект ν_1 такой, что для любых двух объектов ν_0, ν и морфизмов $\mu_1: \nu_1 \rightarrow \nu, \mu_0: \nu_0 \rightarrow \nu$ существует морфизм $\mu: \nu_1 \rightarrow \nu_0$ такой, что $\mu_1 = \mu\mu_0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В категории K_p не существует проективных объектов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ν_0 – однозначная нумерация S и $\nu_1 \leq_p \nu_0$, то легко понять, что $\nu_1 \leq_m \nu_0$, а так как ν_0 – минимальная нумерация, то $\nu_1 =_m \nu_0$. Но однозначных нумераций S счетное число [2], и поэтому для ν_1 найдется ν_0 такая, что $\nu_1 \not\leq_p \nu_0$.

Если S – семейство ОРФ и существует ОРФ $\delta(n, x)$ такая, что $S = \{\lambda x \delta(n, x) : n \in \mathbb{N}\}$, то, полагая

$$\delta_n = \{\langle x, \delta(n, x) \rangle : x \in \mathbb{N}\}, \quad \delta_n(x) = \delta(n, x),$$

получим вычислимую нумерацию S . Так как S является вычислимой нумерацией некоторого семейства РПМ (графиков $f \in S$), на множестве таких нумераций естественно определяется e -, p - и m -сводимость, как в [1]. Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 3 из работы [4].

ЛЕММА. Если семейство ОРФ S имеет две вычислимые нумерации α и β такие, что $\beta <_m \alpha$, то S не имеет p -главной нумерации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По произвольной ЧРФ φ по шагам будет строиться вычислимая нумерация γ некоторого подсемейства S и определяться вспомогательная функция e , считая, что перед шагом 0 $e(x)$ неопределено для $x \in \mathbb{N}$. Пусть $\gamma_n^t = \delta_m^t$, $\delta \in \{\alpha, \beta\}$, если $\gamma_n(x)$ определено для всех $x \leq t$. Пусть

- а) $\varphi(n) = y$ к шагу t вычислено;
- б) существует $z \in D_y$ такое, что $\gamma_n^t = \alpha_u^t$ для всех $u \in D_z$, и не существует $z \in D_y$ такого, что $\alpha_u^t = \alpha_v^t \neq \gamma_n^t$ для всех $u, v \in D_z$.

В этом случае будем писать $\gamma_n^t = \alpha_{\psi(n)}^t$, где $\psi(n) = \min\{u : u \in D_z\}$, а z – наименьшее число, для которого выполнено условие б).

Заметим, что значение $\psi(n)$ может меняться от шага к шагу, но не более k раз, где k – число элементов множества D_y , причем если $\psi(n) = u$ на шаге t , а $\psi(n) = v$ на шаге $t + 1$, то $\alpha_u^t = \alpha_v^t$.

Шаг 0. Полагаем $\gamma_n^0 = \alpha_n^0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и переходим к следующему шагу.

Шаг $t + 1$. Выполняем инструкции того случая, который имеет место, и переходим к следующему шагу, предполагая, что для каждого t и n такой шаг встречается.

Случай 1. $\varphi(n)$ к шагу t определено, а $e(n)$ еще нет и $\gamma_n^t = \alpha_{\psi(n)}^t$. Ищем наименьшее y такое, что $\alpha_n^t = \beta_n^t$, полагая $\gamma_n^{t+1} = \beta_y^{t+1}$ и $e(n) = y$.

Случай 2. $\varphi(n)$ и $e(n)$ к шагу t определены, $\gamma_n^t = \alpha_{\psi(n)}^t$ и $\alpha_{\psi(n)}^{t+1} \neq \beta_{e(n)}^{t+1}$. Полагаем $\gamma_n^{t+1} = \beta_{e(n)}^{t+1}$.

Случай 3. $\varphi(n)$ и $e(n)$ к шагу t определены, $\gamma_n^t \neq \alpha_{\psi(n)}^t$ и $\gamma_n^t \neq \alpha_n^t$. Полагаем $\gamma_n^{t+1} = \beta_{e(n)}^{t+1}$.

Случай 4. Если случаи 1, 2 и 3 не имеют места, то полагаем $\gamma_n^{t+1} = \alpha_n^{t+1}$.

Покажем, что γ не может быть p -сводима к α посредством ЧРФ φ . Действительно, если для некоторого n на шаге t выполняется случай 2 или же φ не ОРФ, то $\gamma \leq_p \alpha$. Если же φ – ОРФ и случай 2 не имеет места для всех n , то для каждого n на подходящем шаге t будет иметь место случай 1, а следовательно, и равенство $\alpha_{\psi(n)} = \alpha_n = \beta_{e(n)}$. Итак, $\alpha \leq_p \beta$ посредством ОРФ e , что противоречит предположению.

Пусть теперь $G_0 = \{0, 1, 3, 5, \dots\}$ и $G_1 = \{2^i(2k + 1) : k \geq 0\}$ для $i \geq 1$, ОРФ g_i осуществляет прямой пересчет рекурсивного множества G_i , а γ_i – нумерация подсемейства S , построенная выше, если положить $\varphi = \varphi_i$. Через γ' обозначим нумерацию такую, что

$$(\forall i)(\forall n)(\gamma'(g_i(n)) = \gamma_i(n)),$$

которая, очевидно, является вычислимой нумерацией некоторого подсемейства S . Положим $\gamma = \alpha \oplus \gamma'$ и предположим, что $\gamma \leq_p \alpha$. Тогда и $\gamma' \leq_p \alpha$ посредством подходящей f . Пусть ОРФ h такова, что $\varphi_{h(i)} = fgi$. По теореме о неподвижной точке найдется число n такое, что $\varphi_{h(n)} = \varphi_n$. Тогда $\gamma_n \leq_p \alpha$ посредством ОРФ φ_n , что противоречит доказанному выше.

Так как существуют несложные примеры вычислимых семейств ОРФ S , удовлетворяющие посылке леммы и имеющие e -главные нумерации [1], получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Существуют вычислимые семейства ОРФ, обладающие e -главной, но не имеющие p -главной нумерации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дёгтев А. Н. О сводимости нумераций // Матем. сб. 1980. Т. 112. № 2. С. 207–219.
- [2] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [3] Degtev A. N. On p -reducibility of numerations // Ann. of Pure and Appl. Logic. 1993. V. 63. P. 57–60.
- [4] Марченков С. С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 5. С. 588–607.

Тюменский государственный университет

Поступило

25.05.1999

Исправленный вариант

03.03.2000