Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, О геометрии подмногообразий Лагранжа,
Матем. заметки, 2001, том 69, выпуск 1, 36–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 08:17:26

УДК 514.76

О ГЕОМЕТРИИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ЛАГРАНЖА

В. Ф. Кириченко

Доказано, что через каждую точку произвольного симплектического многообразия в направлении любой лагранжевой плоскости проходит подмногообразие Лагранжа. Доказано, что подмногообразия Лагранжа с такими начальными данными, вообще говоря, не единственно, однако совокупность таких подмногообразий эрмитова расширения симплектического многообразия размерности свыше четырех при любых начальных данных содержит вполне геодезическое подмногообразие, названное нами s -лагранжевым подмногообразием, тогда и только тогда, когда это симплектическое многообразие является комплексной пространственной формой. Показано, что всякое подмногообразие Лагранжа комплексной пространственной формы голоморфной секционной кривизны s является пространством постоянной кривизны $s/4$. Найдены приложения этих результатов к геометрии главных тороидальных расслоений.

Библиография: 14 названий.

Подмногообразия Лагранжа, т.е. n -мерные подмногообразия $2n$ -мерного симплектического многообразия, аннулирующие структурную форму, играют важную роль в симплектической геометрии и часто возникают в различных задачах механики и физики [1]–[3]. Это объясняется тем, что, с одной стороны, объекты симплектической геометрии часто изображаются лагранжевыми подмногообразиями. Например, график симплектоморфизма одного симплектического многообразия в другое является лагранжевым подмногообразием относительно естественной симплектической структуры в декартовом произведении этих многообразий [4]. С другой стороны, их значение в механике хорошо иллюстрируется тем фактом, что (полная) лагранжева поверхность, лежащая на уровне энергии $H(x, p) = E_0$ в фазовом пространстве механической системы, целиком содержит траектории гамильтоновой системы с гамильтонианом H , имеющие с этой поверхностью хотя бы одну общую точку [5]. Однако их геометрия подробно изучалась главным образом в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, снабженном стандартной симплектической структурой. В настоящей работе изучаются подмногообразия Лагранжа в произвольном симплектическом пространстве M . Нами доказано, что через каждую точку $p \in M$ в направлении любой лагранжевой плоскости $L \subset T_p(M)$ проходит, вообще говоря не единственное, подмногообразие Лагранжа. С другой стороны, каждую симплектическую структуру на многообразии M можно (неоднозначно) продолжить до почти келеровой структуры. Подмногообразия Лагранжа при этом являются не чем иным, как вполне вещественными подмногообразиями соответствующего почти келерова многообразия. Нами доказано, что если $\dim M > 4$, то в классе вполне вещественных подмногообразий, проходящих через данную точку в данном вполне вещественном

направлении, присутствует в точности одно вполне геодезическое подмногообразие, которое мы называем *строго лагранжевым* (короче, *s-лагранжевым*), тогда и только тогда, когда M – комплексная пространственная форма. Доказано, что *s-лагранжево* подмногообразие комплексной пространственной формы (т.е. келерова многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны c) является пространством постоянной кривизны $c/4$. Рассмотрены контактные аналоги лагранжевых и *s-лагранжевых* подмногообразий. Контактный аналог первых из них есть не что иное, как подмногообразие Лежандра контактного многообразия [3], а контактный аналог вторых назван нами *подмногообразиями Блэра*. Изучена связь между этими типами подмногообразий в случае, когда симплектическое многообразие M имеет целочисленную структурную форму. В этом случае тотальное пространство главного T^1 -расслоения над M – расслоения Бутби–Вана – несет каноническую K -контактную структуру [6]. Нами доказано, что подмногообразия Лежандра относительно этой структуры есть не что иное, как горизонтальное поднятие лагранжевых подмногообразий, а подмногообразия Блэра – горизонтальное поднятие *s-лагранжевых* подмногообразий. Более того, мы доказываем, что всякое *s-лагранжево* подмногообразие комплексной пространственной формы M конечнолистно покрывается некоторым подмногообразием Блэра, а именно своим полным горизонтальным поднятием в пространство расслоения Бутби–Вана над M .

Пусть M – гладкое многообразие, $X(M) = C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , d – оператор внешнего дифференцирования. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞ . Напомним [1], что *симплектической* структурой на M называется поле невырожденной замкнутой 2-формы, называемой *структурной формой*. Хорошо известно, что необходимыми условиями существования симплектической структуры на многообразии является его четномерность и ориентируемость. Многообразие, на котором фиксирована симплектическая структура, называется *симплектическим многообразием*. Если p – произвольная точка симплектического многообразия M^{2n} , то n -мерное подпространство $L \subset T_p(M)$, аннулирующее структурную форму, называется *лагранжевой плоскостью*; n -мерное подмногообразие симплектического многообразия M^{2n} , касательное пространство которого в каждой точке является лагранжевой плоскостью, называется *подмногообразием Лагранжа* [1].

Напомним [7], [8], что почти эрмитовой (короче, $A\mathcal{H}$ -) структурой на многообразии M называется пара $\{g, J\}$, где $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M , J – почти комплексная структура, т.е. эндоморфизм касательного пучка многообразия M такой, что $J^2 = -\text{id}$. При этом должно выполняться тождество $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in X(M)$. Из этих условий следует, что тензор $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ кососимметричен; он называется *фундаментальной формой структуры*. Как и в случае симплектической структуры, необходимыми условиями существования $A\mathcal{H}$ -структуры на многообразии является его четномерность и ориентируемость. Пусть ∇ – риманова связность метрики g . Напомним [9], что почти эрмитова структура $\{g, J\}$ называется

- *квазикелеровой* ($Q\mathcal{H}$ -), если $\nabla_X(J)Y + \nabla_{JX}(J)(JY) = 0$,
- *почти келеровой* ($A\mathcal{H}$ -), если $d\Omega = 0$,
- *келеровой* ($\mathcal{H}$ -), если $\nabla J = 0$.

Хорошо известно [9], что $\mathcal{H} \subset A\mathcal{H} \subset Q\mathcal{H}$.

Пусть M – $2n$ -мерное почти эрмитово многообразие, т.е. многообразие, снабженное $A\mathcal{H}$ -структурой; n -мерное подмногообразие $N \subset M$ называется *вполне вещественным*, если $\Omega|_N = 0$, т.е. $\langle X, JY \rangle = 0$ ($X, Y \in X(N)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Говорят, что почти эрмитово многообразие M удовлетворяет аксиоме вполне вещественных подмногообразий, если в каждой точке $p \in M$ для каждого вполне вещественного подпространства $L \subset T_p(M)$ существует вполне вещественное подмногообразие $N \subset M$, проходящее через точку p и такое, что $L = T_p(N)$. Если каждое такое подмногообразие может быть выбрано вполне геодезическим, то говорят, что многообразие M удовлетворяет аксиоме вполне вещественных плоскостей.

Симплектическая структура Ω всегда может быть (неоднозначно) дополнена до почти келеровой структуры, для которой форма Ω является фундаментальной формой структуры. В самом деле, известно [7], что при заданной невырожденной внешней 2-форме Ω , исходя из произвольной римановой метрики g_0 , всегда можно построить риманову метрику $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, переместимую с формой Ω . Переместимость здесь означает, что эндоморфизм J на M , однозначно определенный тождеством $\langle X, JY \rangle = \Omega(X, Y)$, $X, Y \in X(M)$, является почти комплексной структурой. Но тогда, как легко видеть, справедливо тождество $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in X(M)$. Это означает, что пара $\{g, J\}$ образует почти эрмитову структуру на M , для которой форма Ω является фундаментальной формой структуры. Если Ω является симплектической структурой, т.е. замкнута, то соответствующая ей почти эрмитова структура является почти келеровой. Очевидно, такая структура строится неоднозначно (ввиду произвола в выборе метрики g_0). Будем называть ее *эрмитовым продолжением исходной симплектической структуры*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, лагранжевы плоскости симплектического многообразия являются не чем иным, как вполне вещественными подпространствами, а подмногообразия Лагранжа – вполне вещественными подмногообразиями любого эрмитова расширения этого симплектического многообразия.

Пусть $\mathcal{S} = \{g = \langle \cdot, \cdot \rangle, J\}$ – почти эрмитова структура на многообразии M^{2n} , $p \in M$. Тогда в касательном пространстве $T_p(M)$ можно построить ортонормированный репер $(p, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$. Такой репер будем называть *вещественно адаптированным репером*. С другой стороны, в комплексификации модуля $X(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\sigma = \frac{1}{2}(\text{id} - \sqrt{-1}J)$ и $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\text{id} + \sqrt{-1}J)$ на собственные подмодули эндоморфизма J , отвечающие собственным значениям $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ соответственно. Следовательно, можно построить репер $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ комплексификации пространства $T_p(M)$, где $\varepsilon_a = \sqrt{2}\sigma(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\sigma}(e_a)$, состоящий из собственных векторов оператора J_p . Такой репер называется *A-репером*. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров J_p и g_p в A-репере имеют вид соответственно

$$(J_j^i) = \begin{pmatrix} \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Хорошо известно [10], [11], что совокупность таких реперов определяет G -структуру на M со структурной группой $U(n)$, представленной матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix},$$

где $A \in U(n)$. Эта G -структура называется *присоединенной*. На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 1 до $2n$,

индексы $a, b, c, d, f, g, \dots$ – значения от 1 до n , и положим $\hat{a} = a + n$. Поскольку J и g – тензоры типов $(1, 1)$ и $(2, 0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех комплексных реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} 1) \quad dJ_j^i + J_k^i \omega_j^k - J_j^k \omega_k^i &= J_{j,k}^i \omega^k, \\ 2) \quad dg_{ij} + g_{kj} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k &= g_{ij,k} \omega^k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\omega_j^i\}$ – компоненты форм смещения и римановой связности ∇ соответственно, $J_{j,k}^i$, $g_{ij,k}$ – компоненты ковариантного дифференциала тензоров J и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \quad (3)$$

С учетом (1) и (3) соотношения (2) на пространстве присоединенной G -структуры переписутся в форме

$$\begin{aligned} 1) \quad J_{b,k}^a &= 0, \quad 2) \quad J_{b,k}^{\hat{a}} = 0, \\ 3) \quad \omega_b^a &= -\frac{1}{2}\sqrt{-1}J_{b,k}^a \omega^k, \quad 4) \quad \omega_b^{\hat{a}} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}J_{b,k}^{\hat{a}} \omega^k, \\ 5) \quad \omega_j^i + \omega_{\hat{i}}^{\hat{j}} &\equiv 0 \pmod{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\bar{\omega}^i \equiv \omega^i \pmod{n}$, $\bar{\omega}_j^i \equiv \omega_j^i \pmod{n}$, $\bar{\nabla} J_{j,k}^i \equiv \nabla J_{j,\hat{k}}^i \pmod{n}$, где $t \rightarrow \bar{t}$ – оператор комплексного сопряжения. Несложно подсчитать, что почти эрмитова структура является квазикелеровой тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$J_{b,c}^a = 0. \quad (5)$$

При этом она является почти келеровой тогда и только тогда, когда

$$1) \quad J_{\hat{b},c}^a = 0, \quad 2) \quad J^{[ab,c]} = 0, \quad (6)$$

и является келеровой тогда и только тогда, когда

$$1) \quad J_{\hat{b},c}^a = 0, \quad 2) \quad J_{\hat{b},\hat{c}}^a = 0. \quad (7)$$

Здесь и в дальнейшем по индексам, заключенным в квадратные (соответственно круглые) скобки, подразумевается альтернирование (соответственно симметризация).

С учетом (5)–(7) нетрудно подсчитать, что первая группа структурных уравнений римановой связности

$$d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j \quad (8)$$

на пространстве присоединенной G -структуры $A\mathcal{H}$ -многообразия запишется в следующей форме, называемой *первой группой структурных уравнений $A\mathcal{H}$ -многообразия*:

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega_b^a \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c \omega^c \wedge \omega_b + B^{abc} \omega_b \wedge \omega_c, \\ d\omega_a &= -\omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c \omega_c \wedge \omega^b + B_{abc} \omega^b \wedge \omega^c, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}\omega_i &= g_{ij}\omega^j, & B^{ab}{}_c &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{\hat{b},c}, & B^{abc} &= \frac{\sqrt{-1}}{2}J^a_{[\hat{b},\hat{c}]}, \\ B_{ab}{}^c &= \frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}, & B_{abc} &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}J^{\hat{a}}_{[b,c]}.\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}1) \overline{\omega_b^a} &= -\omega_a^b, & 2) \overline{B^{ab}{}_c} &= B_{ab}{}^c, & 3) \overline{B^{abc}} &= B_{abc}, \\ 4) B_c^{(ab)} &= 0, & 5) B^{a(bc)} &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Более того, с учетом (4) нетрудно получить, что

$$J^a_{\hat{b},\hat{c}} = 4\sqrt{-1}\tilde{B}^{cab},\tag{11}$$

где $\tilde{B}^{cab} = \frac{1}{2}(B^{cab} - B^{abc} - B^{bca})$. Согласно (6) и (7) справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Почти эрмитова структура является квазикелеровой тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$; является почти келеровой тогда и только тогда, когда $B^{ab}{}_c = 0$, $B^{[abc]} = 0$; и является келеровой тогда и только тогда, когда $B^{abc} = 0$, $B^{ab}{}_c = 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, почти келеровость квазикелерова многообразия равносильна соотношению $B^{abc} = \tilde{B}^{abc}$.

Пусть, в частности, M – квазикелерово многообразие. Стандартная процедура дифференциального продолжения соотношений (9) с учетом предложения 1 приводит ко второй группе структурных уравнений квазикелеровой структуры:

$$d\omega_b^a = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + (2B^{adh}B_{hbc} + A_{bc}^{ad})\omega^c \wedge \omega_d + B_{bcd}{}^a\omega^c \wedge \omega^d - B^{acd}{}_b\omega_c \wedge \omega_d,\tag{12}$$

где $\{A_{bc}^{ad}\}$ – семейство функций на пространстве присоединенной G -структуры, служащих компонентами так называемого оператора кривизны присоединенной Q -алгебры [12], или *структурного тензора второго рода*, причем

$$1) A_{[bc]}^{ad} = 0, \quad 2) A_{bc}^{[ad]} = 2B_{(bc)h}B^{had}.\tag{13}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}dB^{abc} - B^{hbc}\omega_h^a - B^{ahc}\omega_h^b - B^{abh}\omega_h^c &= B^{abc}{}_h\omega^h + B^{abch}\omega_h, \\ dB_{abc} + B_{hbc}\omega_a^h + B_{ahc}\omega_b^h + B_{abh}\omega_c^h &= B_{abch}\omega^h + B_{abc}{}^h\omega_h,\end{aligned}\tag{14}$$

где $B^{abc}{}_d, B^{abcd}, B_{abcd}, B_{abc}{}^d$ – подходящие функции на пространстве присоединенной G -структуры. Отсюда, в частности, следует, что наборы функций $\{B^{abc}{}_d\}$ и $\{B_{abc}{}^d\}$ являются наборами компонент взаимно сопряженных тензоров на M , которые мы назовем *структурными тензорами первого рода*.

Сравнивая соотношения (12) со второй группой структурных уравнений римановой связности

$$d\omega_j^i = \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l,\tag{15}$$

где R^i_{jkl} – компоненты тензора Римана–Кристоффеля, в силу линейной независимости базисных форм получим, что на пространстве присоединенной G -структуры

$$1) R_{\hat{a}bcd} = 2B_{bcd}{}^a, \quad 2) R_{\hat{a}bc\hat{d}} = 2B^{adh}B_{hbc} - 4\tilde{B}^{dah}\tilde{B}_{cbh} + A_{bc}^{ad}. \quad (16)$$

Кроме того, с учетом (5), (6) и (11) имеем

$$1) \omega^{ab} \equiv \omega_{\hat{b}}^a = 2\tilde{B}^{hab}\omega_h, \quad 2) \omega_{ab} \equiv \omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = 2\tilde{B}_{hab}\omega^h. \quad (17)$$

Дифференциальное продолжение этих соотношений с учетом (9), (14) и (15) приводит к равенствам

$$1) R_{abcd} = 4\tilde{B}_{[d|ab|c]}, \quad 2) R_{\hat{a}\hat{b}cd} = 4\tilde{B}^{hab}B_{hcd}, \quad (18)$$

плюс соотношения, полученные из (16) и (18) с учетом классических свойств симметрии и вещественности тензора Римана–Кристоффеля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $A\mathcal{H}$ -многообразие называется *многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны* c , если

$$\forall X \in \mathcal{L} \implies \langle R(X, JX)X, JX \rangle = c\|X\|^4. \quad (19)$$

Келерово многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны называется *комплексной пространственной формой* [8].

Пусть M – $A\mathcal{H}$ -многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны c . Соотношение (19) на пространстве присоединенной G -структуры запишется в форме $4R_{\hat{a}bf\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = -4cg_{\hat{a}b}g_{f\hat{d}}X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}}$. С учетом (12) это соотношение можно переписать в виде

$$(R_{\hat{a}bf\hat{d}} + c\delta_b^a\delta_f^{\hat{d}})X^{\hat{a}}X^bX^fX^{\hat{d}} = 0.$$

Поляризация этого соотношения приводит нас к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $A\mathcal{H}$ -многообразие является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны c тогда и только тогда, когда

$$R^{(a}{}_{(bf)}{}^{d)} = -\frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}, \quad (20)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_{bf}^{ad} = \delta_b^a\delta_f^{\hat{d}} + \delta_f^a\delta_b^{\hat{d}}.$$

Пусть, в частности, M – квазикелерово многообразие. Тогда с учетом (162) соотношение (20) принимает вид

$$A_{bf}^{(ad)} = 4\tilde{B}^{(ad)h}\tilde{B}_{(bf)h} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}.$$

Используя это соотношение и (132), после упрощений получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Квазикелерово многообразие является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны с тогда и только тогда, когда*

$$A_{bf}^{ad} = 4\tilde{B}^{dah}B_{(bf)h} - \frac{c}{2}\tilde{\delta}_{bf}^{ad}. \quad (21)$$

Пусть M^{2n} – квазикелерово многообразие, $N^n \subset M^{2n}$ – вполне вещественное подмногообразие. Фиксируем точку $p \in N$. Пусть $(p, e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный репер касательного пространства $T_p(N)$. Этот репер однозначно достраивается до вещественно-адаптированного репера $(p, e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n)$ касательного пространства $T_p(M)$. Пусть $(p, \theta^1, \dots, \theta^n, \theta^{\hat{1}}, \dots, \theta^{\hat{n}})$ – дуальный корепер. Очевидно, сужение на N семейства всех вещественно-адаптированных реперов многообразия M определяет G -структуру со структурной группой $U(n)$, в котором семейство $\mathcal{B}$ вещественно-адаптированных реперов указанного выше вида образует подструктуру со структурной группой $O(n, \mathbb{R})$, пространство которой задается системой Пфаффа

$$\theta^{\hat{a}} = 0. \quad (22)$$

Нам, однако, удобнее будет иметь дело с главным расслоением A -реперов $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, порожденных реперами семейства $\mathcal{B}$. Напомним, что

$$\varepsilon_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a - \sqrt{-1}Je_a), \quad \varepsilon_{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_a + \sqrt{-1}Je_a).$$

Поэтому матрица $C = (C_j^i)$ перехода от вещественно-адаптированного репера к соответствующему A -реперу имеет вид

$$(C_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -\sqrt{-1}I_n & \sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Следовательно, если $(p, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{\hat{1}}, \dots, \omega^{\hat{n}})$ – корепер, дуальный A -реперу, то $\omega^i = D_j^i \theta^j$, где $D = (D_j^i)$ – матрица, обратная матрице C . Очевидно,

$$(D_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & \sqrt{-1}I_n \\ I_n & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Следовательно,

$$1) \omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^a + \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}), \quad 2) \omega^{\hat{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta^a - \sqrt{-1}\theta^{\hat{a}}). \quad (25)$$

В частности, система Пфаффа (22) может быть переписана в форме

$$\omega^a = \omega_a. \quad (26)$$

Далее, первая группа структурных уравнений римановой связности на пространстве расслоения вещественно-адаптированных реперов многообразия M имеет вид

$$d\theta^i = \theta_j^i \wedge \theta^j, \quad (27)$$

где $\{\theta_j^i\}$ – компоненты формы римановой связности на этом пространстве. Поскольку $\theta^i = C_j^i \omega^j$, это соотношение можно также переписать в форме $C_j^i d\omega^j = \theta_j^i \wedge C_k^j \omega^k$ или

$$d\omega^i = (D_m^i \theta_k^m C_j^k) \wedge \omega^j. \quad (28)$$

С другой стороны, в силу (8) $d\omega^i = \omega_j^i \wedge \omega^j$. Сравнивая (28) с этим соотношением, получим, что $(D_m^i \theta_k^m C_j^k - \omega_j^i) \wedge \omega^j = 0$, и в силу леммы Картана

$$\omega_j^i = D_m^i \theta_k^m C_j^k + C_{jk}^i \omega^k, \quad (29)$$

где $\{C_{jk}^i\}$ – система функций на пространстве расслоения A -реперов, симметричная по нижним индексам.

ЛЕММА. В принятых обозначениях $C_{jk}^i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом параллельности метрического тензора в римановой связности имеем

$$1) d\tilde{g}_{ij} + \tilde{g}_{kj}\theta_i^k + \tilde{g}_{ik}\theta_j^k = 0, \quad 2) dg_{ij} + g_{kj}\omega_i^k + g_{ik}\omega_j^k = 0, \quad (30)$$

где $\{\tilde{g}_{ij}\}$ и $\{g_{ij}\}$ – компоненты метрического тензора g многообразия M в вещественно-адаптированном репере и A -репере соответственно. Поскольку g – тензор типа $(2, 0)$, $g_{ij} = C_i^k C_j^m \tilde{g}_{km}$. С учетом этого (30₂) примет вид

$$\tilde{g}_{ms} C_k^m C_j^s \omega_i^k + \tilde{g}_{ms} C_i^m C_k^s \omega_j^k = 0.$$

Подставляя сюда (29), после упрощений получим

$$\tilde{g}_{ms} C_j^m \theta_t^s C_i^t + \tilde{g}_{ms} C_i^m \theta_t^s C_j^t + (\tilde{g}_{kj} C_{it}^k + \tilde{g}_{ik} C_{jt}^k) \omega^t = 0.$$

Но в силу (30₁) сумма первых двух слагаемых суммы слева равна нулю, и в силу линейной независимости базисных форм $\tilde{g}_{kj} C_{it}^k + \tilde{g}_{ik} C_{jt}^k = 0$. Дважды делая в этом соотношении циклическую перестановку индексов i, j и t , почленно сложим первые два соотношения и почленно вычтем третье: $\tilde{g}_{kj} C_{it}^k = 0$. В силу невырожденности матрицы метрического тензора отсюда следует, что $C_{it}^k = 0$.

С учетом этой леммы соотношение (29) можно переписать в форме

$$\theta_j^i = C_m^i \omega_k^m D_j^k. \quad (31)$$

Выясним условия интегрируемости системы (22). В силу (27) условия $d\theta^{\hat{a}}|_N = 0$ принимают вид $\theta_b^{\hat{a}} \wedge \theta^b = 0$, откуда в силу леммы Картана на подмногообразии N должно выполняться соотношение

$$\theta_b^{\hat{a}} = H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c, \quad (32)$$

где $H_{bc}^{\hat{a}} = H_{cb}^{\hat{a}}$ – компоненты второй квадратичной формы погружения $N \subset M$. Заметим, что в силу (31)

$$\theta_b^{\hat{a}} = C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^g + C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^g + C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^g + C_h^{\hat{a}} \omega_g^h D_b^g,$$

откуда в силу (23) и (24) получаем

$$\theta_b^{\hat{a}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} (-\omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}} - \omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}}).$$

В частности, (32) можно переписать в форме

$$\omega_b^a - \omega_b^{\hat{a}} + \omega_b^a - \omega_b^{\hat{a}} = 2\sqrt{-1} H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c. \quad (33)$$

Аналогично,

$$\theta_b^a = \frac{1}{2} (\omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}} + \omega_b^a + \omega_b^{\hat{a}}). \quad (34)$$

Заметим, что (33) можно записать в форме

$$(\omega_b^a + \omega_a^b) + (\omega^{ab} - \omega_{ab}) = 2\sqrt{-1} H_{bc}^{\hat{a}} \theta^c.$$

Симметризуя и альтернируя это соотношение по индексам a и b , получим соответственно

$$1) \omega_b^a + \omega_a^b = 2\sqrt{-1}H_{(ab)c}\theta^c, \quad 2) \omega^{ab} - \omega_{ab} = 2\sqrt{-1}H_{[ab]c}\theta^c, \quad (35)$$

где $H_{abc} = H_{bc}^a$. Перепишав теперь (34) в форме

$$\theta_b^a = \frac{1}{2}(\omega_b^a - \omega_a^b) + \frac{1}{2}(\omega^{ab} + \omega_{ab}),$$

с учетом (35), (17), (22) и (25) получаем

$$\omega_b^a = \theta_b^a - \sqrt{2}\tilde{B}^{cab}\theta_c + \sqrt{-1}H_{abc}\theta^c. \quad (36)$$

ТЕОРЕМА 1. *Квазикелерово многообразие M^{2n} удовлетворяет аксиоме вполне вещественных подмногообразий тогда и только тогда, когда оно является почти келеровым многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $p_0 \in M$ и n -мерное вполне вещественное подпространство $L \subset T_{p_0}(M)$. Пусть $N \subset M$ – вполне вещественное подмногообразие, проходящее через эту точку в направлении L . Это означает, что $p_0 \in N$, $T_{p_0}(N) = L$. Пусть $(p, e_1, \dots, e_n)$ – ортонормированный репер пространства $T_p(N)$ ($p \in N$), $(p, \theta^1, \dots, \theta^n)$ – дуальный корепер. Как уже отмечалось, они порождают вещественно-адаптированный репер и дуальный ему корепер пространства $T_p(M)$ соответственно. Пусть $(p, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$ и $(p, \omega^1, \dots, \omega^n, \omega_1, \dots, \omega_n)$ – соответствующие им A -репер и дуальный ему корепер. Согласно (22) подмногообразие $N \subset M$ задается системой Пфаффа $\theta^{\hat{a}} = 0$, и в силу (25)

$$1) \omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta^a, \quad 2) \omega_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_a, \quad (37)$$

(для простоты сужение формы на N мы обозначаем той же буквой, что и саму форму). Систему (37) можно рассматривать как систему Пфаффа подмногообразия N . Найдем условия ее интегрируемости. Продифференцируем внешним образом (37₁):

$$d\omega^a = \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta^a.$$

С учетом (9₁), (27) и (22) это соотношение примет вид

$$\sqrt{2}(\omega_b^a \wedge \omega^b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c) = \theta_b^a \wedge \theta^b$$

или в силу (37)

$$(\omega_b^a - \theta_b^a) \wedge \theta^b + \frac{1}{\sqrt{2}}B^{abc}\theta_b \wedge \theta_c = 0.$$

Подставляя сюда (36), с учетом свойств симметрии второй квадратичной формы и линейной независимости базисных форм получим, что

$$2\tilde{B}^{[b|a|c]} - B^{abc} = 0,$$

что, очевидно, равносильно соотношению $B^{[abc]} = 0$ и в силу предложения 1 тому, что M – почти келерово многообразие. Аналогично, с учетом (9₂) и того обстоятельства, что в ортонормированном репере $\theta_b^a + \theta_a^b = 0$, проверяется, что условие $d\omega_a = \frac{1}{\sqrt{2}}d\theta^a$

выполняется тождественно в силу (37). Таким образом, система (37) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда M – почти келерово многообразие. В этом и только в этом случае через каждую точку r пространства расслоения A -реперов, а значит, и пространства вещественно-адаптированных реперов, над M проходит единственное интегральное многообразие максимальной размерности. Его проекция на M является n -мерным подмногообразием многообразия M , которое в силу (37) является вполне вещественным подмногообразием, касательное пространство которого в начале вещественно-адаптированного репера r совпадает с линейной оболочкой первых n векторов этого репера. В силу произвола в выборе r отсюда следует утверждение теоремы.

В качестве важного следствия доказанной теоремы получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ. *Через каждую точку p симплектического многообразия M в направлении любой лагранжевой плоскости $L \subset T_p(M)$ проходит подмногообразие Лагранжа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1 это утверждение равносильно справедливости аксиомы вполне вещественных подмногообразий для произвольного эрмитова расширения исходной симплектической структуры. Но в силу теоремы 1 эта аксиома справедлива, поскольку эрмитово расширение симплектической структуры, как уже отмечалось, является почти келеровой структурой.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Разумеется, этот факт следует также из классической теоремы Дарбу о локальной симплектоморфности симплектического многообразия стандартному симплектическому пространству. Наше рассуждение исходит из совершенно иных соображений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Подмногообразие Лагранжа, проходящее через данную точку p в направлении данной лагранжевой плоскости $L \subset T_p(M)$, вообще говоря, не единственно. Рассмотрим, например, стандартную симплектическую структуру на пространстве $\mathbb{R}^2$, заданную 2-формой $\Omega = dx^1 \wedge dx^2$. Непосредственно проверяется, что подмногообразие $N_1 \subset \mathbb{R}^2$, заданное уравнением $x^2 = (x^1)^2$, равно как и подмногообразие $N_2 \subset \mathbb{R}^2$, заданное уравнением $x^2 = (x^1)^3$, являются одномерными подмногообразиями Лагранжа, проходящими через точку $O(0, 0)$. Очевидно, их касательные пространства в точке O совпадают и задаются уравнением $x^2 = 0$. Более обще, рассмотрим стандартную симплектическую структуру на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, заданную 2-формой

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}. \quad (38)$$

Рассмотрим произвольную гладкую функцию $y = f(x^1, \dots, x^n)$. Построим n функций

$$x^{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим n -мерное подмногообразие $N \subset \mathbb{R}^{2n}$, заданное этой системой уравнений. Очевидно, оно является подмногообразием Лагранжа. Если фиксировать точку $p_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in N$, то касательное пространство к N в этой точке задается уравнением

$$dx^{n+i} = \left. \frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{p=p_0} dx^j, \quad i = 1, \dots, n.$$

В частности, если f_1 и f_2 – две функции, имеющие одинаковый гессиан в точке p_0 , то они порождают, вообще говоря, различные подмногообразия Лагранжа, имеющие одинаковый интегральный элемент в этой точке.

ТЕОРЕМА 2. *Квазикелерово многообразие размерности выше четырех удовлетворяет аксиоме вполне вещественных плоскостей тогда и только тогда, когда оно является комплексной пространственной формой и, следовательно, локально эквивалентно одному из следующих многообразий:*

- при $c > 0$ комплексному проективному пространству $\mathbb{CP}^n$;
- при $c = 0$ комплексному евклидову пространству $\mathbb{C}^n$;
- при $c < 0$ – комплексному гиперболическому пространству $\mathbb{CH}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость немедленно вытекает из [11, теорема 38]. Обратно, пусть M^{2n} – комплексная пространственная форма. Надо доказать, что через каждую точку многообразия M^{2n} в любом n -мерном вполне вещественном направлении проходит единственное вполне геодезическое n -мерное интегральное многообразие. Заметим, что вполне геодезичность интегрального многообразия равносильна обращению в нуль его второй квадратичной формы [8], а потому требование вполне геодезичности интегральных многообразий системы (37) равносильно добавлению к этой системе уравнений (36) при $H_{abc} = 0$, которые мы запишем в форме

$$\theta_b^a = \omega_b^a. \quad (39)$$

Условие интегрируемости полученной системы Пфаффа задается соотношением

$$d\theta_b^a = d\omega_b^a$$

или с учетом (15)

$$\theta_c^a \wedge \theta_b^c + \frac{1}{2} \tilde{R}^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = \omega_c^a \wedge \omega_b^c + \omega_c^a \wedge \omega_b^{\hat{c}} + \frac{1}{2} R^a_{bij} \omega^i \wedge \omega^j, \quad (40)$$

где $\tilde{R}^a_{bcd}$ – компоненты тензора Римана–Кристоффеля риманова многообразия N . Поскольку M – келерово многообразие, $\omega_b^{\hat{a}} = \omega_b^a = 0$ в силу (17_{1,2}). Кроме того, заметим, что ввиду вполне геодезичности подмногообразия $N \subset M$ имеем $\tilde{R} = R|_N$ и, значит,

$$\tilde{R}^a_{bcd} \theta^c \wedge \theta^d = C_i^a D_b^j D_c^k D_d^l R_{ijkl}^i \theta^c \wedge \theta^d = C_i^a D_b^j D_c^k R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l.$$

Подставляя эти соотношения в (40), после необходимых сокращений с учетом (17), (39) и линейной независимости базисных форм получим

$$C_i^a D_b^j R_{jcd}^i = R^a_{bcd} + R^a_{bc\hat{d}} + R^a_{b\hat{c}d} + R^a_{b\hat{c}\hat{d}}.$$

С учетом (23) и (24) это соотношение можно переписать в форме

$$\begin{aligned} & -R_{\hat{a}bcd} - R_{\hat{a}bc\hat{d}} - R_{\hat{a}b\hat{c}d} - R_{\hat{a}b\hat{c}\hat{d}} + R_{abcd} + R_{abc\hat{d}} + R_{ab\hat{c}d} + R_{ab\hat{c}\hat{d}} \\ & + R_{\hat{a}\hat{b}cd} + R_{\hat{a}\hat{b}c\hat{d}} + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}d} + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} + R_{\hat{a}\hat{b}cd} + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}d} + R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = 0. \end{aligned}$$

С учетом (16) и (18) после необходимых сокращений окончательно получаем условия интегрируемости системы (37), (39)

$$A_{bc}^{ad} - A_{bd}^{ac} + A_{ac}^{bd} - A_{ad}^{bc} = 0. \quad (41)$$

Очевидно, на комплексной пространственной форме эти условия выполняются тождественно в силу предложений 1 и 3. Таким образом, система (37), (39) вполне интегрируема. Повторяя то же рассуждение, что и при окончании доказательства теоремы 1, получаем, что через каждую точку p многообразия M в направлении любого вполне вещественного подпространства $L \subset T_p(M)$ проходит n -мерное вполне геодезическое вполне вещественное подмногообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вполне геодезическое подмногообразие Лагранжа симплектического многообразия с фиксированным эрмитовым расширением назовем *строго лагранжевым*, короче, *s-лагранжевым*.

Из теоремы 2 немедленно следует

ТЕОРЕМА 3. *Через каждую точку симплектического многообразия M^{2n} ($n > 2$) с фиксированным эрмитовым расширением в направлении любой лагранжевой плоскости в этой точке проходит единственное s-лагранжево подмногообразие тогда и только тогда, когда это эрмитово расширение является комплексной пространственной формой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 1 утверждение теоремы 3 вытекает из справедливости аксиомы вполне вещественных плоскостей для эрмитова расширения исходной симплектической структуры. Единственность подмногообразия вытекает из его вполне геодезичности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательства теоремы 2 очевидно следует, что для комплексных пространственных форм утверждения теорем 2 и 3 справедливы без каких-либо ограничений на их размерность.

Пусть $N \subset M^{2n}$ – s-лагранжево подмногообразие почти келерова многообразия, $\mathcal{A}\mathcal{K}$ -структура которого рассматривается как эрмитово расширение симплектической структуры. В этом случае (36) запишется в форме

$$\omega_b^a = \theta_b^a - \sqrt{2}B^{cab}\theta_c. \quad (42)$$

Запишем сужение второй группы структурных уравнений (12) почти келеровой структуры на подмногообразии N . С учетом (42) имеем

$$\begin{aligned} d\theta_b^a - 2dB^{cab} \wedge \omega_c - 2B^{cab}d\omega_c \\ = (\theta_c^a - 2B^{hac}\omega_h) \wedge (\theta_b^c - 2B^{rcb}\omega_r) + (2B^{adh}B_{hbc} + A_{bc}^{ad})\omega^c \wedge \omega_d \\ + B_{bcd}{}^a\omega^c \wedge \omega^d - B^{acd}{}_b\omega_c \wedge \omega_d. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (9₂) и (14), с учетом (37) после необходимых сокращений получим

$$\begin{aligned} d\theta_b^a = \theta_c^a \wedge \theta_b^c + \{(B^{hag}B_{rbg} - B^{rag}B_{hbg}) \\ + \frac{1}{4}(2B^{arg}B_{gbh} - 2B^{ahg}B_{gbr} + A_{bh}^{ar} - A_{br}^{ah}) \\ + \frac{1}{2}(B_{bhr}{}^a - B^{ahr}{}_b + B^{rab}{}_h - B^{hab}{}_r + B^{rabh} - B^{habr}) + B^{cab}B_{chr}\}\theta^h \wedge \theta^r. \end{aligned}$$

С другой стороны, с учетом (27), (32) и вполне геодезичности подмногообразия

$$d\theta_b^a = \theta_c^a \wedge \theta_b^c + \frac{1}{2}\tilde{R}^a{}_{bhr}\theta^h \wedge \theta^r.$$

Следовательно, в ортонормированном репере подмногообразия N

$$\begin{aligned} \tilde{R}^a{}_{bcd} = 2B^{cag}B_{dbg} - 2B^{dag}B_{cbg} + \frac{1}{2}(2B^{adg}B_{gbc} - 2B^{acg}B_{gbd} + A_{bc}^{ad} - A_{bd}^{ac}) \\ + B_{bcd}{}^a - B^{acd}{}_b + B^{dab}{}_c - B^{cab}{}_d + B^{dabc} - B^{cabd} + 2B^{hab}B_{hcd}. \end{aligned} \quad (43)$$

Пусть, в частности, M^{2n} – почти эрмитово многообразие точечно постоянной голоморфной секционной кривизны c . Тогда, подставляя (21) в (43), после упрощений с учетом предложения 1 получим

$$\begin{aligned}\tilde{R}^a{}_{b f d} = & -\frac{c}{4}(\delta_f^a \delta_b^d - \delta_d^a \delta_b^f) + B^{h a f} B_{h b d} - B^{h a d} B_{h b f} + 2B^{h a b} B_{h f d} \\ & + B_{b f d}{}^a - B^a{}_{f d}{}^b + B^{d a b}{}_f - B^{f a b}{}_d + B^{d a b f} - B^{f a b d}.\end{aligned}$$

В частности, пусть M – комплексная пространственная форма голоморфной секционной кривизны c . Тогда в силу предложения 1 и соотношений (14) получаем, что

$$B^{a b f} = B^{a b f}{}_d = B^{a b f d} = B_{a b f} = B_{a b f}{}^d = B_{a b f d} = 0,$$

и, значит,

$$\tilde{R}^a{}_{b f d} = -\frac{c}{4}(\delta_f^a \delta_b^d - \delta_d^a \delta_b^f),$$

т.е. N – пространство постоянной кривизны $c/4$. Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *s -лагранжесвы подмногообразия комплексной пространственной формы голоморфной секционной кривизны c являются пространствами постоянной кривизны $c/4$.*

Хорошо известно [3], что на нечетномерном многообразии M^{2n+1} аналогом симплектической структуры является контактная структура, т.е. дифференциальная 1-форма η ранга $2n + 1$. Эта форма называется также *контактной формой*, а гиперраспределение кег η – *контактным распределением*. Как и для симплектических структур, доказывается, что всякая контактная структура (неоднозначно) достраивается до *контактной метрической структуры*, т.е. совокупности (ξ, η, Φ, g) , где ξ – вектор, Φ – тензор типа $(1, 1)$ (структурный эндоморфизм), $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика, причем

$$\begin{aligned}1) \eta(\xi) = 1, \quad 2) \Phi(\xi) = 0, \quad 3) \eta \circ \Phi = 0, \quad 4) d\eta(X, Y) = \Omega(X, Y), \\ 5) \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi, \quad 6) \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y),\end{aligned}$$

где $X, Y \in X(M)$, $\Omega(X, Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ – 2-форма на M , называемая *фундаментальной формой структуры*. Такую структуру естественно назвать *метрическим расширением* исходной контактной структуры. Если η – форма Киллинга, то контактная метрическая структура называется *K -контактной* [6]. Хорошо известно также [3], что контактное распределение допускает n -мерные интегральные многообразия, называемые *подмногообразиями Лежандра*, и не допускает интегральных многообразий большей размерности. Эти подмногообразия являются естественным аналогом подмногообразий Лагранжа в симплектической геометрии. В частности, такими же рассуждениями, как и для подмногообразий Лагранжа, доказывается, что через каждую точку p контактного многообразия M^{2n+1} в направлении любого подпространства Лежандра (т.е. n -мерного подпространства, аннулирующего контактную форму и ее внешний дифференциал) $L \subset T_p(M)$ проходит подмногообразие Лежандра (это свойство мы называем *полуинтегрируемостью контактного распределения*). Как и в случае симплектических многообразий, доказывается, что подмногообразие Лежандра с начальными данными (p, L) , вообще говоря, не единственно, однако если $\dim M > 5$,

то совокупность таких подмногообразий при любых начальных данных в случае, если метрическое расширение исходной контактной структуры является K -контактной структурой, содержит единственное вполне геодезическое подмногообразие (это свойство мы называем *геодезической интегрируемостью контактного распределения*) тогда и только тогда, когда это расширение является сасакиевой структурой постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны (т.е. постоянной кривизны в двумерных направлениях вида $X \wedge \Phi X$, $X \in \ker \eta$). Заметим, что многообразие, наделенное такой структурой, называется *сасакиевой пространственной формой* [13]. Легко видеть, что контактное распределение *любой* сасакиевой пространственной формы геодезически интегрируемо.

Вполне геодезические подмногообразия Лежандра мы называем *подмногообразиями Блэра*. Подмногообразия Блэра являются, таким образом, контактным аналогом s -лагранжевых подмногообразий симплектического многообразия. Как и для s -лагранжевых подмногообразий, проверяется, что подмногообразия Блэра сасакиевой пространственной формы Φ -голоморфной секционной кривизны c являются пространствами постоянной кривизны $(c + 3)/4$ (этот факт из других соображений был получен в [6]).

Укажем на одну замечательную связь между этими видами подмногообразий. Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие с целочисленной структурной формой Ω . Класс когомологий этой формы является характеристическим классом главного T^1 -расслоения $\pi: P \rightarrow M$ над M (расслоения Бутби–Вана [6]). Это главное расслоение допускает каноническую связность с формой ω такой, что

$$d\omega = \pi^* \Omega \quad (44)$$

(см. [14]). Очевидно, форма ω является контактной структурой на многообразии P , которую мы назовем *канонической* или *горизонтальным поднятием исходной симплектической структуры*. В силу только что сказанного имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *Горизонтальное распределение канонической связности в расслоении Бутби–Вана полунинтегрируемо.*

Естественно называть интегральные подмногообразия горизонтального распределения *горизонтальными подмногообразиями*. Эти подмногообразия есть не что иное, как подмногообразия Лежандра относительно канонической контактной структуры на многообразии P . Из (44) немедленно следует, что проекция $N = \pi(\tilde{N})$ горизонтального подмногообразия $\tilde{N}$ на базу расслоения Бутби–Вана является подмногообразием Лагранжа исходного симплектического многообразия. В таком случае будем называть подмногообразие Лежандра $\tilde{N}$ *горизонтальным поднятием* подмногообразия Лагранжа N .

Эрмитово расширение исходной симплектической структуры многообразия M мы назовем *обобщенной структурой Ходжа*. Оно внутренним образом порождает контактную метрическую структуру на пространстве P расслоения (назовем ее *горизонтальным поднятием обобщенной структуры Ходжа*), контактная форма которой совпадает с формой ω , контактное распределение – с горизонтальным распределением канонической связности, а фундаментальная форма – с формой $\pi^* \Omega$. Более того, легко видеть, что производная Ли индуцированного на P метрического тензора в направлении вектора, дуального контактной форме, равна нулю, т.е. контактная форма

является формой Киллинга, а индуцированная на P контактная метрическая структура – K -контактной структурой [6]. Нетрудно проверить, что обобщенное многообразие Ходжа M будет комплексной пространственной формой голоморфной секционной кривизны s тогда и только тогда, когда пространство расслоения Бутби-Вана над ним будет сасакиевой пространственной формой Φ -голоморфной секционной кривизны $s - 3$. С учетом сделанных замечаний получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Горизонтальное распределение канонической связности в расслоении Бутби-Вана над обобщенным многообразием Ходжа M размерности выше четырех геодезически интегрируемо тогда и только тогда, когда M – комплексная пространственная форма.*

Пусть $N \subset P$ – подмногообразие Блэра. Из определения метрики, индуцированной в пространстве расслоения Бутби-Вана [6], с учетом рассуждений из доказательства теоремы 1, вполне идентичных как в симплектическом, так и в контактном случаях, убеждаемся, что, во-первых, сужение естественной проекции π на подмногообразие Лежандра является (локальной) изометрией; и, во-вторых, это отображение вполне геодезические подмногообразия Лежандра переводит во вполне геодезические подмногообразия Лагранжа, т.е. подмногообразия Блэра – в s -лагранжевы подмногообразия. Таким образом, подмногообразия Блэра являются горизонтальными поднятиями s -лагранжевых подмногообразий. Более того, из определения горизонтального поднятия обобщенной структуры Ходжа [6] следует, что соответствующая K -контактная структура инвариантна относительно действия структурной группы главного T^1 -расслоения, которое, таким образом, подмногообразия Лежандра переводит в подмногообразия Лежандра, а подмногообразия Блэра – в подмногообразия Блэра. Пусть $N \subset M$ – s -лагранжево подмногообразие комплексной пространственной формы, $p \in N$ – произвольная точка, $q \in \pi^{-1}(p)$, $L \subset T_q(P)$ – горизонтальный подъем пространства $T_p(N)$, $\mathcal{P} \subset P$ – максимальное подмногообразие Блэра с начальными данными (q, L) . Рассмотрим подгруппу G структурной группы T^1 расслоения Бутби-Вана, переводящую подмногообразие $\mathcal{P}$ в себя (т.е. группу инвариантности этого подмногообразия). Очевидно, это собственная и, значит, дискретная подгруппа. В силу компактности T^1 эта подгруппа конечна. Орбита каждой точки из $\mathcal{P}$ относительно нее есть не что иное, как пересечение полного прообраза проекции этой точки на базу с $\mathcal{P}$. Пусть U – окрестность точки q в $\mathcal{P}$, сужение на которую отображения π является изометрией. Поскольку π – открытое отображение, подмногообразие $\tilde{N} = \pi(\mathcal{P}) \subset M$ является s -лагранжевым подмногообразием с начальными данными $(p, T_p(N))$, определенным в окрестности $\pi(U)$ точки p . В силу теоремы 3 это подмногообразие совпадает с N в некоторой окрестности W точки p . Рассмотрим $\pi^{-1}(W) \cap \mathcal{P}$. В соответствии со сказанным

$$\pi^{-1}(W) \cap \mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^n W_i,$$

где n – число элементов подгруппы G , причем W_i переводится в W_j действием соответствующей изометрии из G , а $\pi(W_i) = W$ ($i, j = 1, \dots, n$). Ввиду произвола $p \in N$ отображение $\pi: P \rightarrow M$ индуцирует накрытие $\varpi: \mathcal{N} \rightarrow N$, где $\mathcal{N} = \pi^{-1}(N) \cap \mathcal{P}$ – подмногообразие Блэра, которое мы назовем *полным горизонтальным поднятием* s -лагранжева подмногообразия N , $\varpi = \pi|_{\mathcal{N}}$. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 7. Каждое s -лагранжево подмногообразие N комплексной пространственной формы M конечнолистно покрывается некоторым подмногообразием Блэра в расслоении Бутби–Вана над M , являющимся полным горизонтальным поднятием подмногообразия N . При этом группа инвариантности подмногообразия Блэра является подгруппой фундаментальной группы соответствующего s -лагранжева подмногообразия.

СЛЕДСТВИЕ. Каждое односвязное s -лагранжево подмногообразие N комплексной пространственной формы M изометрично некоторому подмногообразию Блэра с тривиальной группой инвариантности в расслоении Бутби–Вана над M , являющемуся полным горизонтальным поднятием подмногообразия N .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [2] Fomenko A. T. Symplectic Geometry (2nd ed.). Adv. Stud. Contemp. Math. V. 5. Amsterdam: Gordon and Breach Publishers, 1995.
- [3] Арнольд В. И. Математические основы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [4] Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 4. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7–139.
- [5] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
- [6] Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Math. V. 509. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
- [7] Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. М.: ИЛ, 1960.
- [8] Kobayashi S., Nomizu K. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981.
- [9] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Math. Pure Appl. 1980. V. 123. № 4. P. 35–58.
- [10] Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНТИ АН СССР, 1986. С. 25–71.
- [11] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geometriae Dedicata. 1994. V. 52. P. 53–85.
- [12] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR -submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geometriae Dedicata. 1994. V. 51. P. 75–104.
- [13] Ishihara I. Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form // Kodai Math. J. 1979. V. 2. P. 171–186.
- [14] Kobayashi S. Principal fibre bundle with the 1-dimensional toroidal group // Tôhoku Math. J. 1956. V. 8. P. 29–45.

Московский педагогический государственный университет

Поступило

16.03.1999

Исправленный вариант

22.05.2000