Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Й. Малешич, Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Группы препятствий к расщеплению в коразмерности 2, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 52–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:46:28

УДК 513.83

ГРУППЫ ПРЕПЯТСТВИЙ К РАСЩЕПЛЕНИЮ В КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Й. Малешич, Ю. В. Муранов, Д. Реповш

В работе рассматривается задача расщепления вдоль подмногообразия коразмерности 2 при некоторых ограничениях на квадрат фундаментальных групп, от которого функториально зависят группы препятствий к расщеплению. Получены новые точные последовательности и коммутативные диаграммы, в которые входят группы Уолла, группы препятствий к расщеплению и группы препятствий к перестройкам для пар многообразий. Рассмотрены примеры вычисления групп препятствий к расщеплению и естественных отображений.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Группы препятствий к расщеплению $LS_{n-q}(F)$ естественно возникают в задаче перестройки подмногообразия $N \subset M$ коразмерности q внутри n -мерного многообразия M . Если коразмерность подмногообразия N больше или равна 3, то группы $LS_{n-q}(F)$ не зависят от многообразия M и совпадают с абстрактными группами препятствий к перестройкам $L_{n-q}(\pi_1(N))$, где $\pi_1(N)$ – фундаментальная группа подмногообразия N , снабженная гомоморфизмом ориентации $w: \pi_1(N) \rightarrow \{\pm 1\}$ (см. [1], [2]).

Рассмотрим простую гомотопическую эквивалентность $f: M \rightarrow Y$ многообразия M в n -мерный геометрический комплекс Пуанкаре Y с подкомплексом X коразмерности q . Соответствующая задача расщепления отображения f вдоль X состоит в деформации f с точностью до гомотопии в такое трансверсальное к X отображение g , что ограничения

$$g|_N: N \rightarrow X$$

и

$$g|_{M \setminus N}: (M \setminus N) \rightarrow (Y \setminus X), \quad N = g^{-1}(X)$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями. Препятствие к расщеплению $\sigma(f, Y)$ лежит в группе $LS_{n-q}(F)$, которая функториально зависит от универсального отталкивающего квадрата F фундаментальных групп с ориентацией

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(Y \setminus X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \pi_1(Y) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

Работа первого и третьего автора выполнена при поддержке Министерства науки и техники Республика Словения, грант № J1-0885-0101-98. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00009.

где ∂U – пространство сферического расслоения нормального расслоения X в Y . При этом группы $LS_{n-q}(F)$ имеют период 4, т.е. $n - q$ можно считать равным $0, 1, 2, 3 \bmod 4$ (см. [1], [2]). Для удобства обозначим группы с ориентациями из квадрата F следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & D \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Группы $LS_*(F)$ входят в следующие коммутативные диаграммы точных последовательностей (см. [1], [2]):

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+q}(C) & \longrightarrow & L_{n+q}(D) & \longrightarrow & LS_{n-1}(F) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & LP_n(F) & & L_{n+q}(C \rightarrow D) & & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & LS_n(F) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow & L_{n+q-1}(C) & \longrightarrow \end{array}, \quad (1.3)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B) & \longrightarrow & L_{n+q+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_{n+q+1}(F) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & L_{n+q+1}(A \rightarrow B) & & LS_n(F) & & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & L_{n+q+2}(F) & \longrightarrow & LS_n(\Psi) & \longrightarrow & L_n(B) & \longrightarrow \end{array}, \quad (1.4)$$

где $LP_*(F)$ – группы препятствий к перестройкам по паре многообразий, а Ψ обозначает универсальный квадрат групп

$$\Psi = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Заметим, что отображение $LS_*(\Psi) \rightarrow LS_*(F)$ в диаграмме (1.4) индуцировано естественным отображением квадратов $\Psi \rightarrow F$.

В случае коразмерности 1 методы исследования задачи расщепления существенно различаются в двух случаях. Достаточно полные результаты в случае двустороннего подмногообразия N с связным или несвязным дополнением приведены в работах [1]–[3].

В случае одностороннего подмногообразия коразмерности $q = 1$, когда горизонтальные отображения в квадрате F являются изоморфизмами, группы $LS_*(F)$ совпадают с группами Браудера–Ливси $LN_*(A \rightarrow B)$, которые являются группами Уолла кольца с антиструктурой (см., например, [2], [3]). Используя спектры Квинна–Раницкого, в работах [4]–[6] для случая одностороннего подмногообразия и эпиморфных горизонтальных отображений в квадрате F получены дополнительно точные последовательности и коммутативные диаграммы, устанавливающие тесную связь между группами $LS_*(F)$, $LP_*(F)$ и группами Уолла.

Данная работа посвящена исследованию групп препятствий к расщеплению в случае коразмерности $q = 2$. Достаточно подробный обзор имеющихся в этом случае результатов и приложений теории расщепления к геометрическим задачам приведен в работах [2], [7]. Мы используем в основном технику, развитую для случая односторонних подмногообразий в работах [4]–[6], для исследования проблемы расщепления в коразмерности 2. При некоторых естественных ограничениях на квадрат F в этом случае получены новые точные последовательности и диаграммы, в которые входят группы

$LS_*(F)$ и $LP_*(F)$. В работе также вычислены некоторые группы препятствий к расщеплению и естественные отображения в диаграммах, представляющие интерес для геометрических приложений. В частности, в работе рассмотрен пример нетривиального отображения $\Theta: L_n(D) \rightarrow LS_{n-3}(F)$, которое является аналогом инварианта Браудера–Ливси (см. [8], [9]). Следовательно, имеет смысл определить аналог итерированных инвариантов Браудера–Ливси (см. [8]), используя последовательность вложенных подмногообразий коразмерности 2. Определена также спектральная последовательность хирургии, базирующаяся на последовательности подмногообразий коразмерности 2. Формально конструкция этой спектральной последовательности совпадает с конструкцией из работы [10]. При этом остается открытым вопрос вычисления дифференциалов и существования нетривиальных дифференциалов высоких порядков.

Заметим также, что группы L_* , LS_* , LN_* и LP_* можно рассматривать с тремя различными декорациями “ s ”, “ h ”, “ p ” (см. [1], [2]). В данной работе мы будем рассматривать только случай групп с декорациями “ s ”, который соответствует задаче перестройки до простой гомотопической эквивалентности. Все результаты третьего и пятого параграфа имеют место также для групп с декорациями “ h ” и “ p ”. Далее все группы предполагаются снабженными декорацией “ s ”, если не оговорено противное.

2. Группы препятствий к расщеплению и группы Уолла. Напомним геометрическое определение групп препятствий к расщеплению в случае коразмерности 2 [1] и связь групп препятствий к расщеплению с группами Уолла колец с антиструктурами.

Предположим, что для универсального отталкивающего квадрата групп F (1.2) задано универсальное расслоение $p: X \rightarrow Y$ со слоем S^1 , индуцирующее отображение фундаментальных групп $A \rightarrow B$. Обозначим через Z топологическое пространство $K(C, 1)$. Предполагается, что цилиндр M_p отображения p пересекается с $K(C, 1)$ по подпространству X . Тогда фундаментальная группа топологического пространства $M_Y \cup Z$ равна D . Обозначим через $K(F)$ триаду $(M_Y \cup Z; M_Y, Z; X)$. Группа $LS_n(F)$ ($n \geq 5$) является группой кобордизмов отображений триад $(W; N, S)$ в триаду $K(F)$, совместимых с гомоморфизмом ориентации.

Здесь W – многообразие размерности $n+2$, N – конечный комплекс Пуанкаре размерности n , заданный вместе с вложением Пуанкаре $N \rightarrow W$. По определению [1] вложение Пуанкаре состоит из расслоения $p: E \rightarrow N$ со слоем S^1 , конечной пары Пуанкаре (S, E) и простой гомотопической эквивалентности $h: S \cup M_p \rightarrow W$, где $S \cap M_p = E$. В случае многообразия с краем и пары Пуанкаре, как обычно, предполагается, что вложение Пуанкаре уже сглажено на крае.

Согласно [1] имеет место точная последовательность, функториально зависящая от квадрата F ,

$$\longrightarrow L_{n+1}(B) \longrightarrow L_{n+3}(C \rightarrow D) \longrightarrow LS_n(F) \longrightarrow L_n(B) \longrightarrow, \quad (2.1)$$

в которой отображение $L_{n+1}(B) \rightarrow L_{n+3}(C \rightarrow D)$ является композицией трансфера $p^!$, индуцированного расслоением p , и естественного отображения относительных групп Уолла, индуцированного горизонтальными отображениями квадрата F :

$$L_{n+1}(B) \xrightarrow{p^!} L_{n+3}(A \rightarrow B) \longrightarrow L_{n+3}(C \rightarrow D). \quad (2.2)$$

Отметим, что точная последовательность (2.1) входит в коммутативные диаграммы (1.3), (1.4).

Рассмотрим квадрат Ψ (1.5), который соответствует паре многообразий (U, X) коразмерности 2, получаемой из пары (Y, X) , где U – трубчатая окрестность X в Y . Для расслоения

$$\xi: S^1 \rightarrow \partial U \rightarrow X$$

имеет место следующая часть точной последовательности расслоения:

$$\Pi: \mathbb{Z} \xrightarrow{l} A \xrightarrow{p} B \rightarrow 1. \quad (2.3)$$

Пусть $w_1: B \rightarrow \{\pm 1\}$ обозначает первый класс Штифеля–Уитни расслоения ξ , а пара (Π, w_1) обозначает точную последовательность (2.3) с гомоморфизмом w_1 . Тогда согласно [2]

$$gtg^{-1} = t^{w_1 p(g)}, \quad t = l(1), \quad g \in A.$$

Обозначим через $w_Y: B \rightarrow \{\pm 1\}$ гомоморфизм ориентации, заданный на пространстве Y . Тогда в качестве гомоморфизма ориентации на пространстве U , которое гомотопически эквивалентно X , берется ограничение $w_Y|_{\pi_1(U)}$. Гомоморфизм ориентации на подпространстве X определяется условием (см. [1], [2])

$$w^\xi = w_Y w: B \rightarrow \{\pm 1\}.$$

Таким образом, ориентация на левой группе $B = \pi_1(X)$ в квадрате Ψ может быть отлична от ориентации на правой группе $B = \pi_1(U)$. Чтобы избежать недоразумений, мы в дальнейшем будем обозначать левую группу B с указанной ориентацией w^ξ через B^ξ . В частности, точная последовательность (2.1) для квадрата Ψ имеет вид

$$\longrightarrow L_{n+1}(B^\xi) \longrightarrow L_{n+3}(A \rightarrow B) \longrightarrow LS_n(\Psi) \longrightarrow L_n(B^\xi) \longrightarrow . \quad (2.4)$$

Заметим, что в коразмерности 2 группы $LS_n(\Psi)$ по-прежнему обозначаются через $LN_n(A \rightarrow B)$, так же как и группы Браудера–Ливси.

Согласно [1], [2] существует универсальное S^1 -расслоение

$$S^1 \longrightarrow E \longrightarrow V, \quad (2.5)$$

для которого участок точной последовательности расслоения

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(V) \longrightarrow 1 \quad (2.6)$$

совпадает с точной последовательностью Π и первый класс Штифеля–Уитни совпадает с w_1 .

Если заданы две пары (Π, w) и (Π', w') , то естественно определяется морфизм

$$(f, g): (\Pi, w) \rightarrow (\Pi', w')$$

в категории таких пар (см. [2]), как коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 1 \\ \parallel & & \downarrow f & & \downarrow g & & \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & 1 \end{array}, \quad (2.7)$$

в которой отображение g коммутирует с гомоморфизмами ориентации $w'g = w$. Если пары (Π, w) , (Π', w') соответствуют некоторым S^1 -расслоениям, то любой морфизм пар $(f, g): (\Pi, w) \rightarrow (\Pi', w')$ индуцируется морфизмом универсальных S^1 -расслоений (см. [1], [2]).

В общем случае (см. [11]–[13]) группы Уолла определены для произвольного кольца с антиструктурой (R, α, u) , где R – кольцо с 1, $u \in R$ – обратимый элемент кольца, а $\alpha: R \rightarrow R$ – такой антиавтоморфизм, что

$$\alpha(u) = u^{-1}, \quad \alpha^2(x) = u x u^{-1} \quad \forall x \in R.$$

Согласно [2] для случая подмногообразия коразмерности 2 группы $LN_*(A \rightarrow B)$ являются группами Уолла группового кольца $\mathbb{Z}A$ с некоторой антиструктурой. Напомним необходимые результаты из работы [2].

Пусть (Π, w) – точная последовательность (2.3) вместе с гомоморфизмом $w_1 = w$. Зададим гомоморфизм $w_B: B \rightarrow \{\pm 1\}$, геометрически соответствующий ориентации w_U объемлющего многообразия. В этом случае определена антиструктура $(\mathbb{Z}A, \beta, t)$ на групповом кольце $\mathbb{Z}A$ следующим образом:

$$\beta: \sum_{g \in A} n_g g \rightarrow \sum_{wp(g)=+1} n_g w_B p(g) g^{-1} - \sum_{wp(g)=-1} n_g w_B p(g) t g^{-1} \quad \forall g \in A, \quad t = l(1). \quad (2.8)$$

При этом имеет место индуцированный гомоморфизмом p морфизм антиструктур

$$(\mathbb{Z}A, \beta, t) \rightarrow (\mathbb{Z}B, \alpha^\xi, 1),$$

где α^ξ обозначает стандартную инволюцию

$$\sum n_g g \rightarrow \sum n_g w^\xi(g) g^{-1}, \quad n_g \in \mathbb{Z}, \quad g \in B,$$

в групповом кольце $\mathbb{Z}B$ для гомоморфизма ориентации $w^\xi: B \rightarrow \{\pm 1\}$.

Согласно [2] имеет место изоморфизм

$$LN_n(A \rightarrow B, w_B) \cong L_n(\mathbb{Z}A, \beta, t). \quad (2.9)$$

Отметим, что морфизм $A \rightarrow B$ в обозначениях групп LN_* для задачи расщепления в коразмерности 2 является частью точной последовательности (2.3), заданной вместе с гомоморфизмом ориентации w . Таким образом группы LN_* в формуле (2.9) зависят функториально от тройки $((\Pi, w), w_B)$.

В случае квадрата Ψ , когда расслоение $\partial U \rightarrow X$ тривиально, имеет место изоморфизм $A = B \times \mathbb{Z}$ и согласно [1], [7]

$$LS_n(\Psi) = LN_n(A \rightarrow B) = H^{n+1}(Wh(B)),$$

где $H^{n+1}(Wh(B))$ когомологии Тейта группы Уайтхеда группы B .

3. Естественные отображения. В данном пункте мы рассматриваем группы $LS_*(F)$ в коразмерности 2. При некоторых естественных ограничениях на квадрат F получены новые диаграммы и точные последовательности, связывающие указанные группы с группами Уолла и группами LN_* . Для случая односторонних подмногообразий коразмерности 1 аналогичные результаты получены в работах [4]–[6].

Рассмотрим квадрат F (1.2), соответствующий некоторой задаче расщепления в коразмерности 2. Обозначим группы и отображения следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B^\xi & \xrightarrow{g} & D \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Все группы, входящие в квадрат F , снабжены ориентациями. Начиная с этого места, мы принимаем следующее соглашение об ориентациях этих групп. Мы фиксируем некоторый гомоморфизм ориентации $w: D \rightarrow \{\pm 1\}$ на группе D . Композиция w с естественными отображениями из квадрата F задает ориентации на всех группах квадрата. Эти ориентации мы будем обозначать через w и не будем включать в обозначения. Кроме этого, согласно п. 2 мы обозначаем через B^ξ группу B с ориентацией w^ξ . Обозначим через (Π, w_1) точную последовательность

$$\Pi: \mathbb{Z} \rightarrow A \xrightarrow{i} B \rightarrow 1, \quad (3.2)$$

задаваемую левым столбцом квадрата F , с ориентацией $w_1 = w^\xi w$.

Пусть для квадрата F выполняются следующие условия:

- i) отображение j в квадрате F является эпиморфизмом;
- ii) существует пара (Π', w'_1) :

$$\Pi': \mathbb{Z} \rightarrow C \xrightarrow{j} D \rightarrow 1, \quad (3.3)$$

такая, что пара отображений (f, g) дает морфизм $(\Pi, w_1) \rightarrow (\Pi', w'_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Универсальный отталкивающий квадрат групп F для задачи расщепления в коразмерности 2, для которого выполнены условия i), ii), называется *геометрической диаграммой в коразмерности 2*.

Понятие геометрической диаграммы было введено в работе [14] для квадрата F , возникающего в задаче расщепления вдоль одностороннего подмногообразия, когда горизонтальные отображения являются эпиморфизмами. В частности, горизонтальные отображения задавали морфизм квадратичных расширений (см. [4]–[6]). Таким образом, приведенное определение сохраняет аналогию с коразмерностью 1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предположении эпиморфности j для выполнения условия ii) достаточно существования гомоморфизма w'_1 на группе D , для которого $w'_1 g = w_1$. В частности, если j – эпиморфизм, условие ii) автоматически выполнено при $w_1 \equiv 1$.

Для геометрической диаграммы F существуют естественные отображения

$$\Psi \xrightarrow{\mathcal{S}} F \xrightarrow{\mathcal{P}} \Phi$$

универсальных отталкивающих квадратов групп с ориентацией

$$\left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B^\xi & \longrightarrow & B \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B^\xi & \xrightarrow{g} & D \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ D^\xi & \longrightarrow & D \end{array} \right), \quad (3.4)$$

где ориентация на группе D^ξ задается как $w^\xi = w'_1 w: D^\xi \rightarrow \{\pm 1\}$.

Аналогично (2.9) существует антиструктура $(\mathbb{Z}C, \beta', t')$, для которой имеет место изоморфизм

$$LN_n(C \rightarrow D, w) \cong L_n(\mathbb{Z}C, \beta', t').$$

Композиция отображений $\mathcal{P}\mathcal{S}$ задает морфизм антиструктур $(\mathbb{Z}B, \beta, t) \rightarrow (\mathbb{Z}C, \beta', t')$. Следовательно, определены относительные группы

$$LN_n(\Psi \rightarrow \Phi) \cong L_n(\mathbb{Z}B \rightarrow \mathbb{Z}C, \beta, t),$$

входящие в длинную точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow LN_n(A \rightarrow B, w) \longrightarrow LN_n(C \rightarrow D, w) \longrightarrow LN_n(\Psi \rightarrow \Phi) \longrightarrow \cdots. \quad (3.5)$$

В дальнейшем мы не будем указывать ориентацию w в группах LN там, где из контекста ясно, какая ориентация рассматривается.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – геометрическая диаграмма групп, соответствующая паре многообразий в задаче расщепления для коразмерности 2. Имеют место следующие коммутативные диаграммы точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi) & \longrightarrow & L_{n+3}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & L_{n+1}(D^\xi) & & LS_n(F) & & \\ \longrightarrow & LN_{n+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & L_n(B^\xi) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.6)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & LN_{n+1}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & L_{n+3}(F) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & LN_n^{\text{rel}} & & LS_n(F) & & \\ \longrightarrow & L_n(F) & \longrightarrow & LN_n(A \rightarrow B) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.7)$$

где через LN_n^{rel} обозначены относительные группы $LN_n(\Psi \rightarrow \Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют симплициальные Ω -спектры, гомотопические группы которых изоморфны соответствующим L либо LN группам (см., например, [13]). Согласно [1] отображение $p_0: L_{n+1}(B^\xi) \rightarrow L_{n+3}(A \rightarrow B)$ из последовательности (2.2) реализуется на уровне спектров. Поскольку естественное отображение относительных групп также реализуется на уровне спектров (см. [1], [13]), мы получаем расслоение спектров

$$\mathbb{L}(B^\xi) \longrightarrow \Omega^2 \mathbb{L}(C \rightarrow D). \quad (3.8)$$

Для гомотопических групп гомотопического слоя $\mathbb{L}\mathbb{S}(F)$ отображения (3.8) имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\mathbb{L}\mathbb{S}(F)) = LS_n(F).$$

Более того, точная последовательность (2.1) является гомотопической длинной точной последовательностью расслоения спектров (3.8). Отображение $\mathcal{P}$ индуцирует отображение соответствующих расслоений. Таким образом, мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LS}(F) & \longrightarrow & \mathbb{L}(B^\xi) \\ \downarrow \mathbb{P} & & \downarrow \\ \mathrm{LN}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \mathbb{L}(D^\xi) \end{array}, \quad (3.9)$$

в которой вертикальные отображения индуцированы $\mathcal{P}$. Кослои горизонтальных отображений в диаграмме (3.9) гомотопически эквивалентны $\Omega^2 \mathbb{L}(C \rightarrow D)$, и отображение $\mathcal{P}$ индуцирует их эквивалентность. Таким образом, квадрат (3.9) является универсальным квадратом спектров, и, следовательно, кослои вертикальных отображений также гомотопически эквивалентны спектру $\mathbb{L}(B^\xi \rightarrow D^\xi)$. Теперь гомотопические длинные точные последовательности отображений из квадрата (3.9) дают коммутативную диаграмму (3.6).

Рассмотрим диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LN}(A \rightarrow B) & \xrightarrow{\mathbb{S}} & \mathrm{LS}(F) \longrightarrow \Omega^3 \mathbb{L}(F) \\ & & \downarrow \mathbb{P} \\ & & \mathrm{LN}(C \rightarrow D) \end{array},$$

в которой отображения $\mathbb{P}$ и $\mathbb{S}$ индуцированы отображениями $\mathcal{P}$ и $\mathcal{S}$ универсальных квадратов соответственно. Переходя к спектрам в коммутативной диаграмме (1.4), мы получаем, что гомотопический кослой отображения $\mathbb{S}$ гомотопически эквивалентен спектру $\Omega^3 \mathbb{L}(F)$.

Гомотопический кослой композиции $\mathbb{P}\mathbb{S}$ является спектром $\mathrm{LN}(\Psi \rightarrow \Phi)$, и точная последовательность (3.5) является точной последовательностью расслоения $\mathbb{P}\mathbb{S}$. Таким образом, мы получаем универсальный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{LS}(F) & \longrightarrow & \Omega^3 \mathbb{L}(F) \\ \downarrow \mathbb{P} & & \downarrow \\ \mathrm{LN}(C \rightarrow D) & \longrightarrow & \mathrm{LN}(\Psi \rightarrow \Phi) \end{array}.$$

Переходя к гомотопическим длинным точным последовательностям расслоений для отображений полученного квадрата, мы получаем коммутативную диаграмму точных последовательностей (3.7).

Диаграммы, полученные в теореме 1, аналогичны диаграммам (22.1), (22.2) из работы [4].

Теперь мы опишем связи между группами LP_* для квадратов Ψ , F , Φ . Мы по-прежнему предполагаем, что F – геометрическая диаграмма групп. Рассмотрим диаграммы (1.3) для квадратов Ψ и Φ . Мы получаем, что группы $LP_*(\Psi)$, $LP_*(\Phi)$ входят в точные последовательности

$$\cdots \longrightarrow LP_n(\Psi) \longrightarrow L_n(B^\xi) \longrightarrow L_{n+1}(A) \longrightarrow LP_{n-1}(\Psi) \longrightarrow \cdots, \quad (3.10)$$

$$\cdots \longrightarrow LP_n(\Phi) \longrightarrow L_n(D^\xi) \longrightarrow L_{n+1}(C) \longrightarrow LP_{n-1}(\Phi) \longrightarrow \cdots. \quad (3.11)$$

Таким образом, группы $LP_*(\Psi)$ являются относительными группами для композиции

$$L_{n+1}(B^\xi) \xrightarrow{p^!} L_{n+3}(A \rightarrow B) \xrightarrow{\partial} L_{n+2}(A)$$

трансфера $p^!$ и отображения

$$\partial: L_{n+3}(A \rightarrow B) \longrightarrow L_{n+2}(A)$$

из относительной точной последовательности L -групп для отображения $A \rightarrow B$ (см. [2]). Поскольку отображения $p^!$ и ∂ реализуются на уровне спектров (см. [1], [2]), мы можем определить спектр $\mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi)$ как гомотопический слой отображения спектров

$$\mathbb{L}(B) \longrightarrow \Omega \mathbb{L}(A), \quad (3.12)$$

индуцирующего отображение $\partial p^!$. Тогда имеет место изоморфизм

$$\pi_n(\mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi)) \cong LP_n(\Psi),$$

и точная последовательность (3.10) является гомотопической длинной точной последовательностью расслоения (3.12). Аналогично определяется спектр $\mathbb{L}\mathbb{P}(\Phi)$. В частности, определены относительные группы $LP_*(\Psi \rightarrow \Phi)$, входящие в длинную точную последовательность

$$\cdots \longrightarrow LP_n(\Psi) \longrightarrow LP_n(\Phi) \longrightarrow LP_n(\Psi \rightarrow \Phi) \longrightarrow \cdots. \quad (3.13)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – геометрическая диаграмма групп, соответствующая паре многообразий в задаче расщепления для коразмерности 2. Имеют место следующие коммутативные диаграммы точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi) & \longrightarrow & L_{n+2}(C) & \longrightarrow & L_{n+2}(A \rightarrow C) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & & L_{n+2}(A) & & LP_n(F) & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & L_{n+3}(A \rightarrow C) & \longrightarrow & LP_n(\Psi) & \longrightarrow & L_n(B^\xi) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.14)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & L_n(B^\xi) & \longrightarrow & L_{n+1}(C) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & & LP_n(F) & & L_n(D^\xi) & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & L_{n+2}(C) & \longrightarrow & LP_n(\Phi) & \longrightarrow & L_n(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.15)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & L_{n+2}(A \rightarrow C) & \longrightarrow & LP_{n-1}(\Psi) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & & LP_n(F) & & LP_n^{\text{rel}} & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & LP_n(\Psi) & \longrightarrow & LP_n(\Phi) & \longrightarrow & L_n(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.16)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & L_{n+1}(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow & LP_n(F) & \longrightarrow & L_{n+2}(D) & \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & & LS_n(F) & & LP_n(\Phi) & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ \longrightarrow & L_{n+3}(D) & \longrightarrow & LN_n(C \rightarrow D) & \longrightarrow & L_n(B^\xi \rightarrow D^\xi) & \longrightarrow \end{array}, \quad (3.17)$$

где через LP_n^{rel} обозначены относительные группы $LP_n(\Psi \rightarrow \Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из диаграммы (1.3), определяется спектр $\mathbb{LP}(F)$. Таким образом, имеет место универсальный квадрат спектров, гомотопические длинные точные последовательности отображений которого дают диаграмму (1.3). Рассмотрим гомотопически коммутативный квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega^2 \mathbb{L}(A) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(\Psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^2 \mathbb{L}(C) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(F) \end{array},$$

в котором вертикальные отображения индуцированы $\mathcal{S}$, а горизонтальные отображения – расслоения спектров для отображений из диаграммы (1.3). Этот квадрат универсален, так как кослои горизонтальных отображений естественно гомотопически эквивалентны и эквивалентны спектру $\mathbb{L}(B^\xi)$. Следовательно, кослои вертикальных отображений гомотопически эквивалентны спектру $\Omega^2 \mathbb{L}(A \rightarrow C)$. Гомотопические длинные точные последовательности отображений этого квадрата дают диаграмму (3.14). Оставшиеся диаграммы получаются аналогично. Теорема доказана.

Диаграммы, полученные в теореме 2, аналогичны диаграммам (3.6) из работы [6]. Существует также коммутативная диаграмма другого типа, связывающая группы LS_* и LP_* в рассматриваемом случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В условиях теоремы 2 имеет место следующая коммутативная диаграмма, строки и столбцы которой являются точными последовательностями:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & LN_n(A \rightarrow B) & \longrightarrow & LP_n(\Psi) & \longrightarrow & L_{n+2}(B) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & LS_n(F) & \longrightarrow & LP_n(F) & \longrightarrow & L_{n+2}(D) & \longrightarrow \cdots \quad (3.18) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \longrightarrow & L_{n+3}(F) & \longrightarrow & L_{n+2}(A \rightarrow C) & \longrightarrow & L_{n+2}(B \rightarrow D) & \longrightarrow \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\mathcal{S}: \Psi \rightarrow F$ в (3.4) индуцирует гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{LN}(A \rightarrow B) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(\Psi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{LS}(F) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(F) \end{array}.$$

Рассмотрение гомотопических длинных точных последовательностей для отображений дает коммутативную диаграмму (3.18).

Диаграммы, полученные в теоремах 1, 2 и предложении 1, вместе с диаграммами (1.3), (1.4) из работы [1] дают очень эффективные методы вычисления групп препятствий к расщеплению и естественных отображений. Так в работе [15] рассматриваются квадраты геометрических антиструктур, естественно обобщающие квадраты групп в случае одностороннего подмногообразия. Для случая конечных 2-групп в работе [15] полностью вычислены группы LS_* и LP_* в проективной теории и отображения в диаграммах.

4. Вычисление некоторых LS_* -групп. В случае односторонних подмногообразий один из подходов к решению проблемы реализуемости элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий базируется на использовании диаграммы (1.3). При этом вопрос о реализуемости тесно связан с вопросом о действии групп Уолла на множестве гомотопических триангуляций (сглаживаний) данного многообразия (см., например, [8]). При этом диаграмма (1.3) рассматривается для квадрата Ψ (1.5), в котором горизонтальные отображения являются изоморфизмами, а вертикальные отображения – вложения индекса 2. Группы $LS_*(\Psi)$ в этом случае совпадают с группами Браудера–Ливси $LN_*(A \rightarrow B)$. Во многих случаях такой подход позволяет получить окончательные результаты (см. [8], [9], [16]–[18]).

В этом пункте мы описываем аналогичные методы, которые используют подмногообразия коразмерности 2, и вычисляем группы препятствий к расщеплению для некоторых пар многообразий.

Напомним сначала необходимые результаты из работ [1], [2]. *Гомотопической триангуляцией* или *s-триангуляцией* простого n -мерного геометрического комплекса Пуанкаре Y называется простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow Y$, где M – компактное n -мерное триангулированное топологическое многообразие. До конца этого пункта мы предполагаем, что $n \geq 5$. Две триангуляции $f_i: M_i \rightarrow Y$, $i = 1, 2$, эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$ такой, что отображения f_1 и $f_2 h$ гомотопны. Множество классов эквивалентности s -триангуляций комплекса Y обозначается $S^{\text{TOP}}(Y)$.

Предположим, что Y уже является триангулированным топологическим многообразием размерности n ; тогда имеет место точная последовательность Сулливана

$$\xrightarrow{\sigma_*} L_{n+1}(\pi_1(Y)) \longrightarrow S^{\text{TOP}}(Y) \longrightarrow [Y, G/\text{TOP}] \xrightarrow{\sigma_*} L_n(\pi_1(Y)). \quad (4.1)$$

Мы не указываем гомоморфизм w в обозначениях L -групп, если это не вызывает недоразумений. Из построения точной последовательности (4.1) следует, что элементы группы $L_n(\pi_1(Y))$, лежащие в образе отображения σ_* , реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий (см. [1], [2]). При этом (см. [2]) если $X \subset Y$ замкнутое подмногообразие коразмерности $q = 1, 2$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\sigma_*} L_{n+1}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & S^{\text{TOP}}(Y) & \longrightarrow & [Y, G/\text{TOP}] & \xrightarrow{\sigma_*} & L_n(\pi_1(Y)) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \longrightarrow L_{n+1}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{\Theta} & LS_{n-q}(F) & \longrightarrow & LP_{n-q}(F) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(Y)) \end{array}, \quad (4.2)$$

нижняя строка которой является точной последовательностью из диаграммы (1.3). Из диаграммы (4.2) немедленно следует, что элементы $x \in L_{n+1}(\pi_1(Y))$, для которых $\Theta(x) \neq 0$, действуют нетривиально на множестве гомотопических триангуляций

$S^{\text{TOP}}(Y)$. Кроме этого, все элементы, лежащие в образе σ_* , лежат в образе отображения

$$LP_{n-q}(F) \longrightarrow L_n(\pi_1(Y)),$$

входящего в диаграммы (1.3) и (3.17).

В случае пары Браудера–Ливси (одностороннее подмногообразие коразмерности 1, $B = D$) отображение

$$\Theta: L_n(D) \longrightarrow LN_{n-2}(A \rightarrow B)$$

задает инвариант Браудера–Ливси $\Theta(x)$, являющийся первым препятствием к реализуемости замкнутыми многообразиями (см. [8], [16]). В этом случае если $\Theta(x) \neq 0$, то элемент x не реализуется нормальными отображениями замкнутых многообразий и действует нетривиально на любую гомотопическую триангуляцию многообразия M с $\pi_1(M) = D$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим естественное вложение проективных пространств $S^1 = RP^1 \subset RP^3$.

ЛЕММА 1. *Нормальное расслоение подмногообразия $S^1 \subset RP^3$ тривиально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразия S^1 и RP^3 параллелизуемы. Обозначим через ν_{S^1} нормальное расслоение S^1 в RP^3 . Пусть τ_{S^1} обозначает касательное расслоение к S^1 , а $\tau_{RP^3} \cong \varepsilon^3$ – касательное расслоение к RP^3 . Имеет место изоморфизм

$$\nu_{S^1} \oplus \tau_{S^1} \cong \tau_{RP^3} \cong \varepsilon^3.$$

Так как $\tau_{S^1} \cong \varepsilon^1$, мы получаем $\nu_{S^1} \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^3$.

Теперь мы можем воспользоваться следующим результатом работы [19]. Пусть ξ^m – m -мерное векторное расслоение над CW -комплексом K размерности $k < m$. Тогда ξ^m будет тривиальным векторным расслоением тогда и только тогда, когда расслоение $\xi^m \oplus \varepsilon^1$ тривиально. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $S^1 \rightarrow RP^3$ – стандартное вложение проективных пространств, индуцирующее эпиморфизм фундаментальных групп. Тогда имеет место изоморфизм $\pi_1(RP^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в качестве модели $RP^3 \setminus S^1$ замкнутый трехмерный шар D^3 , из которого выброшен отрезок, соединяющий полюсы, и антиподальные точки границы отождествлены. Полученное пространство гомотопически эквивалентно замкнутому двумерному шару D^2 с выколотым центром и отождествленными антиподальными точками границы. Следовательно, $\pi_1(RP^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Умножим пару (RP^3, S^1) на односвязное многообразие M высокой размерности. Мы получим пару многообразий $(Y, X) = (RP^3 \times M, S^1 \times M)$ коразмерности 2. Из лемм 1, 2 следует, что универсальный отталкивающий квадрат групп F в задаче расщепления вдоль подмногообразия $S^1 \times M$ равен

$$F = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}/2 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Ориентация всех групп в квадрате F тривиальна, как следует из леммы 1. Отображения j и g являются приведениями по модулю 2. Отображение f задается формулой

$f(a, b) = (a - 2b)$, как следует из универсальности квадрата и леммы 2. Легко проверить, что квадрат F является геометрической диаграммой в коразмерности 2.

Теперь мы вычислим некоторые группы LS_* для квадрата (4.3). В качестве следствий мы приводим некоторые результаты, представляющие геометрический интерес.

Известны (см. [1]) все группы Уолла групп из квадрата (4.3). Имеют место изоморфизмы:

$$\begin{aligned} L_n(\mathbb{Z}) &= \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2, & n = 2, 3 \bmod 4, \end{cases} \\ L_n(\mathbb{Z}/2) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 0 \bmod 4, \\ 0, & n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2, & n = 2, 3 \bmod 4, \end{cases} \\ L_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) &= \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, & n = 0, 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & n = 3 \bmod 4. \end{cases} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть F обозначает геометрическую диаграмму групп (4.3) в коразмерности 2. Тогда мы имеем следующие изоморфизмы:

$$LS_n(F) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n = 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \bmod 4. \end{cases}$$

Группы $LS_3(F)$ и $LS_0(F)$ входят в точную последовательность

$$0 \longrightarrow LS_0(F) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow LS_3(F) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим длинную точную последовательность

$$\longrightarrow LS_n(\Psi) \longrightarrow LS_n(F) \longrightarrow L_{n+3}(F) \longrightarrow$$

из (1.4). Левое вертикальное отображение в квадрате F является проекцией. Следовательно, согласно [1] имеет место изоморфизм

$$LS_n(\Psi) = LN_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}) \cong H^{n+1}(Wh(\mathbb{Z})),$$

где $H^{n+1}(Wh(\mathbb{Z}))$ – когомологии Тейта группы Уайтхеда (см. [1]). Так как группа Уайтхеда $Wh(\mathbb{Z})$ тривиальна, мы получаем изоморфизмы

$$LS_n(F) \cong L_{n+3}(F) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4.$$

Группы $L_n(F)$ входят в коммутативную диаграмму точных последовательностей (см. [1] и [2])

$$\begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & L_n(A) & \xrightarrow{f_*} & L_n(C) & \longrightarrow & L_n(f) & \longrightarrow \\ & \downarrow i_* & & \downarrow j_* & & \downarrow & \\ \longrightarrow & L_n(B) & \xrightarrow{g_*} & L_n(D) & \longrightarrow & L_n(g) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \longrightarrow & L_n(i) & \longrightarrow & L_n(j) & \longrightarrow & L_n(F) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \end{array} \quad , \quad (4.4)$$

где отображения f_* , g_* , i_* и j_* индуцированы соответствующими отображениями из квадрата F . Отображения i_* , f_* имеют правые обратные. Следовательно, отображения i_* , f_* задают проекции групп Уолла на прямое слагаемое в любой размерности. Таким образом, имеют место изоморфизмы

$$L_n(i) \cong L_n(f) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n = 0, 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}, & n = 2, 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Отображения g_* , j_* и являются изоморфизмами в размерностях 2, 3 согласно работе [1]. В размерности 1 они тривиальны, так как группа $L_1(\mathbb{Z}/2)$ тривиальна. В размерности 0 отображения g_* и j_* будут вложениями на прямое слагаемое, так как они имеют правые обратные отображения (см. [5]). Ясно, что $L_n(j) \cong L_n(g)$. Теперь рассмотрим относительно точную последовательность L -групп для отображения j :

$$\begin{array}{ccccccc} L_0(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{mono}} & L_0(\mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & L_0(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & L_3(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} L_3(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 \\ & & & & \longrightarrow & L_3(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow L_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} L_2(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow L_2(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\text{epi}} L_1(\mathbb{Z}) \\ & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} \end{array} \quad .$$

Отсюда следуют изоморфизмы

$$L_n(g) \cong L_n(j) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, 2 \bmod 4, \\ 0, & n = 1, 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Из диаграммы (4.4) получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} L_1(g) & \longrightarrow & L_1(F) & \longrightarrow & L_0(f) & \longrightarrow & L_0(g) \xrightarrow{\text{mono}} L_0(F) \xrightarrow{\text{epi}} L_3(f) \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ 0 & & \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array} \quad ,$$

в которой отображение $L_0(F) \rightarrow L_3(f)$ эпиморфно, так как группа $L_3(g)$ тривиальна. Следовательно, $L_1(F) \cong \mathbb{Z}/2$ и $L_0(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. В силу изоморфизма $LS_n(F) \cong L_{n+3}(F) \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4$ получаем утверждение теоремы при $n = 1, 2$. Точная последовательность теоремы теперь следует из коммутативной диаграммы (1.3).

СЛЕДСТВИЕ 1. Для квадрата (4.3) имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} LP_1(F) &\cong LP_2(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \\ LP_3(F) &\cong LS_3(F), \quad LP_0(F) \cong LS_0(F) \oplus \mathbb{Z}/2. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть диаграмму (1.3) для квадрата F и воспользоваться результатами теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для квадрата F в условиях теоремы 3 отображение

$$\Theta: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong L_0(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow LS_1(F) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

имеет образ $\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий участок диаграммы (1.3):

$$\begin{array}{ccccc} L_0(C) & \longrightarrow & L_0(D) & \xrightarrow{\Theta} & LS_1(F) \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & LP_2(F) & & L_0(C \rightarrow D) & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ LS_2(F) & \longrightarrow & L_2(B) & \longrightarrow & L_3(C) \end{array}.$$

Из теоремы 3 и следствия 1 мы получаем, что данный участок имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{mono}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\Theta} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & & \mathbb{Z} & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}/2 \end{array}.$$

Верхняя и нижняя строки являются цепными комплексами с изоморфными гомологиями. Отсюда следует утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 3. Элементы группы $L_0(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, не лежащие в подгруппе

$$\mathbb{Z} = \text{Im}\{L_0(1) \rightarrow L_0(\mathbb{Z}/2)\},$$

действуют нетривиально на множество $S^{\text{TOP}}(RP^3 \times M^{4k})$, где M^{4k} – односвязное многообразие размерности $4k$, $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ $L_0(1)$ совпадает с образом $L_0(\mathbb{Z})$ в группе $L_0(\mathbb{Z}/2)$. Теперь результат следует из следствия 2 и коммутативной диаграммы (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат следствия 3 известен. Интерес представляет то обстоятельство, что он получен с использованием отображения Θ для подмногообразия коразмерности 2. Этот результат также получается, если рассмотреть одностороннее подмногообразие $RP^2 \times M^{4k} \subset RP^3 \times M^{4k}$ и использовать инвариант Браудера–Ливси (см. [17]).

Рассмотрим еще один пример геометрической диаграммы, в котором группы LS_* и LP_* вычислены во всех размерностях.

Пусть

$$F = \left(\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z} \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}/2 \end{array} \right) \quad (4.5)$$

– коммутативный квадрат групп, в котором отображения i и j – проекции на первое слагаемое, отображение g – приведение по модулю 2, а $f(a, b) = (a \bmod 2, b)$. Таким образом, F – геометрическая диаграмма групп в коразмерности 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть F обозначает коммутативный квадрат группы (4.5). Тогда мы имеем следующие изоморфизмы:

$$LS_n(F) \cong \begin{cases} 0, & n = 0, 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}, & n = 1, 3 \bmod 4. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место изоморфизмы [1]:

$$L_n(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, & n = 0 \bmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2, & n = 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2, & n = 3 \bmod 4. \end{cases}$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму (см., например, [2])

$$\begin{array}{ccc} L_n(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{g_*} & L_n(\mathbb{Z}/2) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ L_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & L_n(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{n-1}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{g_*} & L_{n-1}(\mathbb{Z}/2) \end{array} ,$$

в которой вертикальные столбцы задают естественное разложение групп средней строки в прямые суммы

$$L_n(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = L_n(\mathbb{Z}) \oplus L_{n-1}(\mathbb{Z})$$

и

$$L_n(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}) = L_n(\mathbb{Z}/2) \oplus L_{n-1}(\mathbb{Z}/2).$$

При этом $i_*\alpha = \text{Id}$, $j_*\beta = \text{Id}$ – тождественные отображения. Отсюда следует изоморфизм

$$L_n(f) = L_n(g) \oplus L_{n-1}(g).$$

Отображение g_* описано при доказательстве теоремы 3. Так же, как и в теореме 3, мы получаем изоморфизмы

$$LS_n(F) \cong L_{n+3}(F) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4.$$

Теперь из диаграммы (4.4) мы получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} L_1(g) & \longrightarrow & L_1(F) & \longrightarrow & L_0(f) & \xrightarrow{\text{epi}} & L_0(g) & \xrightarrow{\text{mono}} & L_0(F) & \xrightarrow{\text{epi}} & L_3(f) \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \end{array} ,$$

в которой отображение $L_0(F) \rightarrow L_3(f)$ эпиморфно, так как группа $L_3(g)$ тривиальна. Следовательно, $L_1(F) \cong 0$ и $L_0(F) \cong \mathbb{Z}$. Другой участок точной последовательности аналогично дает $L_3(F) \cong 0$ и $L_2(F) \cong \mathbb{Z}$. Теперь достаточно воспользоваться изоморфизмом

$$LS_n(F) \cong L_{n+3}(F) \quad \forall n = 0, 1, 2, 3 \bmod 4.$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для квадрата (4.5) имеют место изоморфизмы*

$$LP_n(F) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & n = 0 \bmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, & n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n = 2 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}, & n = 3 \bmod 4. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть диаграмму (1.3) для квадрата F и воспользоваться результатами теоремы 4.

Заметим также, что для квадрата (4.5) отображения $LP_{2k}(F) \rightarrow L_{2k+2}(\mathbb{Z}/2)$, которые соответствуют забыванию подмногообразия, являются изоморфизмами. Это легко следует из диаграммы (1.3).

Приведем еще один пример, в котором отображение Θ будет нетривиально даже для групп LN в коразмерности 2. Это весьма неожиданный результат, так как обычно ядро отображения Θ для подмногообразий коразмерности 2 очень велико.

Пусть

$$\Phi = \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow j & & \downarrow j \\ \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 \end{pmatrix};$$

тогда по определению $LN_n(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \cong LS_n(\Phi)$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место изоморфизмы*

$$LN_n(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \bmod 4, \\ \mathbb{Z}/2, & n = 2 \bmod 4, \end{cases}$$

и точная последовательность

$$0 \longrightarrow LN_0(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow LN_3(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Строки диаграммы (1.3) для квадрата Φ являются цепными комплексами с изоморфными группами гомологий в соответствующих членах. Отображение в верхней строке

$$\mathbb{Z} \cong L_0(\mathbb{Z}) \longrightarrow L_0(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

является вложением на прямое слагаемое. В нижней строке в соответствующем месте мы имеем отображение $LN_2 \rightarrow L_2(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$. Это мономорфизм, так как $L_1(\mathbb{Z}/2) = 0$, и эпиморфизм, так как отображение $L_3(\mathbb{Z}) \rightarrow L_3(\mathbb{Z}/2)$ является изоморфизмом согласно [1]. Следовательно, $LN_2 \cong \mathbb{Z}/2$. Теперь отображение $L_0(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow LN_1$ является эпиморфизмом с ядром $\mathbb{Z}$, являющимся прямым слагаемым. Точная последовательность для групп LN в оставшихся размерностях теперь следует непосредственно из диаграммы. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для квадрата Φ в условиях теоремы 5 отображение

$$\Theta: \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong L_0(\mathbb{Z}/2) \longrightarrow LN_1(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}$$

является эпиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 5.

В работе [1] рассмотрен случай групп $LN_*(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N)$ при исследовании фальшивых линзовых пространств. При нечетном n доказано, что они тривиальны в четных размерностях, а в нечетных размерностях они изоморфны группе $L_1(\mathbb{Z}/N)$, которая тривиальна согласно [8]. Таким образом, мы видим, что при четных N группы препятствий к расщеплению $LN_*(\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N)$ нетривиальны уже в случае $N = 2$.

5. Подмногообразие коразмерности 2 и спектральная последовательность в хирургии. Спектральная последовательность в хирургии была впервые построена в работе [10]. При построении рассматривался случай односторонних подмногообразий и групп Браудера–Ливси в диаграмме (1.3). С алгебраической точки зрения диаграмма (1.3) в этом случае строится для пары $\pi \subset G$, где π – подгруппа индекса 2 в группе G , снабженной гомоморфизмом ориентации. Для построения спектральной последовательности основную роль играет реализация диаграммы (1.3) на уровне спектров. Используя это обстоятельство, в работе [20] были построены спектральные последовательности когомологий Тейта K -групп квадратичных расширений антиструктур и описаны первые дифференциалы в этих спектральных последовательностях.

В этом пункте мы описываем спектральную последовательность в хирургии, построенную на основе диаграммы (1.3) для случая подмногообразия коразмерности 2. Поскольку мы будем использовать конструкции работы [10], мы можем произвести построение в общем случае.

Пусть Ψ – универсальный квадрат групп (1.5) в задаче расщепления вдоль подмногообразия коразмерности $q = 1, 2$. В этом случае группы $LS_*(\Psi)$ обозначаются $LN_*(A \rightarrow B)$. Мы предполагаем, что правая группа B в квадрате Ψ снабжена гомоморфизмом ориентации. Левую группу B вместе с гомоморфизмом ориентации мы обозначим B^ξ . Вся диаграмма (1.3) реализуется на уровне спектров (см. [1], [10]). Рассмотрим центральный квадрат диаграммы (1.3), реализованный на уровне спектров

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{L}(B) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \Sigma^q \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi) & & \mathbb{L}(A \rightarrow B), \\ \searrow & & \nearrow \\ & \Sigma^q \mathbb{L}(B^\xi) & \end{array} \quad (5.1)$$

где Σ обозначает функтор из категории спектров в категорию спектров. Этот функтор задан для любого спектра $\mathbb{A} = \{\mathbb{A}_n\}$ условием $(\Sigma \mathbb{A})_n = \mathbb{A}_{n+1}$. Квадрат (5.1) является гомотопически универсальным отталкивающим квадратом спектров, для которого слои и кослои параллельных отображений гомотопически эквивалентны. Обозначим через Ψ^- универсальный отталкивающий квадрат групп с измененной ориентацией

$$\Psi^- = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B^\xi \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Теперь мы можем построить диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{L}(B) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma^q \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi) & & & & \mathbb{L}(A \rightarrow B) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^q \mathbb{L}(B^\xi) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma^{2q} \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi^-) & & & & \Sigma^q \mathbb{L}(A \rightarrow B^\xi) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^{2q} \mathbb{L}(B) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma^{3q} \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi) & & & & \Sigma^{2q} \mathbb{L}(A \rightarrow B) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^{3q} \mathbb{L}(B^\xi) & & \\
 & & \dots\dots\dots & &
 \end{array} \quad (5.3)$$

В диаграмме (5.3) по вертикали записаны квадраты (5.1) для Ψ и Ψ^- со сдвигом размерности. Диаграмма (5.3) естественно продолжается вверх и вниз. Используя универсально-отталкивающие квадраты спектров, ее можно также продолжить вправо и влево (см. [10]). Введем следующие обозначения (см. [10] и [19]):

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_{0,0} = \mathbb{L}(B), & X_{1,1} = \Sigma^q \mathbb{L}(B^\xi), & X_{2,2} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}(B), & X_{3,3} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}(B^\xi), & & & \\
 \dots\dots\dots & & & & & & \\
 X_{1,0} = \Sigma^q \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi), & X_{2,1} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi^-), & X_{3,2} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi), & X_{4,3} = \Sigma^{4q} \mathbb{L}\mathbb{P}(\Psi^-), & & & \\
 \dots\dots\dots & & & & & & \\
 X_{0,1} = \mathbb{L}(A \rightarrow B), & X_{1,2} = \Sigma^q \mathbb{L}(A \rightarrow B^\xi), & & & & & \\
 X_{2,3} = \Sigma^{2q} \mathbb{L}(A \rightarrow B), & X_{3,4} = \Sigma^{3q} \mathbb{L}(A \rightarrow B^\xi), & & & & & \\
 \dots\dots\dots & & & & & &
 \end{array}$$

Теперь спектр $X_{k,k-2}$ строится по известным отображениям

$$X_{k-1,k-2} \longrightarrow X_{k-1,k-1} \longleftarrow X_{k,k-1}$$

так, чтобы квадрат

$$\begin{array}{ccc}
 X_{k,k-2} & \longrightarrow & X_{k-1,k-2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X_{k,k-1} & \longrightarrow & X_{k-1,k-1}
 \end{array}$$

был гомотопически универсальным притягивающим квадратом. Аналогичная конструкция с использованием гомотопически универсальных отталкивающих квадратов используется для построения спектра $X_{k,k+2}$. Далее построение спектров $X_{m,l}$ анало-

гично. Таким образом, мы получили бесконечную гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \searrow \\
 & & & & & & X_{-1,0} \\
 & & & & \nearrow & & \\
 & & & & X_{0,0} & & \\
 & & \searrow & & \nearrow & \searrow & \\
 & & X_{1,0} & & X_{0,1} & & \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \\
 & X_{2,0} & & X_{1,1} & & X_{0,2} & \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 & X_{2,1} & & X_{1,2} & & X_{0,3} & \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 & X_{2,2} & & X_{1,3} & & X_{0,4} & \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
 & X_{2,3} & & & & & \\
 & \nearrow & & & & &
 \end{array} . \quad (5.4)$$

Для построения спектральной последовательности рассмотрим фильтрацию (см. [10])

$$\cdots \longrightarrow X_{3,0} \longrightarrow X_{2,0} \longrightarrow X_{1,0} \longrightarrow X_{0,0} \longrightarrow X_{-1,0} \longrightarrow \cdots . \quad (5.5)$$

Тогда по определению (см. [10])

$$E_1^{p,s} = \pi_{s-p}(X_{p,0}, X_{p+1,0}) = \pi_{s-p}(X_{p,i}, X_{p+1,i}) \quad \forall i.$$

Дифференциал

$$d_1^{p,s}: E_1^{p,s} \rightarrow E_1^{p+1,s}$$

является естественной композицией

$$\pi_{s-p}(X_{p,p}, X_{p+1,p}) \xrightarrow{\cong} \pi_{s-p}(X_{p,p+1}, X_{p+1,p+1}) \longrightarrow \pi_{s-p-1}(X_{p+1,p+1}, X_{p+2,p}).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 E_1^{p,s} &= \pi_{s-p}(X_{p,p}, X_{p+1,p}) = \pi_{s-p}(X_{p-1,p}) = \pi_{s-p}(\Sigma^{(p+1)q+1} \mathbb{LS}(\Psi^{(-)^p})) \\
 &= \pi_{s-(q+1)(p+1)} \mathbb{LS}(\Psi^{(-)^p}).
 \end{aligned}$$

Напомним, что при $q = 1$ имеет место изоморфизм $E_1^{p,s} = LN_{s+2}(A \rightarrow B)$ (см. [10]). При $q = 2$ группа $E_1^{p,s}$ уже зависит от p и имеет место изоморфизм

$$E_1^{p,s} = LS_{s+p+1}(\Psi^{(-)^p}) = LN_{s+p+1}(A \rightarrow B^{(\xi)^p}).$$

В случае $q = 1$ дифференциал d_1 устроен достаточно просто и полностью описан в алгебраических терминах в работах [10], [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для $q = 2$ первый дифференциал является композицией отображений из диаграммы (1.3):

$$d_1^{p,s}: LS_{s+p+1}(\Psi^{(-)^p}) \longrightarrow L_{s+p+1}(B(\xi)^{p+1}) \longrightarrow LS_{s+p-2}(\Psi^{(-)^{p+1}}).$$

Первое отображение входит в диаграмму (1.3) для квадрата $\Psi^{(-)^p}$, а второе отображение входит в диаграмму (1.3) для квадрата $\Psi^{(-)^{p+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из построения спектральной последовательности аналогично работам [10] и [20].

Общие свойства спектральной последовательности, описанные в работе [10] для $q = 1$, сохраняются и для $q = 2$, поскольку они используют только диаграмму (5.4) и бесконечную в обе стороны фильтрацию (5.5). В частности, определены отображения, аналогичные итерированным инвариантам Браудера–Ливси.

Даже для $q = 1$ эта спектральная последовательность изучена очень мало. Так в работе [10] приведен пример нетривиального второго дифференциала, но неизвестно, существуют ли пары групп с нетривиальными дифференциалами более высоких порядков. В случае конечных абелевых 2-групп все дифференциалы кроме первого тривиальны (см. [10], [17]).

В случае $q = 2$ изоморфизм (2.9) дает возможность записать группы препятствий к расщеплению как группы Уолла некоторых колец с антиструктурами. Остается открытым вопрос описания первого дифференциала в алгебраических терминах на уровне колец с антиструктурами аналогично случаю $q = 1$. Естественно ожидать, что для $q = 2$ второй дифференциал (а тем более дифференциалы более высокого порядка) будет всегда тривиален. Однако в настоящее время авторам неизвестно даже примера квадрата Ψ в коразмерности 2, для которого первый дифференциал нетривиален.

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательное прочтение рукописи и полезные исправления и замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Wall C. T. C. Surgery on Compact Manifolds. London: Academic Press, 1970.
- [2] Ranicki A. A. Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery. Matem. Notes. V. 26. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1981.
- [3] Ranicki A. A. Algebraic L-Theory and Topological Manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
- [4] Муранов Ю. В. Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 6. С. 107–132.
- [5] Ахметьев П. М., Муранов Ю. В. Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 163–175.
- [6] Муранов Ю. В., Реповш Д. Группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 127–142.
- [7] Ranicki A. A. High-Dimensional Knot Theory. Berlin–Heidelberg: Springer, 1998.
- [8] Cappell S. E., Shaneson J. L. Pseudo-free actions // Lecture Notes in Math. 1979. V. 763. P. 395–447.
- [9] Харшиладзе А. Ф. Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами // УМН. 1987. Т. 42. С. 55–85.

- [10] Хэмблтон И., Харшиладзе А. Ф. Спектральная последовательность в теории перестроек // Матем. сб. 1992. Т. 183. С. 3–14.
- [11] Wall C. T. C. Foundations of algebraic L -theory // Lecture Notes in Math. 1973. V. 343. P. 266–300.
- [12] Wall C. T. C. On the classification of hermitian forms. VI. Group Rings // Ann. of Math. 1976. V. 103. P. 1–80.
- [13] Hambleton I., Ranicki A., Taylor L. Round L -theory // J. Pure and Appl. Algebra. 1987. V. 47. P. 131–154.
- [14] Ахметьев П. М. Расщепления гомотопических эквивалентностей вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1 // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. С. 211–241.
- [15] Муранов Ю. В., Хэмблтон И. Проективные группы препятствий к расщеплению вдоль односторонних подмногообразий // Матем. сб. 1999. Т. 190.
- [16] Hambleton I. Projective surgery obstructions on closed manifolds // Lecture Notes in Math. 1982. V. 967. P. 101–131.
- [17] Муранов Ю. В., Харшиладзе А. Ф. Группы Браудера–Ливси абелевых 2-групп // Матем. сб. 1990. Т. 181. С. 1061–1098.
- [18] Муранов Ю. В., Реповш Д. Перестройки замкнутых многообразий с диэдральной фундаментальной группой // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 238–250.
- [19] Milnor J. W. A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds // Symposia in Pure Math. AMS. 1961. V. 3. P. 39–55.
- [20] Cavicchioli A., Muranov Y. V., Repovš D. Spectral sequences in K -theory for a twisted quadratic extension // Yokohama Math. J. 1998. V. 46. P. 1–13.

(Й. Малешич, Д. Реповш) Люблянский университет

Поступило

(Ю. В. Муранов) Витебский государственный технологический университет

04.11.1998

E-mail: joze.malesic@fmf.uni-lj.si,

Исправленный вариант

mur@vstu.unibel.by, dusan.repovs@fmf.uni-lj.si

01.12.1999