Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Хачатрян, К вопросу разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 933–940

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:31:58

УДК 517.9

К вопросу разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

Х. А. Хачатрян

В настоящей заметке рассматривается один класс линейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка со стохастическим ядром и с переменными коэффициентами на полуоси. Рассмотренные уравнения имеют важные применения в физической кинетике. Сочетание специальных факторизационных методов с методами интегральных уравнений Фредгольма второго рода дают возможность построить решение этих уравнений в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$. В некоторых особых случаях удастся описать также структуру построенных решений.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Рассмотрим задачу типа Коши для следующего интегро-дифференциального уравнения на полуоси:

$$\frac{df}{dx} + \lambda(x) \int_0^\infty K(x, t) f(t) dt + g(x) = q(x) f(x), \quad x > 0, \quad (1)$$

$$f(0) = \rho_0 \in (0, +\infty) \quad (2)$$

где $\lambda, q \in L_\infty(0, +\infty)$, ядро $K(x, t)$ – неотрицательная функция, удовлетворяющая условию стохастичности:

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} \int_0^\infty K(x, t) dx = 1, \quad (3)$$

а свободный член уравнения (1) удовлетворяет условию

$$0 \leq g \in L_1(0, +\infty). \quad (4)$$

Изучение задачи (1)–(4) представляет не только самостоятельный математический интерес, но и играет важную роль в вопросах решения различных актуальных задач физической кинетики. Из них наиболее известной является задача распределения электрического поля в полубесконечном металле [1], [2].

Первые результаты по изучению уравнения (1), в том частном случае, когда

$$q(x) \equiv 0, \quad \lambda(x) = c \equiv \text{const}, \quad K(x, t) = K(x - t),$$

где

$$K(x) = \int_1^\infty e^{-|x|s} \frac{ds}{s^2}, \quad (5)$$

появились в работах [2], [3].

Далее, когда

$$q(x) = A \equiv \text{const}, \quad \lambda(x) = c = \text{const}, \quad K(x, t) = K(x - t),$$

$0 \leq K \in L_1(-\infty, +\infty)$, $\|K\|_{L_1} = 1$, уравнение рассматривалось в работе [4], где при наложении некоторых дополнительных условий на параметры A и c была доказана его разрешимость в $W_1^1(0, +\infty)$ (где $W_p^n(0, +\infty)$ состоит из функций f таких, что $f^{(k)} \in L_p(0, +\infty)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$). В некоторых частных случаях была найдена структура построенных решений.

В настоящей работе получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что ядро $K(x, t)$ и свободный член уравнения (1), удовлетворяют соответственно условиям (3) и (4), $a \leq \lambda, q \in L_\infty(0, +\infty)$. Тогда, если существует число $\alpha > 0$ такое, что*

$$\sup_{y \in (0, \infty)} \int_0^\infty \lambda(x) K(x, y) dx + \sup_{y \in (0, \infty)} (\alpha - q(y))(1 - e^{-\alpha y}) < \alpha, \quad (6)$$

то задача (1)–(4) имеет положительное, абсолютно непрерывное решение; более того, $f \in W_1^1(0, +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно убедиться, что если, например,

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \lambda(x) < \inf_{x \in (0, \infty)} q(x), \quad (7)$$

то условие (6) теоремы автоматически выполняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть ядро $K(x, t)$ и свободный член $g(x)$ уравнения (1), удовлетворяют соответственно условиям (3) и (4), $\lambda, q \in L_\infty(0, +\infty)$. Тогда, если существует число $\beta > 0$ такое, что существует ограниченный обратный оператор для $I + W_\beta$ в $L_1(0, +\infty)$, где W_β – интегральный оператор вида*

$$(W_\beta f)(x) = \int_0^\infty W_\beta(x, t) f(t) dt, \quad f \in L_1(0, +\infty), \quad (8)$$

с ядром

$$W_\beta(x, y) = \lambda(x) \int_0^\infty e^{-\beta\tau} K(x, \tau + y) d\tau - (\beta + q(x)) e^{-\beta(x-y)} \theta(x - y), \quad (9)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

то задача (1)–(4) в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$ обладает решением следующей структуры:

$$f(x) = \rho_0 e^{-\beta x} + \int_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t) dt, \quad \text{где } F \in L_1(0, +\infty). \quad (10)$$

2. Обозначения и вспомогательные леммы. Перепишем задачу (1), (2) в операторной форме:

$$\begin{cases} (D - Q + \Lambda \mathcal{K})f + g = 0, \\ f(0) = \rho_0 > 0, \end{cases} \quad (11)$$

где $(Df)(x) = df/dx$ – оператор дифференцирования, $(Qf)(x) = q(x)f(x)$, $(\Lambda f)(x) = \lambda(x)f(x)$ – операторы умножения, а

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x, t)f(t) dt, \quad x > 0. \quad (12)$$

Пусть E^+ – одно из следующих банаховых пространств: $L_p(0, +\infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Предполагается, что оператор $\mathcal{K}$ непрерывно действует в E^+ .

Обозначим через Ω класс следующих интегральных операторов: $\mathcal{K} \in \Omega$, если

$$\mu_1 = \sup_{t \in (0, \infty)} \int_0^\infty |K(x, t)| dx < +\infty, \quad (13)$$

$$\mu_2 = \sup_{x \in (0, \infty)} \int_0^\infty |K(x, t)| dt < +\infty. \quad (14)$$

Легко проверить, что класс Ω является алгеброй. Действительно, пусть, например, $\mathcal{K}, H \in \Omega$, $W \equiv \mathcal{K}H$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |W(x, y)| dy &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty K(x, t)h(t, y) dt \right| dy \leq \int_0^\infty \int_0^\infty |K(x, t)||h(t, y)| dt dy \\ &= \int_0^\infty |K(x, t)| \int_0^\infty |h(t, y)| dy dt \leq \sup_{t \in (0, \infty)} \int_0^\infty |h(t, y)| dy \\ &\quad \times \sup_{x \in (0, \infty)} \int_0^\infty |K(x, t)| dt < +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sup_{x \in (0, \infty)} \int_0^\infty |W(x, y)| dy < +\infty.$$

Точно так же доказывается, что

$$\sup_{y \in (0, \infty)} \int_0^\infty |W(x, y)| dx < +\infty.$$

Из (13), (14) следует, что

$$\|\mathcal{K}\|_{L_1} \leq \mu_1, \quad \|\mathcal{K}\|_{L_\infty} \leq \mu_2. \quad (15)$$

Согласно интерполяционной теореме Рисса [5] имеем

$$\|\mathcal{K}\|_{L_p} \leq \max(\mu_1, \mu_2), \quad 1 < p < +\infty. \quad (16)$$

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для операторов D , Q , Λ и $\mathcal{K}$, и для каждого $\alpha > 0$ найти такой интегральный оператор B_α , действующий в $W_1^1(0, +\infty)$, чтобы

$$D - Q + \Lambda \mathcal{K} = (D - \alpha I)(I - B_\alpha), \quad (17)$$

где I – единичный оператор. Факторизацию (17) мы будем понимать как равенство операторов, действующих в $W_1^1(0, +\infty)$.

Имеет место

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{K}$ – интегральный оператор (3), (12). Тогда для каждого $\alpha > 0$ справедливо (17) как равенство операторов, действующих в $W_1^1(0, +\infty)$. Ядерная функция $b_\alpha(x, y)$ оператора B_α имеет вид

$$b_\alpha(x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} K(x + \tau, y) \lambda(x + \tau) d\tau + (\alpha - q(y)) e^{-\alpha(y-x)} \theta(y - x). \quad (18)$$

Далее, если $\mathcal{K} \in \Omega$, то $B_\alpha \in \Omega$ для каждого $\alpha > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$D - Q + \Lambda\mathcal{K} = D - \alpha I + \alpha I - Q + \Lambda\mathcal{K} = (D - \alpha I)(I - B_\alpha), \quad (19)$$

где

$$B_\alpha = \Gamma_\alpha \Lambda \mathcal{K} - \Gamma_\alpha Q + \alpha \Gamma_\alpha, \quad (20)$$

а Γ_α – обратный оператор для оператора $\alpha I - D$ в пространстве $W_1^1(0, +\infty)$, причем

$$(\Gamma_\alpha f)(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} f(t) dt. \quad (21)$$

Путем перехода в формуле (20) от операторных равенств к ядрам с учетом (21) получим, что ядро оператора B_α имеет вид (18). Так как $\lambda \in L_\infty(0, +\infty)$ и

$$b_\alpha(x, y) = \int_x^\infty e^{-\alpha(z-x)} K(z, y) \lambda(z) dz + (\alpha - q(y)) e^{-\alpha(y-x)} \theta(y - x),$$

то нетрудно убедиться, что оператор B_α действует в $W_1^1(0, +\infty)$. Перейдем ко второй части доказательства леммы. Пусть $\mathcal{K} \in \Omega$. Докажем, что $B_\alpha \in \Omega$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |b_\alpha(x, y)| dy &\leq \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \lambda(x + \tau) K(x + \tau, y) d\tau \right| dy + \int_x^\infty |\alpha - q(y)| e^{-\alpha(y-x)} dy \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \int_0^\infty |\lambda(x + \tau)| |K(x + \tau, y)| dy d\tau + \frac{1}{\alpha} \sup_{y \in (0, +\infty)} |\alpha - q(y)| \\ &\leq \sup_{x \in (0, +\infty)} |\lambda(x)| \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \int_0^\infty |K(x + \tau, y)| dy d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \sup_{y \in (0, \infty)} |\alpha - q(y)| \\ &\leq \frac{\mu_2}{\alpha} \sup_{x \in (0, +\infty)} |\lambda(x)| + \frac{1}{\alpha} \sup_{y \in (0, \infty)} |\alpha - q(y)| < +\infty, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\sup_{x \in (0, +\infty)} \int_0^\infty |b_\alpha(x, y)| dy < +\infty.$$

Аналогичными рассуждениями проверяется, что

$$\sup_{y \in (0, \infty)} \int_0^\infty |b_\alpha(x, y)| dx < +\infty.$$

Лемма доказана.

Точно так же доказывается следующая

ЛЕММА 2. *Предположим, что $\mathcal{K}$ – интегральный оператор вида (3), (12). Тогда для каждого $\beta > 0$ имеет место факторизация*

$$D - Q + \Lambda \mathcal{K} = (I + W_\beta)(D + \beta I) \quad (22)$$

как равенство операторов, действующих в $W_1^1(0, +\infty)$, где W_β – интегральный оператор вида (8), (9). Далее, если $\mathcal{K} \in \Omega$, то $W_\beta \in \Omega$ для каждого $\beta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы будем считать, что

$$\alpha \geq \sup_{x \in (0, +\infty)} q(x). \quad (23)$$

Тогда $b_\alpha(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

3. Уменьшение спектрального радиуса оператора B_α . Обозначим через $r(A)$ спектральный радиус оператора $A \in \Omega$. Пусть B_α^+ и B_α^- – вольтерровы части оператора B_α :

$$(B_\alpha^+ f)(x) = \int_0^x b_\alpha(x, t) f(t) dt, \quad (B_\alpha^- f)(x) = \int_x^\infty b_\alpha(x, t) f(t) dt. \quad (24)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА (об уменьшении $r(B_\alpha)$). *Пусть $\mathcal{K} \in \Omega$ и операторы $I - B_\alpha^\pm$ обратимы при некотором значении $\alpha > 0$. Тогда имеет место факторизация*

$$D - Q + \Lambda \mathcal{K} = (D - \alpha I)(I - B_\alpha^-)(I - G_\alpha)(I - B_\alpha^+), \quad (25)$$

где $G_\alpha = \Phi_\alpha^+ \Phi_\alpha^- \in \Omega$, $(I - B_\alpha^\pm)^{-1} = I + \Phi_\alpha^\pm$. Далее, если $r(B_\alpha) < 1$, то $r(G_\alpha) < r(B_\alpha) < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор $I - B_\alpha$ в виде

$$I - B_\alpha = I - B_\alpha^- - B_\alpha^+ + B_\alpha^- B_\alpha^+ - B_\alpha^- B_\alpha^+ = (I - B_\alpha^-)(I - B_\alpha^+) - B_\alpha^- B_\alpha^+. \quad (26)$$

Нетрудно убедиться, что

$$(I - B_\alpha^-)^{-1} B_\alpha^- = \Phi_\alpha^-, \quad B_\alpha^+ (I - B_\alpha^+)^{-1} = \Phi_\alpha^+. \quad (27)$$

Таким образом, из (17) с учетом (26) и (27) приходим к факторизации (25). Теперь докажем, что если $r(B_\alpha) < 1$, то $r(G_\alpha) < r(B_\alpha) < 1$. Пусть ξ – неподвижная точка оператора G_α : $G_\alpha \xi = \nu \xi$, где $\|\xi\|_{E(0, \infty)} = 1$ (очевидно, что последнего всегда можно достичь). Обозначим через η решение уравнения $(I - B_\alpha^+) \eta = \xi$, тогда η^* (сопряженное к η) будет удовлетворять уравнению $\eta^* (I - B_\alpha^-) = \xi^*$, причем $\|\eta\|_{E(0, \infty)} > 1 = \|\xi\|_{E(0, \infty)}$. Тогда из разложения

$$I - B_\alpha = (I - B_\alpha^-)(I - G_\alpha)(I - B_\alpha^+)$$

с учетом $G_\alpha \xi = \nu \xi$ будем иметь

$$\|\eta\|_{E(0, \infty)}^2 - \eta^* B_\alpha \eta = 1 - \nu. \quad (28)$$

Но с другой стороны, используя известный вариационный принцип [6], получим

$$\eta^* B_\alpha \eta \leq \eta(B_\alpha) \|\eta\|_{E(0,\infty)}^2. \quad (29)$$

Следовательно, из (28) с учетом (29) будем иметь

$$1 - \nu \geq \|\eta\|_{E(0,\infty)}^2 (1 - r(B_\alpha)), \quad \|\eta\|_{E(0,\infty)}^2 > 1.$$

Итак, из последнего неравенства получим $r(G_\alpha) < r(B_\alpha) < 1$. Теорема доказана.

4. Доказательство основных результатов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Используя факторизацию (17), уравнение (1) перепишем в следующей форме:

$$(D - \alpha I)(I - B_\alpha)f = -g. \quad (30)$$

Решение этого уравнения сводится к последовательному решению следующих двух связанных уравнений:

$$(D - \alpha I)\psi = -g, \quad (31)$$

$$(I - B_\alpha)f = \psi. \quad (32)$$

Поскольку $0 \leq g \in L_1(0, +\infty)$, уравнение (31) в $W_1^1(0, +\infty)$ имеет положительное решение вида

$$0 \leq \psi(x) = \int_x^\infty e^{-\alpha(t-x)} g(t) dt \in W_1^1(0, \infty).$$

Уравнение (32) перепишем в раскрытой форме:

$$f(x) = \psi(x) + \int_0^\infty b_\alpha(x, y) f(y) dy \quad (33)$$

и применим к нему следующий итерационный процесс:

$$f^{(n+1)}(x) = \psi(x) + \int_0^\infty b_\alpha(x, y) f^{(n)}(y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad f^{(0)} = \psi(x). \quad (34)$$

Поскольку $0 \leq \psi \in W_1^1(0, +\infty)$, $b_\alpha(x, y) \geq 0$, из (34) с учетом (18) следует, что

$$1) \psi(x) \leq f^{(n)} \uparrow \text{ по } n; \quad 2) f^{(n)} \in W_1^1(0, +\infty).$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int_0^\infty b_\alpha(x, y) dx \leq \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \lambda(x+\tau) K(x+\tau, y) d\tau + \frac{1}{\alpha} \sup_{y \in (0, +\infty)} (\alpha - q(y))(1 - e^{-\alpha y}).$$

Изменяя порядок интегрирования в последнем повторном интеграле, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty b_\alpha(x, y) dx &\leq \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} \int_0^\infty \lambda(z) K(z, y) dz d\tau + \frac{1}{\alpha} \sup_{y \in (0, +\infty)} (\alpha - q(y))(1 - e^{-\alpha y}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\sup_{y \in (0, +\infty)} \int_0^\infty \lambda(z) K(z, y) dz + \sup_{y \in (0, +\infty)} (\alpha - q(y))(1 - e^{-\alpha y}) \right). \end{aligned}$$

Следовательно, из последнего неравенства с учетом (6) будем иметь

$$\sup_{y \in (0, +\infty)} \int_0^\infty b_\alpha(x, y) dx \leq \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} < 1, \quad (35)$$

где

$$\rho(\alpha) = \sup_{y \in (0, +\infty)} \int_0^\infty \lambda(z) K(z, y) dz + \sup_{y \in (0, +\infty)} (\alpha - q(y))(1 - e^{-\alpha y}).$$

Из оценки (35) с учетом (34) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f^{(n+1)}(x) dx &\leq \int_0^\infty \psi(x) dx + \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} \int_0^\infty f^{(n)}(y) dy \\ &\leq \int_0^\infty \psi(x) dx + \frac{\rho(\alpha)}{\alpha} \int_0^\infty f^{(n+1)}(y) dy, \end{aligned}$$

откуда

$$\int_0^\infty f^{(n+1)}(x) dx \leq \frac{\alpha \int_0^\infty \psi(x) dx}{\alpha - \rho(\alpha)} = \frac{\int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t}) g(t) dt}{\alpha - \rho(\alpha)}. \quad (36)$$

Следовательно, из теоремы Леви [7] заключаем, что последовательность $\{f^{(n)}(\tau)\}_1^\infty$ сходится почти всюду в $(0, \infty)$ к суммируемой функции f , этот предел и есть решение уравнения (33), причем

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t}) g(t) dt \leq \int_0^\infty f(y) dy \leq \frac{1}{\alpha - \rho(\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha t}) g(t) dt. \quad (37)$$

Поскольку $\lambda \in L_\infty(0, \infty)$, $b(\cdot, y) \in W_1^1(0, +\infty)$ по x при каждом фиксированном $y \in (0, \infty)$, из (33) видно, что $f \in W_1^1(0, +\infty)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для улучшения скорости сходимости итерации (34) целесообразно использовать факторизацию (25), так как $r(G_\alpha) < r(B_\alpha) < 1$. Тогда решение уравнения (1) сводится к последовательному решению следующих четырех связанных уравнений:

$$(D - \alpha I)\psi = -g, \quad (I - B_\alpha^-)\varphi = \psi, \quad (I - G_\alpha)\chi = \varphi, \quad (I - B_\alpha^+)f = \chi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ. Факторизация (22) сводит уравнение (1) к решению следующих двух связанных уравнений:

$$(I + W_\beta)F = -g, \quad (38)$$

$$(D + \beta I)f = F. \quad (39)$$

Поскольку оператор $(I + W_\beta)$ имеет ограниченный обратный в $L_1(0, \infty)$ при некотором значении $\beta > 0$ и $g \in L_1(0, \infty)$, то $F \in L_1(0, \infty)$. Перепишем уравнение (39) в раскрытой форме и присоединим к нему начальное значение (2):

$$\begin{cases} f'(x) + \beta f(x) = F(x), \\ f(0) = \rho_0 \in (0, \infty). \end{cases} \quad (40)$$

Легко можно убедиться, что задача Коши (40) имеет единственное решение вида

$$f(x) = \int_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t) dt + \rho_0 e^{-\beta x}. \quad (41)$$

Нетрудно убедиться также, что $f \in W_1^1(0, \infty)$. Действительно, поскольку $F \in L_1(0, +\infty)$, в силу теоремы Фубини [7] для каждого $r > 0$ будем иметь

$$\int_0^r |f(x)| dx \leq \int_0^r |F(t)| \int_t^r e^{-\beta(x-t)} dx dt + \frac{\rho_0}{\beta} (1 - e^{-\beta r}) \leq \frac{1}{\beta} \int_0^\infty |F(t)| dt + \frac{\rho_0}{\beta},$$

откуда

$$\int_0^\infty |f(x)| dx < +\infty.$$

Абсолютно аналогичными рассуждениями проверяется, что

$$f'(x) = F(x) - \beta \int_0^x e^{-\beta(x-t)} F(t) dt - \rho_0 \beta e^{-\beta x} \in L_1(0, \infty).$$

Предложение доказано.

Выражаю искреннюю признательность профессору Н. Б. Енгибаряну и В. Маргаряну за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. М. Лифшиц, Л. М. Питаевский, *Физическая кинетика*, Теоретическая физика, **10**, Наука, М., 1979.
- [2] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, “Точное решение задачи о прохождении тока через границу раздела кристаллитов в металле”, *ФТТ*, **43**:10 (2001), 1744–1750.
- [3] Х. А. Хачатрян, “О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях, возникающих в физической кинетике”, *Изв. НАН РА. Сер. матем.*, **39**:3 (2004), 72–80.
- [4] Х. А. Хачатрян, *О факторизационных методах решения некоторого класса интегральных и интегро-дифференциальных уравнений на полуси*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ереван, 2005.
- [5] С. Г. Крейн, Ю. Н. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [6] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2000.
- [7] А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1981.

Х. А. Хачатрян

Институт математики НАН Республики Армения, Ереван

E-mail: aghavard@hotmail.ru

Поступило

22.01.2007