Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Крыжановская, Моментное неравенство для сумм мультииндексированных зависимых случайных величин, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 843–856

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:12:08

Моментное неравенство для сумм мультииндексированных зависимых случайных величин

Н. Ю. Крыжановская

Исследуется действительное случайное поле, заданное на целочисленной решетке. Его зависимость описывается с помощью определенных ковариационных неравенств. Получена верхняя оценка абсолютных моментов должного порядка для частных сумм (порожденных данным полем), берущихся по конечным множествам произвольной конфигурации.

Библиография: 18 названий.

1. Введение и формулировка основного результата. Моментные неравенства – один из важнейших инструментов доказательства предельных теорем для случайных процессов и полей (см., например, [1]–[6]). Достаточно упомянуть классические неравенства Хинчина, Марцинкевича–Зигмунда и Розенталь, установленные при определенных условиях для последовательностей независимых случайных величин. При получении моментных неравенств для сумм зависимых мультииндексированных слагаемых возникают дополнительные сложности. Они обусловлены как структурой зависимости рассматриваемых величин, так и конфигурацией множеств, по которым ведется суммирование [6]–[12].

Цель данной работы – обобщить неравенство, доказанное в [12], на случай, когда суммирование слабо зависимых случайных величин ведется по произвольным конечным множествам, а не только по “целочисленным параллелепипедам”. Для этого используется вариант метода секционирования Бернштейна, основанный на результатах [13] и [3].

Чтобы описать структуру зависимости поля $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$, напомним (см., например, [6]) некоторые определения. Семейство действительных случайных величин $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ называется *ассоциированным* или *положительно зависимым*, если для любых конечных множеств $I, J \subset T$ и всех покоординатно неубывающих ограниченных функций $f: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J)) \geq 0. \quad (1.1)$$

При дополнительном ограничении, что множества I и J не пересекаются, соотношение (1.1) вводит *слабую ассоциированность* или *положительную ассоциированность*, а аналог (1.1) с неравенством противоположного знака задает *отрицательную ассоциированность*.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00373-а).

Отметим, что любое семейство независимых действительных случайных величин автоматически будет ассоциированным. Более сложные ассоциированные структуры возникают при исследовании решений стохастических дифференциальных уравнений, полей дробового шума, кластерных случайных мер и др. Заслуживает внимания теорема Бертона–Уэймира–Эванса об ассоциированности безгранично делимой случайной меры, заданной на польском пространстве. Кроме того, теорема Питта и теорема Ли, Рачева и Самородницкого дают соответственно критерии ассоциированности гауссовской системы и устойчивого случайного вектора. В качестве примеров отрицательной ассоциированности можно отметить модели, связанные с порядковыми статистиками, и системы пространственных электрических сетей. С понятием ассоциированности тесно связаны знаменитые ФКЖ-неравенства Фортуина, Кастеллейна и Жинибра и известные теоремы Холли и Престона. Эти результаты играют большую роль в статистической физике, теории перколяции и теории надежности.

Мы будем рассматривать (BL, θ) -зависимые случайные поля, заданные на решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Этот класс случайных систем был введен Булинским и Сюкэ в 2001 г. [14].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [14]. Случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$, принимающее действительные значения, называется (BL, θ) -зависимым, если существует монотонно стремящаяся к нулю при $r \rightarrow \infty$ положительная последовательность $\theta = \{\theta_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ такая, что для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ и любых ограниченных липшицевых функций $f: \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ верно неравенство

$$|\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g)(|I| \wedge |J|)\theta_{\text{dist}(I, J)},$$

где $|I|$ – число точек множества I , $\text{dist}(I, J) = \min\{\|x - y\|, x \in I, y \in J\}$, а максимальная норма $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ и

$$\text{Lip}(f) = \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{\|u - v\|_1}, \quad \|u\|_1 = \sum_{i=1}^{|I|} |u_i|.$$

В [15] показано, что любое семейство положительно или отрицательно ассоциированных случайных величин с конечным вторым моментом удовлетворяет неравенству

$$|\text{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\text{cov}(X_i, X_j)|. \quad (1.2)$$

Поэтому при выполнении условия конечной восприимчивости (для стационарного в широком смысле поля, означающего суммируемость ковариационной функции), предложенного Ньюменом [16], такие случайные поля будут (BL, θ) -зависимыми. Тем самым, неравенства типа (1.2) позволяют единообразно рассматривать как положительно, так и отрицательно зависимые системы. Более того, имеются примеры (BL, θ) -зависимых полей, которые не являются ассоциированными (см. [6] и [17]).

Будем рассматривать поле X , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1° $D_s := \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_j|^s < \infty$ для некоторого $s > 2$;
- 2° X является (BL, θ) -зависимым центрированным случайным полем, причем $\theta_r \leq c_0 r^{-\lambda}$, $r \in \mathbb{N}$, для некоторого $\lambda > d\psi(s)$, где s фигурирует в 1°, а функция

$\psi(s)$, введенная в [12], имеет вид

$$\psi(s) = \begin{cases} \frac{s-1}{s-2}, & 2 < s \leq 4, \\ \frac{1}{2}(3 - \sqrt{s})(\sqrt{s} + 1), & 4 < s \leq t_0^2, \\ \frac{(s-1)\sqrt{(s-2)^2 - 3} - s^2 + 6s - 11}{3s - 12}, & t_0^2 < s; \end{cases}$$

здесь $t_0 \approx 2.1413$ – наибольший корень уравнения $t^3 + 2t^2 - 7t - 4 = 0$.

Для произвольного конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ положим

$$S(U) = \sum_{j \in U} X_j.$$

Теперь мы сформулируем основной результат, доказательство которого приводится после ряда вспомогательных утверждений.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнены условия 1° и 2°. Тогда для произвольного конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^d$, некоторых $\delta > 0$ и $C > 1$, зависящих только от d, s, D_s, λ и c_0 , справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|S(U)|^{2+\delta} \leq C|U|^{1+\delta/2}, \quad (1.3)$$

где $|U|$ – мощность множества U .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Аналогично [18] можно указать явное выражение для δ в зависимости от значений параметров d, s и λ .

2. Секционирование множеств. Пусть $f(t)$ – плотность по мере Лебега некоторого распределения вероятностей в $\mathbb{R}^d$, причем

$$f(t) \leq \alpha \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}^d. \quad (2.1)$$

Для произвольного единичного вектора $\tau \in \mathbb{R}^d$ и любого $\varepsilon > 0$ введем функцию концентрации

$$Q(\tau, \varepsilon) = \sup_{b \in \mathbb{R}} \int_{b \leq (\tau, t) \leq b + \varepsilon} f(t) dt.$$

Здесь $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ для векторов $x = (x_1, \dots, x_d), y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 2.1 [13]. Пусть выполнено (2.1). Тогда для каждого $d \geq 3$ имеется такая постоянная $C_d > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует единичный вектор $\tau = \tau(f, \varepsilon) \in \mathbb{R}^d$, для которого $Q(\tau, \varepsilon) \leq C_d \alpha^{1/d} \varepsilon$.

Будем говорить, что множества W_1 и W_2 из $\mathbb{R}^d$ отделены слоем толщины ε , если найдутся единичный вектор $\tau \in \mathbb{R}^d$ и число $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$W_1 \subset \{t \in \mathbb{R}^d : (\tau, t) \leq b\} \quad \text{и} \quad W_2 \subset \{t \in \mathbb{R}^d : (\tau, t) \geq b + \varepsilon\}.$$

Для заданного семейства неотрицательных чисел $A = \{a_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ и любого множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ определим меру $\mu_A(U) = \sum_{j \in U} a_j$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что натуральное $d \neq 2$ и*

$$0 < a := \mu_A(\mathbb{Z}^d) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon \geq 1/2$ существует разбиение $\mathbb{Z}^d$ на непересекающиеся множества U_1, U_2, U_3 и U_4 такие, что

- 1) U_1 и U_4 отделены слоем толщины 2ε ;
- 2) U_1 и $U_3 \cup U_4$, а также U_4 и $U_1 \cup U_2$ отделены слоями толщины ε ;
- 3) $\mu_A(U_i) \leq M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d} \varepsilon$ для $i = 2, 3$, где $a_{\max} := \max_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j$, $M_d > 0$ зависит только от d ;
- 4) $|\mu_A(U_1 \cup U_2) - \mu_A(U_3 \cup U_4)| \leq (1/2) M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $d = 1$ положим $M_1 = 2$,

$$\begin{aligned} U_1 &= U \cap (-\infty, n + 1/2 - \varepsilon], & U_2 &= U \cap (n + 1/2 - \varepsilon, n], \\ U_3 &= U \cap [n + 1, n + 1/2 + \varepsilon), & U_4 &= U \cap [n + 1/2 + \varepsilon, \infty), \end{aligned}$$

где n – такое целое число, что

$$0 \leq \mu_A(U \cap (-\infty, n]) - \mu_A(U \cap [n + 1, \infty)) \leq a_{\max}.$$

Тогда легко проверить, что все утверждения теоремы выполнены. Далее будем считать, что $d \geq 3$. Пусть $V := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^d} S_{1/4}(j)$, где $S_{1/4}(j)$ – шар радиуса $1/4$ (в евклидовой метрике) с центром в точке j . Зададим в $\mathbb{R}^d$ плотность распределения вероятностей по мере Лебега следующим образом:

$$f(t) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \frac{a_j}{a B_d} \mathbf{I}\{t \in S_{1/4}(j)\}, \quad t \in \mathbb{R}^d,$$

где $\mathbf{I}\{W\}$ – индикатор множества W , B_d – мера Лебега шара $S_{1/4}(0) \subset \mathbb{R}^d$. Тогда (2.1) выполнено при $\alpha = a_{\max}/(a B_d)$. По теореме 2.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой единичный вектор $\tau \in \mathbb{R}^d$, что $Q(\tau, \varepsilon) \leq C_d(a_{\max}/a B_d)^{1/d} \varepsilon$.

Пусть $m(W) := \int_W f(t) dt$ для любого измеримого множества $W \subset \mathbb{R}^d$. Для фиксированных ε и τ можно подобрать такое $b \in \mathbb{R}$, что $m(V_1 \cup V_2) = m(V_3 \cup V_4)$, где

$$\begin{aligned} V_1 &:= \{t \in V : (\tau, t) \leq b\}, & V_2 &:= \{t \in V : b < (\tau, t) \leq b + \varepsilon\}, \\ V_3 &:= \{t \in V : b + \varepsilon < (\tau, t) \leq b + 2\varepsilon\}, & V_4 &:= \{t \in V : (\tau, t) > b + 2\varepsilon\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $U_i = V_i \cap \mathbb{Z}^d$ при $i = 1, 2, 3, 4$, то первый и второй пункты утверждения теоремы, очевидно, выполняются.

Для $j \in U_2$ по меньшей мере половина шара $S_{1/4}(j)$ лежит в V_2 , поскольку $\varepsilon \geq 1/2$, а радиус шара $S_{1/4}(j)$ равен $1/4$. Учитывая, что $m(S_{1/4}(j)) = a_j/a$ и $f(t) \equiv a_j/(a B_d)$ на $S_{1/4}(j)$, имеем $a_j/(2a) \leq m(S_{1/4}(j) \cap V_2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \sum_{j \in U_2} a_j &\leq m(V_2) \leq Q(\tau, \varepsilon) \leq C_d \left(\frac{a_{\max}}{a B_d} \right)^{1/d} \varepsilon, \\ \mu_A(U_2) &= \sum_{j \in U_2} a_j \leq M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d} \varepsilon, \end{aligned}$$

где $M_d := 2C_d B_d^{-1/d}$ зависит только от d . Аналогичное рассуждение можно провести для множества U_3 , а значит, утверждение 3) справедливо.

Установим 4). Пусть $U' = U_1 \cup U_2$, $U'' = U_3 \cup U_4$, $V' = V_1 \cup V_2$, $V'' = V_3 \cup V_4$. По построению $m(V') = m(V'')$, поэтому

$$|\mu_A(U') - \mu_A(U'')| \leq a \left| \frac{1}{a} \mu_A(U') - m(V') \right| + a \left| \frac{1}{a} \mu_A(U'') - m(V'') \right|. \quad (2.3)$$

Оценим первое слагаемой в правой части этого неравенства (второе слагаемое оценивается аналогично). Пусть гиперплоскость

$$L = \{t \in \mathbb{R}^d : (\tau, t) = b + \varepsilon\}.$$

Тогда, если $j \in U'$ и $\rho(\{j\}, L) \geq 1/4$, то $a_j/a = m(S_{1/4}(j)) = m(S_{1/4}(j) \cap V')$; здесь

$$\rho(W_1, W_2) := \inf\{\|t_1 - t_2\|_2 : t_1 \in W_1, t_2 \in W_2\},$$

где $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^d$, $\|x - y\|_2 = \sqrt{(x - y, x - y)}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, полагая $T := \{j \in \mathbb{Z}^d : \rho(\{j\}, L) < 1/4\}$, имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a} \mu_A(U') - m(V') \right| &= \left| \sum_{j \in U'} \frac{a_j}{a} - \sum_{j \in \mathbb{Z}^d : S_{1/4}(j) \cap V' \neq \emptyset} m(S_{1/4}(j) \cap V') \right| \\ &= \left| \sum_{j \in U' \cap T} \frac{a_j}{a} - \sum_{j \in T : S_{1/4}(j) \cap V' \neq \emptyset} m(S_{1/4}(j) \cap V') \right| \\ &\leq \sum_{j \in U' \cap T} \left(\frac{a_j}{a} - m(S_{1/4}(j) \cap V') \right) + \sum_{j \in U'' \cap T} m(S_{1/4}(j) \cap V') \\ &= \sum_{j \in U' \cap T} m(S_{1/4}(j) \cap V'') + \sum_{j \in U'' \cap T} m(S_{1/4}(j) \cap V') \\ &\leq Q(\tau, 1/2) \leq C_d \alpha^{1/d} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M_d a_{\max}^{1/d} a^{-1/d}. \end{aligned}$$

Получаем 4). Теорема доказана.

Для случая $d = 2$ воспользуемся следующим результатом.

ТЕОРЕМА 2.3 [3; с. 46]. Пусть V – измеримое множество в $\mathbb{R}^2$. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют такие полуплоскости P_1 и P_2 , отстоящие друг от друга на расстояние $\rho(P_1, P_2) = \gamma \mu^{1/2}(V)$, что

$$\mu(V \setminus (P_1 \cup P_2)) \leq C_2 \gamma \mu(V) \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{\mu(V \cap P_1)}{\mu(V \cap P_2)} \leq 1,$$

где $\mu(\cdot)$ – мера Лебега, а C_2 – некоторая абсолютная константа.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть U – произвольное конечное подмножество $\mathbb{Z}^d$, для которого $|U| > (M_d)^d$, и ζ – такое число, что $0 < \zeta \leq (4/15) M_d^{-1}$, где $M_2 = 16C_2/\sqrt{\pi}$, а M_d , $d \neq 2$, и C_2 фигурируют соответственно в теоремах 2.2 и 2.3. Тогда, если $\zeta|U|^{1/d} \geq 1/2$, то найдется разбиение U на множества U_1, U_2, U_3 и U_4 такие, что

- 1) U_1 и U_4 отделены слоем толщины $2\zeta|U|^{1/d}$;
- 2) U_1 и $U_3 \cup U_4$, а также U_4 и $U_1 \cup U_2$ отделены слоями толщины $\zeta|U|^{1/d}$;

- 3) $|U_i| \leq \zeta M_d |U|$ для $i = 2, 3$;
 4) $1/3 \leq |U_1 \cup U_2|/|U_3 \cup U_4| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \neq 2$. Применим теорему 2.2 для $\varepsilon = \zeta|U|^{1/d}$ и массива чисел $A = \{a_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ такого, что $a_j = \mathbf{I}\{j \in U\}$. Тогда 1) и 2), очевидно, справедливы. Для $i = 2, 3$ имеем

$$|U_i| = \mu_A(U_i) \leq M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d} \varepsilon = M_d |U|^{1-1/d} \zeta |U|^{1/d} = \zeta M_d |U|,$$

т.е. установлено утверждение 3). Аналогично

$$||U_1 \cup U_2| - |U_3 \cup U_4|| \leq \frac{1}{2} M_d |U|^{1-1/d}.$$

Учитывая это неравенство и оценку $M_d |U|^{-1/d} < 1$ (по условию $|U| > (M_d)^d$), имеем

$$||U_1 \cup U_2| - |U_3 \cup U_4|| \leq \frac{1}{2} (M_d |U|^{-1/d}) |U| < \frac{1}{2} |U| = \frac{1}{2} (|U_1 \cup U_2| + |U_3 \cup U_4|),$$

из чего вытекает 4).

Пусть $d = 2$. Рассмотрим множество $V := \bigcup_{j \in U} S_{1/4}(j)$, где $S_{1/4}(j)$ – круг радиуса $1/4$ с центром в точке j . Мера Лебега этого множества $\mu(V) = (\pi/16)|U|$. Применяя теорему 2.3 для множества V и $\gamma = (8/\sqrt{\pi})\zeta$, получаем, что существуют такой вектор $\tau \in \mathbb{R}^2$ и такое число $b \in \mathbb{R}$, что

$$\mu(V_2 \cup V_3) \leq \frac{8}{\sqrt{\pi}} \zeta C_2 \mu(V) \quad \text{и} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{\mu(V_1)}{\mu(V_4)} \leq 1, \quad (2.4)$$

где $V_i, i = 1, 2, 3, 4$, определены в (2.2) с $\varepsilon = \zeta|U|^{1/2}$. Здесь мы учли, что $\gamma\mu^{1/2}(V) = 2\zeta|U|^{1/2}$. Пусть $U_i = V_i \cap \mathbb{Z}^2$ при $i = 1, 2, 3, 4$. По условию ширина полосы, которой принадлежит множество V_2 , не меньше $1/2$. Следовательно, если $j \in U_2$, то $\mu(S_{1/4}(j) \cap V_2) \geq (1/2)(\pi/16) = \pi/32$. Учитывая первую оценку из (2.4), имеем

$$|U_2| = \sum_{j \in U_2} 1 \leq \frac{32}{\pi} \sum_{j \in U_2} \mu(S_{1/4}(j) \cap V_2) \leq \frac{32}{\pi} \mu(V_2 \cup V_3) \leq M_2 \zeta |U|,$$

так как $(8/\sqrt{\pi})C_2\mu(V) = (\pi/32)M_2|U|$. Аналогичное неравенство можно получить для множества U_3 . Таким образом, 3) доказано.

Проверим 4). Обозначив $U' = U_1 \cup U_2$ и $U'' = U_3 \cup U_4$, имеем

$$||U'| - |U''|| \leq ||U'| - \mu(V_1 \cup V_2)| + |\mu(V_4) - \mu(V_1)| + |\mu(V_2 \cup V_3)| + ||U''| - \mu(V_3 \cup V_4)|. \quad (2.5)$$

Первое и последнее слагаемые легко оценить сверху значением $\mu(V_2 \cup V_3)$ при помощи тех же рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 2.2. Второе слагаемое в (2.5) в силу (2.4) оценивается выражением $(3/5)\mu(V)$. По условию $C_2\zeta = (\sqrt{\pi}/16)M_2\zeta \leq \sqrt{\pi}/60$, поэтому

$$||U'| - |U''|| \leq 3\mu(V_2 \cup V_3) + \frac{3}{5}\mu(V) \leq \left(3\frac{8}{\sqrt{\pi}}\zeta C_2 + \frac{3}{5}\right)\mu(V) \leq \mu(V) < \frac{1}{4}(|U'| + |U''|).$$

Отсюда очевидным образом получаем 4). Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $U \subset \mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, – конечное множество, для которого $|U| > 1$. Пусть $A = \{a_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ – такой массив действительных чисел, что $0 < a_{\min} \leq a_j \leq a_{\max}$ для некоторых $a_{\min}$, $a_{\max}$ и всех $j \in U$. Тогда множество U можно разрезать гиперплоскостью, перпендикулярной одной из осей координат, на два подмножества U_1 и U_2 так, чтобы

$$0 < t \leq \frac{\mu_A(U_1)}{\mu_A(U_2)} \leq 1, \quad (2.6)$$

где

$$t := \frac{1-v}{v+(2d-1)}, \quad v = \frac{a_{\max}}{a_{\max} + a_{\min}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n_r \in \mathbb{Z}$, а τ_r – r -й базисный вектор. Разделим U на слои

$$\begin{aligned} W_1^r &= \{j \in U : (j, \tau_r) \leq n_r\}, & W_2^r &= \{j \in U : n_r < (j, \tau_r) \leq n_r + 1\}, \\ W_3^r &= \{j \in U : (j, \tau_r) > n_r + 1\}, \end{aligned}$$

причем $\mu_A(W_1^r) \leq \mu_A(W_2^r \cup W_3^r)$, но $\mu_A(W_1^r \cup W_2^r) > \mu_A(W_3^r)$.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, тогда для любого $r = 1, \dots, d$

$$\frac{\mu_A(W_1^r)}{\mu_A(W_2^r) + \mu_A(W_3^r)} < t \quad \text{и} \quad \frac{\mu_A(W_3^r)}{\mu_A(W_2^r) + \mu_A(W_1^r)} < t.$$

Следовательно, учитывая, что $\mu_A(U) - \mu_A(W_2^r) = \mu_A(W_1^r) + \mu_A(W_3^r)$, получаем

$$\mu_A(U) - \mu_A(W_2^r) < t(\mu_A(W_2^r) + \mu_A(W_3^r) + \mu_A(W_2^r) + \mu_A(W_1^r)) = t\mu_A(W_2^r) + t\mu_A(U),$$

откуда

$$\mu_A(W_2^r) > \frac{1-t}{1+t} \mu_A(U). \quad (2.7)$$

Покажем, что для $k = 1, \dots, d$ справедливо неравенство

$$\mu_A(W_2^1 \cap \dots \cap W_2^k) > \frac{1-(2k-1)t}{1+t} \mu_A(U). \quad (2.8)$$

При $k = 1$ неравенство (2.8) превращается в (2.7). Допустим, что (2.8) справедливо для некоторого $k < d$. Убедимся, что оно останется верным, если заменить k на $k+1$. Поскольку $\mu_A(U) + \mu_A(W_1 \cap W_2) \geq \mu_A(W_1) + \mu_A(W_2)$ для любых множеств $W_1, W_2 \subseteq U$, то, принимая во внимание (2.7) при $r = k+1$ и (2.8), имеем

$$\begin{aligned} &\mu_A(U) + \mu_A(W_2^1 \cap \dots \cap W_2^k \cap W_2^{k+1}) \\ &\geq \mu_A(W_2^1 \cap \dots \cap W_2^k) + \mu_A(W_2^{k+1}) \\ &> \frac{1-(2k-1)t}{1+t} \mu_A(U) + \frac{1-t}{1+t} \mu_A(U) = \frac{2-2kt}{1+t} \mu_A(U). \end{aligned}$$

Следовательно, (2.8) верно с заменой k на $k+1$. Таким образом, для $k = 1, \dots, d$ неравенство (2.8) доказано. В частности, для $k = d$ имеем оценку

$$\mu_A(W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d) > \frac{1-(2d-1)t}{1+t} \mu_A(U) = \frac{a_{\max}}{a_{\max} + a_{\min}} \mu_A(U).$$

Заметим, что либо $W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d = \emptyset$, либо $W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d = \{j_0\}$ для некоторого $j_0 \in U$. Если $W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d = \emptyset$, то последнее неравенство, очевидно, не выполняется. Если $W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d = \{j_0\}$, то

$$a_{j_0} = \mu_A(W_2^1 \cap \dots \cap W_2^d) > \frac{a_{\max}}{a_{\max} + a_{\min}} \mu_A(U) \geq \frac{a_{\max}}{a_{\max} + a_{\min}} (a_{j_0} + a_{\min}),$$

что неверно, так как $a_{j_0} \leq a_{\max}$. Полученное противоречие показывает, что существует разбиение U на U_1 и U_2 , удовлетворяющие (2.6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Любое конечное множество $U \subset \mathbb{Z}^d$, $|U| > 1$, можно разрезать гиперплоскостью, перпендикулярной одной из осей координат, на два таких подмножества U_1 и U_2 , что $(4d-1)^{-1} \leq |U_1|/|U_2| \leq 1$.

Этот результат получается, если в теореме 2.5 положить $a_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}^d$.

3. Доказательство основного результата. Будем следовать схеме доказательства, предложенной в [12]. Фиксируем некоторое $\delta \in (0, 1]$ такое, что $\delta + 2 < s$. Для установления (1.3) достаточно показать, что для некоторого $C > 2(D_s \vee 1)$ и всех конечных множеств $U \subset \mathbb{Z}^d$ верна оценка

$$ES^2(U)(1 + |S(U)|)^\delta \leq C|U|^{1+\delta/2}. \quad (3.1)$$

Докажем (3.1) индукцией по количеству точек в множестве U . Для $|U| = 1$ утверждение очевидно. Для фиксированных значений d , δ и $t := (4d-1)^{-1}$ при помощи двух нижеследующих простых лемм (см. [12]) определяем значения τ_0 и A_δ .

ЛЕММА 3.1. Если положительные числа x , y и t такие, что $t \leq x/y \leq 1$, то существует такое число $\tau_0 = \tau_0(\delta, t) < 1$, что

$$x^{1+\delta/2} + y^{1+\delta/2} \leq \tau_0(x+y)^{1+\delta/2}.$$

ЛЕММА 3.2. Для любого $\delta \in (0, 1]$ существует число $A_\delta > 0$ такое, что для любых $x, y \geq 0$ справедливо неравенство

$$(x+y)^2(1+x+y)^\delta \leq x^{2+\delta} + y^{2+\delta} + A_\delta((1+x)^\delta y^2 + (1+y)^\delta x^2).$$

Теперь выберем положительное число $\zeta = \zeta(d, \delta)$, удовлетворяющее неравенству

$$\zeta < \frac{4}{15M_d} \cdot \min \left\{ 1, \frac{1-\tau_0}{4A_\delta} \right\}, \quad (3.2)$$

где M_d , $d \neq 2$, фигурирует в теореме 2.2, а M_2 – в следствии 2.4.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $\zeta|U|^{1/d} < 1/2$, то используем разбиение множества U на подмножества U_1 и U_2 , которое обеспечивает следствие 2.6.

Случай 2. Если $\zeta|U|^{1/d} \geq 1/2$, то используем разбиение множества U на подмножества W_1 , W_2 , W_3 и W_4 , которое дается следствием 2.4. При этом считаем, что $U_1 := W_1 \cup W_2$ и $U_2 := W_3 \cup W_4$.

Пусть $Q_i = S(U_i)$, где $i = 1, 2$. Тогда по лемме 3.2 получаем оценку

$$\begin{aligned} ES^2(U)(1 + |S(U)|)^\delta &= E(Q_1 + Q_2)^2(1 + |Q_1 + Q_2|)^\delta \\ &\leq EQ_1^{2+\delta} + EQ_2^{2+\delta} \\ &\quad + A_\delta E(1 + |Q_1|)^\delta Q_2^2 + A_\delta E(1 + |Q_2|)^\delta Q_1^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

По построению $|U_1| < |U|$ и $|U_2| < |U|$, следовательно, согласно предположению индукции, имеем

$$\mathbb{E}Q_1^{2+\delta} + \mathbb{E}Q_2^{2+\delta} \leq C(|U_1|^{1+\delta/2} + |U_2|^{1+\delta/2}).$$

Поскольку $t = \min\{1/3, (4d-1)^{-1}\}$, то в случаях 1 и 2 справедливо двойное неравенство $t \leq |U_1|/|U_2| \leq 1$. По лемме 3.1

$$\mathbb{E}Q_1^{2+\delta} + \mathbb{E}Q_2^{2+\delta} \leq C\tau_0(|U_1| + |U_2|)^{1+\delta/2} = \tau_0 C|U|^{1+\delta/2}. \quad (3.4)$$

Теперь оценим третье слагаемое в правой части неравенства (3.3). Четвертое оценивается аналогично. Если разбиение множества U выполнялось первым способом, то положим $V := \emptyset$, если вторым – то $V := W_3$, а значит, согласно третьему пункту следствия 2.4 получаем, что

$$|V| \leq \zeta M_d |U|. \quad (3.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta Q_2^2 &\leq 2\mathbb{E}(1 + |Q_1|^\delta)S^2(V) + 2\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta S^2(U_2 \setminus V) \\ &= 2\mathbb{E}S^2(V) + 2\mathbb{E}|Q_1|^\delta S^2(V) + 2\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta S^2(U_2 \setminus V). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в правой части (3.6) с помощью условия 2° допускает оценку

$$\mathbb{E}S^2(V) \leq \sum_{j \in V} \mathbb{E}X_j^2 + \sum_{j \in V} \text{cov}\left(X_j, \sum_{i \neq j} X_i\right) \leq D_2|V| + \sum_{j \in V} c_0 1^{-\lambda} = (D_2 + c_0)|V|. \quad (3.7)$$

Второе слагаемое в правой части (3.6) оценивается с помощью неравенства Гёльдера, предположения индукции и неравенства (3.5):

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}|Q_1|^\delta S^2(V) &\leq 2(\mathbb{E}|S(U_1)|^{2+\delta})^{\delta/(2+\delta)} (\mathbb{E}S^{2+\delta}(V))^{2/(2+\delta)} \\ &\leq 2(C|U_1|^{1+\delta/2})^{\delta/(2+\delta)} (C|V|^{1+\delta/2})^{2/(2+\delta)} \\ &= 2C|U_1|^{\delta/2}|V| \leq 2\zeta M_d C|U|^{1+\delta/2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Теперь перейдем к оценке третьего слагаемого в правой части (3.6). Имеем

$$\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta S^2(U_2 \setminus V) = \sum_{i \in U_2 \setminus V} \sum_{j \in U_2 \setminus V, j \neq i} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i X_j + \sum_{i \in U_2 \setminus V} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i^2. \quad (3.9)$$

Оценим отдельно каждое слагаемое в правой части этого равенства. Фиксируем $i, j \in U_2 \setminus V$. Пусть $i \neq j$, $\text{dist}(\{j\}, \{i\} \cup U_1) = m > 0$.

Для любого $y > 0$ определим функцию

$$H_y(x) := (|x| \wedge y) \text{sign}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для некоторых $y, z \geq 1$ и всех $i \in \mathbb{Z}^d$ введем случайные величины

$$\begin{aligned} X_i^I &:= H_z(X_i), & X_i^{II} &:= X_i - X_i^I, \\ Q_1^I &:= H_y(Q_1), & Q_1^{II} &:= ((1 + |Q_1|)^\delta - (1 + |Q_1^I|)^\delta)^{1/\delta}. \end{aligned}$$

Учитывая введенные обозначения, имеем

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i X_j| &\leq |\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i^I X_j| + |\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i^{II} X_j| \\ &\leq |\mathbb{E}(1 + |Q_1^I|)^\delta X_i^I X_j| \\ &\quad + \mathbb{E}|Q_1^{II}|^\delta |X_i^I X_j| + \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta |X_i^{II} X_j|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Оценим слагаемые в правой части (3.10). Пусть β и γ – некоторые положительные параметры. Положим $y := |U|^{1/2} m^{\beta\lambda}$, $z := m^{\gamma\lambda}$. Функция

$$F(v, w) := (1 + |H_y(v)|)^\delta H_z(w)$$

является липшицевой и ограниченной, причем $\text{Lip}(F) \leq 2y^\delta + z$. Условие 2° зависимости поля X дает

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(1 + |Q_1^I|)^\delta X_i^I X_j| &= |\text{cov}((1 + |Q_1^I|)^\delta X_i^I, X_j)| \leq (2y^\delta + z)\theta_m \\ &\leq (2|U|^{\delta/2} m^{\delta\beta\lambda} + m^{\gamma\lambda})c_0 m^{-\lambda} \leq c_0(2|U|^{\delta/2} m^{(\delta\beta-1)\lambda} + m^{(\gamma-1)\lambda}). \end{aligned}$$

Пусть q – такое положительное число, что $1/q + \delta/(2 + \delta) + 1/s = 1$. Так как $\delta + 2 < s$, то $q = s(2 + \delta)/(2s - 2 - \delta) < s$. Тогда, используя неравенства Гёльдера и Ляпунова, получаем оценку третьего слагаемого в (3.10):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta |X_i^{II} X_j| &\leq \mathbb{E}|X_i^{II}| |X_j| + \mathbb{E}|Q_1|^\delta |X_i^{II}| |X_j| \\ &\leq (1 + (\mathbb{E}|Q_1|^{2+\delta})^{\delta/(2+\delta)})(\mathbb{E}|X_i^{II}|^q)^{1/q} (\mathbb{E}|X_j|^s)^{1/s}. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbb{E}|X_i^{II}|^q \leq \mathbb{E}|X_i|^s / z^{s-q}$, то предположение индукции и условие 1° дают

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta |X_i^{II} X_j| &\leq (1 + (C|U|^{1+\delta/2})^{\delta/(2+\delta)}) \left(\frac{D_s}{z^{s-q}} \right)^{1/q} D_s^{1/s} \\ &\leq 2D_s^{2/(2+\delta)} C^{\delta/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} z^{1-s/q} \\ &= 2D_s^{2/(2+\delta)} C^{\delta/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} m^{\lambda\gamma(1-s/q)}. \end{aligned}$$

Теперь оценим второе слагаемое в (3.10). Пусть $r \in (\delta, 2 + \delta)$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Q_1^{II}|^\delta &\leq \frac{\mathbb{E}|Q_1|^r}{y^{r-\delta}} \leq y^{\delta-r} (\mathbb{E}|Q_1|^{2+\delta})^{r/(2+\delta)} \\ &\leq y^{\delta-r} (C|U_1|^{1+\delta/2})^{r/(2+\delta)} \leq y^{\delta-r} C^{r/(2+\delta)} |U|^{r/2}, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|Q_1^{II}|^\delta |X_i^I| |X_j| &\leq z(\text{cov}(|Q_1^{II}|^\delta, |X_j|) + \mathbb{E}|Q_1^{II}|^\delta \mathbb{E}|X_j|) \\ &\leq z\delta y^{\delta-1} \theta_m + zy^{\delta-r} D_1 C^{r/(2+\delta)} |U|^{r/2} \\ &\leq c_0 m^{\lambda(\gamma-1)} + D_1 C^{r/(2+\delta)} m^{\lambda(\gamma+(\delta-r)\beta)} |U|^{\delta/2}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} T &:= 2(c_0 \vee 1 \vee D_s), \\ \nu_1 &= 1 - \delta\beta, \quad \nu_2 = \gamma \left(\frac{s}{q} - 1 \right), \quad \nu_3 = (r - \delta)\beta - \gamma, \quad \nu_4 = 1 - \gamma. \end{aligned}$$

Учитывая оценки слагаемых в (3.10) и то, что $1 \leq C^{\delta/(2+\delta)} \leq C^{r/(2+\delta)}$, имеем

$$|\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^{\delta} X_i X_j| \leq TC^{r/(2+\delta)} \left(|U|^{\delta/2} \sum_{k=1}^3 m^{-\lambda\nu_k} + m^{-\lambda\nu_4} \right). \quad (3.11)$$

В [12] показано, что для некоторого $\delta \in (0, s-2)$ параметры r, β, γ можно выбрать такими, чтобы

$$\lambda\nu_k > d \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \quad \lambda\nu_4 > \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)d, \quad \lambda\nu_4 \notin \mathbb{N}. \quad (3.12)$$

Для фиксированного $i \in U_2 \setminus V$ положим

$$\bar{U}_2 = \left\{ j \in U_2 \setminus V : \|j - i\| \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \zeta |U|^{1/d} \right\}, \quad \hat{U}_2 = \left\{ j \in U_2 \setminus V : \|j - i\| < \frac{1}{\sqrt{d}} \zeta |U|^{1/d} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j \in U_2 \setminus V, j \neq i} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^{\delta} X_i X_j \right| \\ & \leq \sum_{j \in \bar{U}_2, j \neq i} |\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^{\delta} X_i X_j| + \sum_{j \in \hat{U}_2, j \neq i} |\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^{\delta} X_i X_j|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

ЛЕММА 3.3. Для каждого $d \in \mathbb{N}$, любого множества $U \subset \mathbb{Z}^d$, произвольного $\nu > 0$ и всех $i \in U$ имеем

$$\sum_{j \in U, j \neq i} \|i - j\|^{-\nu} \leq \begin{cases} c(d, \nu), & d < \nu, \\ c(d, \nu) |U|^{1-\nu/d}, & 0 < \nu < d, \nu \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K_n := \mathbb{Z}^d \cap W_n$, где W_n — замкнутый куб в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке 0 и ребром длины $2n$ ($K_0 = \{0\}$). Для множества U найдем такое n , что $|K_n| \leq |U| < |K_{n+1}|$. Функция $x^{-\nu}$ убывает при $x > 0$, поэтому

$$\sum_{j \in U, j \neq i} \|i - j\|^{-\nu} \leq \sum_{j \in B_{n+1}, j \neq 0} \|j\|^{-\nu} \leq \begin{cases} c(d, \nu), & d < \nu, \\ c(d, \nu) |K_{n+1}|^{1-\nu/d}, & 0 < \nu < d, \nu \notin \mathbb{N}, \end{cases}$$

где последняя оценка справедлива в силу леммы 2.2 из [12]. Утверждение леммы 3.3 следует из того факта, что $|K_{n+1}| \leq 3^d |K_n|$ для любого n , а $|K_n| \leq |U|$.

Множества U_1, V и $U_2 \setminus V$ были построены так, что для $j \in U_2 \setminus V$ справедлива оценка $\rho(\{j\}, U_1) \geq \zeta |U|^{1/d}$. Следовательно, $\text{dist}(\{j\}, U_1) \geq \zeta |U|^{1/d} / \sqrt{d}$.

Если $j \in \hat{U}_2$, то

$$m = m(i, j) = \text{dist}(\{j\}, \{i\} \cup U_1) = \text{dist}(\{j\}, \{i\}) = \|j - i\|.$$

По лемме 3.3, учитывая (3.12), для $k = 1, 2, 3$ получаем неравенство

$$\sum_{j \in \hat{U}_2, j \neq i} \|j - i\|^{-\lambda\nu_k} \leq c(d, \lambda\nu_k), \quad (3.14)$$

а для $k = 4$, поскольку $1 - \lambda\nu_4/d < \delta/2$, имеем

$$\sum_{j \in \bar{U}_2, j \neq i} \|j - i\|^{-\lambda\nu_4} \leq c(d, \lambda\nu_4) |\widehat{U}_2|^{\delta/2}. \quad (3.15)$$

Следовательно, принимая во внимание (3.11), (3.14) и (3.15), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in \bar{U}_2, j \neq i} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i X_j \right| &\leq TC^{r/(2+\delta)} \left(|U|^{\delta/2} \sum_{k=1}^3 c(d, \lambda\nu_k) + c(d, \lambda\nu_4) |\widehat{U}_2|^{\delta/2} \right) \\ &= TC^{r/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} \sum_{k=1}^4 c(d, \lambda\nu_k). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Если $j \in \bar{U}_2$, то $m = m(i, j) \geq \zeta |U|^{1/d} / \sqrt{d}$. Тогда $|\sum_{j \in \bar{U}_2, j \neq i} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i X_j|$ оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} |\bar{U}_2| TC^{r/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} &\left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_k} |U|^{-\lambda\nu_k/d} + |U|^{-\delta/2} \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_4} |U|^{-\lambda\nu_4/d} \right) \\ &\leq TC^{r/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} \left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_k} |U|^{1-\lambda\nu_k/d} + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_4} |U|^{1-\lambda\nu_4/d-\delta/2} \right) \\ &\leq TC^{r/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_k}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где последнее неравенство верно в силу (3.12).

Учитывая (3.13), (3.16) и (3.17), получаем, что

$$\left| \sum_{j \in U_2 \setminus V, j \neq i} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i X_j \right| \leq TC^{r/(2+\delta)} |U|^{\delta/2} \sum_{k=1}^4 \left(c(d, \lambda\nu_k) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_k} \right). \quad (3.18)$$

Пусть теперь $i = j \in U_2 \setminus V$. Так как $\delta < s - 2$, то $\delta s / (s - 2) < 2 + \delta$. Неравенства Гёльдера и Ляпунова дают

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta X_i^2 &\leq \mathbb{E} X_i^2 + \mathbb{E} |Q_1|^\delta X_i^2 \leq D_2 + (\mathbb{E} |Q_1|^{\delta s / (s-2)})^{(s-2)/s} (\mathbb{E} |X_i|^s)^{2/s} \\ &\leq D_s (1 + (\mathbb{E} |Q_1|^{\delta s / (s-2)})^{((s-2)/\delta s)\delta}) \leq D_s (1 + (\mathbb{E} |Q_1|^{2+\delta})^{\delta/(2+\delta)}) \\ &\leq 2D_s (C|U|^{1+\delta/2})^{\delta/(2+\delta)} \leq TC^{\delta/(2+\delta)} |U|^{\delta/2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Соотношения (3.9), (3.18) и (3.19) приводят к оценке

$$\mathbb{E}(1 + |Q_1|)^\delta S^2(U_2 \setminus V) \leq MC^{r/(2+\delta)} |U|^{1+\delta/2},$$

где

$$M := T \left(\sum_{k=1}^4 \left(c(d, \lambda\nu_k) + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \right)^{-\lambda\nu_k} \right) + 1 \right).$$

Используя последнюю оценку, (3.3), (3.4) и (3.6)–(3.8), заключаем, что

$$\begin{aligned} ES^2(U)(1 + |S(U)|)^\delta &\leq \tau_0 C |U|^{1+\delta/2} + 2A_\delta (2(D_2 + c_0)|U| + 2C\zeta M_d |U|^{1+\delta/2} + 2MC^{r/(2+\delta)} |U|^{1+\delta/2}) \\ &\leq (\tau_0 C + 4A_\delta (D_2 + c_0) + 4A_\delta \zeta M_d C + 4A_\delta MC^{r/(2+\delta)}) |U|^{1+\delta/2}. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы теперь следует из того факта, что найдется достаточно большая константа C , для которой

$$\tau_0 C + 4A_\delta (D_2 + c_0) + 4A_\delta \zeta M_d C + 4A_\delta MC^{r/(2+\delta)} \leq C.$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$4A_\delta MC^{r/(2+\delta)} + 4A_\delta (D_2 + c_0) \leq 4A_\delta \left(\frac{1 - \tau_0}{4A_\delta} - \zeta M_d \right) C.$$

Согласно (3.2) коэффициент при C в правой части последнего неравенства положителен, кроме того, $r/(2 + \delta) < 1$, следовательно, искомое C существует. Теорема доказана.

Автор искренне благодарна профессору А. В. Булинскому за постоянное внимание к работе, а также рецензенту за полезные замечания, способствующие улучшению текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987.
- [2] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.
- [3] А. В. Булинский, *Предельные теоремы в условиях слабой зависимости*, Изд-во МГУ, М., 1989.
- [4] P. Doukhan, *Mixing. Properties and Examples*, Lecture Notes in Statist., **85**, Springer, New York, 1994.
- [5] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, кн. 1, 2, МЦНМО, М., 2004.
- [6] A. Bulinski, A. Shashkin, *Limit Theorems for Associated Random Fields and Related Systems*, Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab., **10**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [7] M. J. Wichura, “Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters”, *Ann. Math. Statist.*, **40**:2 (1969), 681–687.
- [8] В. Ф. Гапошкин, “Оценки моментов для интегралов от ρ -перемешивающихся случайных полей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **36**:2 (1991), 262–273.
- [9] Ю. Ю. Бахтин, А. В. Булинский, “Моментные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных случайных величин”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:4 (1997), 1101–1108.
- [10] М. А. Вронский, “Скорость сходимости в УЗБЧ для ассоциированных последовательностей и полей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **43**:3 (1998), 439–455.
- [11] А. П. Шашкин, “Максимальное неравенство для слабо зависимого случайного поля”, *Матем. заметки*, **75**:5 (2004), 773–782.
- [12] A. V. Bulinski, A. P. Shashkin, “Strong invariance principle for dependent random fields”, *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, **48** (2006), 128–143.
- [13] М. А. Лифшиц, “Секционирование многомерных множеств”, *Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей*, т. 1, Изд-во ЛГУ, Л., 1986, 175–178.

- [14] A. Bulinski, C. Suquet, “Normal approximation for quasi-associated random fields”, *Statist. Probab. Lett.*, **54**:2 (2001), 215–226.
- [15] А. В. Булинский, Э. Шабанович, “Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:2 (1998), 479–492.
- [16] C. M. Newman, “Normal fluctuations and the FKG inequalities”, *Comm. Math. Phys.*, **74**:2 (1980), 119–128.
- [17] A. P. Shashkin, “A weak dependence property of a spin system”, *Transactions of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models* (Yurmala, Latvia), 2004, 30–35.
- [18] A. Bulinski, N. Kryzhanovskaya, “Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization”, *Probab. Math. Statist.*, **26**:2 (2006), 261–281.

Н. Ю. Крыжановская

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: natakr@gmail.com

Поступило

01.08.2007