Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Учет взаимодействия между частицами в новой теории нуклеации, квазичастицы, квантование вихрей и двухчастичная функция распределения, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 864–879

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 13:35:59

УДК 53:51

Учет взаимодействия между частицами в новой теории нуклеации, квазичастицы, квантование вихрей и двухчастичная функция распределения

В. П. Маслов

В настоящей статье мы более подробно остановимся на тех проблемах, которые были затронуты в предыдущем кратком сообщении [1].

Библиография: 31 название.

1. Объяснение диаграмм Хоугена–Ватсона на основе новой концепции

Выведем формулы, по которым можно определить, как распределено количество частиц по скоростям, например, в каком количестве (числовом диапазоне) вероятнее всего встречаются частицы, двигающиеся со скоростями, попадающими в заданный интервал скоростей.

Пусть E_0 – некоторая энергия, отвечающая средней поступательной скорости максимального кластера (зародыша). Предполагается, что эта скорость много меньше средней скорости молекул газа.

Пусть $N \rightarrow \infty$ – число невзаимодействующих частиц с гамильтонианом $p^2/2m$ в объеме V , $p = (p_x, p_y, p_z)$.

Пусть P – достаточно высокое давление газа в сосуде. Ему отвечает энергия газа $\mathcal{E}$.

Разобьем пространство импульсов p на конечное число областей

$$E_l \leq \frac{p^2}{2m} \leq E_{l+1}, \quad l = 0, \dots, s-1, \quad E_0 > 0, \quad E_s = E \rightarrow \infty, \quad p \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Тогда

$$E_l = E_0(l+1). \quad (2)$$

Пусть N_l – неупорядоченная выборка с возвращением в ячейку $E_{l+1} - E_l$. Иными словами, *неупорядоченная выборка* с возвращением из N шаров по ячейкам (“энергетическим ящикам”)

$$V \int_{E_l}^{E_{l+1}} \frac{p^2}{2m} dp = \frac{4\pi}{5} (2m)^{3/2} (E_{l+1}^{5/2} - E_l^{5/2}) V$$

приводит к соотношению

$$\sum_{l=1}^s N_l E_l q_l \leq \mathcal{E}, \quad q_l = \begin{cases} [l^{1/2}] & \text{при } l \text{ четном,} \\ [l^{1/2} + 1] & \text{при } l \text{ нечетном,} \end{cases} \quad \mathcal{E} \rightarrow \infty, \quad s \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $[\cdot]$ – целая часть.

Это значит, что для “кратностей вида q_l ” для “чисел заполнения” N_l выполняется теорема 1 работы [2], уточненная в [3], [4].

Еще более точные оценки для случая равенства проводились специалистами по теории чисел. Они предлагали более глубокие методы. Мы сформулируем и вновь докажем вариант теоремы из [1] для случая, применимого к изотермам при изменении давления.

Положим $\Delta N_l = N_0^{\alpha_l + \varepsilon}$, где ε – достаточно малое положительное число, и где $1/2 < \alpha_l < 2/3$ зависят от l и вычисляются для диофантова неравенства (3) с помощью известного метода тригонометрических сумм [5]–[7]¹, а N_0 – число частиц в перенасыщенном газе (см. ниже). Существуют такие постоянные C_k , $k = 1, 2, \dots$, что для любого $l \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$P\left(\left|\sum_{j=l}^s (N_j - \bar{N}_j)\right| > \Delta N_l\right) \leq C_k N_0^{-k}, \quad (4)$$

где P – вероятность, $\bar{N}_l = q_l / (e^{bl} - 1)$, $l = 1, 2, \dots$ (q_l в нашем случае равно $q_l = [l^{1/2}]$).

В силу того, что плотность $\rho_{E_l} = \sum_{j=l}^s N_j / N_0$, то отсюда следует, что после применения формул Эйлера–Маклорена к ряду $\sum_{j=l}^s \bar{N}_j = \sum_{j=l}^s q_j / (e^{bj} - 1)$ получим

$$\sum_{j=l}^s q_j \frac{1}{e^{bj} - 1} \sim \int_l^\infty \frac{x^{1/2}}{e^{bx} - 1} dx. \quad (5)$$

Отсюда, сделав замену $x = p^2/2m$ и поделив (3)–(4) на N_0 , получим утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место соотношение*

$$P\left(\left|\rho_{E_l} - \int_{p^2/2m \geq E_l} (e^{bp^2/2m} - 1)^{-1} dp \right| \geq \int (e^{bp^2/2m} - 1)^{-1} dp \right) \geq N_0^{\alpha_l - 1} = O(N_0^{-k}), \quad (6)$$

где

$$N_0 = \frac{1}{(mE_0)^{3/2}} \int (e^{-bp^2/2m} - 1) dp,$$

k – любое целое, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое и при $E_l \sim E_0 N_0^{\gamma_l}$, $0 < \gamma_l \leq 2/3$, имеем $\alpha_l = 2/3 - (1/4)\gamma_l$. Здесь P есть лебегова мера фазового объема, определенного в скобках (6), относительно всего объема (см. [1]).

Можно интерпретировать N_0 как максимальное число частиц, именно: как число частиц в максимально перенасыщенном паре. Пусть мы добавили в сосуд $N > N_0$

¹В статье с В. Е. Назайкинским в этом номере журнала мы приводим достаточно элементарное доказательство без использования глубоких методов теории чисел.

лишних частиц, N больше N_0 настолько, что $N - N_0 \cong N_0^{(1/2+\kappa)}$, где $\kappa < 1/6$, тогда лишние частицы сосредоточатся на скоростях, не превышающих

$$E_l \sim E_0 N^{\gamma_l}, \quad \text{где } \gamma_l = 4(1/6 - \kappa). \quad (7)$$

Ниже этих скоростей распределение (6) (типа Бозе–Эйнштейна) несправедливо.

Лишние частицы $N - N_0$ можно интерпретировать как число зародышей, около которых начинают расти капли, если у газа существует жидкая фаза, а если жидкой фазы нет, то возникают кристаллы. В результате получается фазовый переход первого рода. Действительно, как уже говорилось выше, только те частицы, которые движутся со скоростью, превышающей скорость “лишних” частиц (7), можно с уверенностью считать частицами “чистого” газа (пара), а остальные, возможно, сконденсировались или перемешались со сконденсированными.

Учет взаимодействия между частицами вида потенциала Ленарда–Джонса обсуждается автором в [1].

Известно такое понятие, как *сжимаемость газов*. Бурштейн в учебнике по молекулярной физике [8; с. 50–51], иллюстрирует поведение сжимаемости газа $F = pV/RT$ при изотермическом увеличении давления на основе диаграммы Хоугена и Ватсона, которая была построена для семи газов (H_2 , N_2 , CO , NH_3 , CH_4 , C_3H_8 , c_3H_{12}), усредненных в соответственных состояниях. Диаграмма показывает, что при низких температурах сжимаемость сначала уменьшается, претерпевая резкий скачок вниз при сжижении газа, и лишь затем устремляется вверх, возвращается к исходному значению, а затем и превышает его.

Старая теория связывает это явление с тем, что притяжение уменьшает сжимаемость, а отталкивание увеличивает ее [8; с. 51].

Мы трактуем диаграмму Хоугена и Ватсона по-другому. Как указывалось в предыдущей заметке [1], сжимаемость идеального газа доходит до величины 0.523. После чего происходит фазовый переход: при небольшом увеличении давления сжимаемость резко падает до объема жидкости.

До этого момента фазового перехода можно считать, что мы не учитываем взаимодействия между частицами и находимся в сфере, только относящейся к идеальному газу, а по существу – к теории чисел [5]–[7]. Согласно новой концепции огрубленно можно считать, что квазичастиц почти не образуется.

На эксперименте это может быть проверено с помощью нейтронного излучения, которое достаточно тонко может фиксировать спектр квазичастиц, о чем мы поговорим в четвертом разделе работы.

2. Учет взаимодействия и увеличение сжимаемости газа

Пусть

$$H(x, p) = p^2 + x^\alpha.$$

Тогда

$$\int_{E_l \leq H(x, p) \leq E_{l+1}} H(x, p) dx dp = \int_{H(x, p) \leq E_{l+1}} H(x, p) dx dp - \int_{H(x, p) \leq E_l} H(x, p) dx dp.$$

$$\begin{aligned}
\int_{H(x,p) \leq E_{l+1}} H(x,p) dx dp &= E_{l+1} \int_{p^2+x^\alpha < E_{l+1}} \left(\left(\frac{p}{\sqrt{E_{l+1}}} \right)^2 + \left(\frac{x}{E_{l+1}^{1/\alpha}} \right)^\alpha \right) dx dp \\
&= E_{l+1}^{5/2+3/\alpha} \int_{(p/\sqrt{E_{l+1}})^2 + (x/E_{l+1}^{1/\alpha})^\alpha < 1} \left(\left(\frac{p}{\sqrt{E_{l+1}}} \right)^2 + \left(\frac{x}{E_{l+1}^{1/\alpha}} \right)^\alpha \right) d\left(\frac{x}{E_{l+1}^{1/\alpha}} \right) d\left(\frac{p}{\sqrt{E_{l+1}}} \right) \\
&= E_{l+1}^{5/2+3/\alpha} \int_{p^2+x^\alpha \leq 1} (p^2+x^\alpha) dx dp \equiv C_\alpha E_{l+1}^{5/2+3/\alpha}. \\
\int_{E_l \leq H(x,p) \leq E_{l+1}} H(x,p) dx dp &= C_\alpha (E_{l+1}^{5/2+3/\alpha} - E_l^{5/2+3/\alpha}).
\end{aligned}$$

Это приводит к теореме, аналогичной теореме 1. В случае более сложной зависимости потенциала от координат получаем интеграл от гамильтониана

$$p^2 + V(r),$$

где $V(r)$ монотонно возрастает с ростом r , и рассмотрим интеграл от гамильтониана $H(x,p) = p^2 + V(r)$ по области

$$D = \{|x| \leq c, E_l \leq H(x,p) \leq E_{l+1}\}.$$

Интерес представляет случай, когда $E_{l+1} < r(c)$, где через $r(v)$ обозначено решение уравнения $V(r) = v$. Тогда

$$D = \{E_l \leq H(x,p) \leq E_{l+1}\}$$

(условие $|x| \leq c$ выполнено автоматически) и

$$\int_D H(x,p) d^3x d^3p = 16\pi^2 (F(E_{l+1}) - F(E_l)),$$

где

$$\begin{aligned}
F(v) &= \int_0^{r(v)} \left(\int_0^{\sqrt{v-V(r)}} (p^2 + V(r)) p^2 dp \right) r^2 dr \\
&= \int_0^{r(v)} \left(\frac{1}{5} (v - V(r))^{5/2} + \frac{1}{3} V(r) (v - V(r))^{3/2} \right) r^2 dr.
\end{aligned} \tag{8}$$

Вычислим разность $F(E_{l+1}) - F(E_l)$:

$$\begin{aligned}
F(E_{l+1}) - F(E_l) &= \int_{r(E_l)}^{r(E_{l+1})} \left(\frac{1}{5} (E_{l+1} - V(r))^{5/2} + \frac{1}{3} V(r) (E_{l+1} - V(r))^{3/2} \right) r^2 dr \\
&\quad + \int_0^{r(E_l)} \left(\frac{1}{5} (E_{l+1} - V(r))^{5/2} - \frac{1}{5} (E_l - V(r))^{5/2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} V(r) ((E_{l+1} - V(r))^{3/2} - (E_l - V(r))^{3/2}) \right) r^2 dr.
\end{aligned}$$

Далее,

$$(E_{l+1} - V(r))^s = \frac{1}{s} \int_{V(r)}^{E_{l+1}} (\lambda - V(r))^{s-1} d\lambda = (E_l - V(r))^s + \frac{1}{s} \int_{E_l}^{E_{l+1}} (\lambda - V(r))^{s-1} d\lambda,$$

откуда

$$F(E_{l+1}) - F(E_l) = \frac{1}{2} \int_{r(E_l)}^{r(E_{l+1})} \left(\int_{V(r)}^{E_{l+1}} \lambda(\lambda - V(r))^{1/2} d\lambda \right) r^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^{r(E_l)} \left(\int_{E_l}^{E_{l+1}} \lambda(\lambda - V(r))^{1/2} d\lambda \right) r^2 dr.$$

Таким образом,

$$\int_{E_l \leq H(x,p) \leq E_{l+1}} H(x,p) d^3x d^3p < \int_{\substack{E_l \leq H_0(p) \leq E_{l+1} \\ |x| \leq c}} H_0(p) d^3x d^3p.$$

В частном случае, когда $V(r) = r^\alpha$, получаем из (8)

$$F(v) = \int_0^{v^{1/\alpha}} \left(\frac{1}{5}(v - r^\alpha)^{5/2} + \frac{1}{3}r^\alpha(v - r^\alpha)^{3/2} \right) r^2 dr.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменной

$$r = v^{1/\alpha} \xi.$$

Тогда получим

$$F(v) = v^{3/\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{5}(v - v\xi^\alpha)^{5/2} + \frac{1}{3}v\xi^\alpha(v - v\xi^\alpha)^{3/2} \right) \xi^2 d\xi = v^{5/2+3/\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{5}(1 - \xi^\alpha)^{5/2} + \frac{1}{3}\xi^\alpha(1 - \xi^\alpha)^{3/2} \right) \xi^2 d\xi \equiv C_\alpha v^{5/2+3/\alpha},$$

где

$$C_\alpha = \int_0^1 \left(\frac{1}{5}(1 - \xi^\alpha)^{5/2} + \frac{1}{3}\xi^\alpha(1 - \xi^\alpha)^{3/2} \right) \xi^2 d\xi.$$

Таким образом, в этом случае

$$\int_{E_l \leq p^2 + r^\alpha \leq E_{l+1}} (p^2 + r^\alpha) d^3x d^3p = 16\pi^2 C_\alpha (E_{l+1}^{5/2+3/\alpha} - E_l^{5/2+3/\alpha}).$$

Это позволяет обобщить теорему 1 на случай более общей зависимости от потенциала. Оценки теоремы 1 будут выполнены, но они могут быть улучшены².

Для перенасыщенного газа мы получаем в результате формулу для распределения по координатам, отличающуюся от известного распределения Больцмана и переходящую в распределение Больцмана в случае, когда газ не является перенасыщенным. Формула имеет вид

$$F(\beta U) = \beta^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_x dp_y dp_z}{e^{\beta U} e^{\beta |p|^2/2m} - 1} = 4\pi(2m)^{3/2} e^{-\beta U} \Phi\left(e^{-\beta U}; \frac{3}{2}; 1\right), \quad (9)$$

где Φ – специальная функция, задаваемая формулой

$$\Phi(\alpha, \nu, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu + n)^{-\nu} \alpha^n.$$

²Точные оценки приведены в нашей статье с В. Е. Назайкинским в этом же номере.

Нормированная функция имеет вид

$$\Psi(-bU) = \frac{F(bU(x))}{\int F(bdx) dx}.$$

При увеличении давления и температуры начинает играть роль взаимодействие между частицами. Рассмотрим потенциал вида Ленарда-Джонса

$$\Phi_1(r) = 4\varepsilon \left\{ \left(\frac{d}{r} \right)^{12} - \left(\frac{d}{r} \right)^6 \right\}, \quad (10)$$

где d и ε – постоянные, имеющие размерность энергии и длины соответственно. Длина d есть эффективный поперечник частицы; при $r = a$ имеем $\Phi(d) = 0$. Величина ε определяет глубину потенциальной ямы $\Phi(r)$ и, следовательно, характеризует интенсивность межмолекулярных сил [9; с. 29].

Это более ярко проявляется на примере газа фуллерена. Как следует из нижеприводимой формулы для газа фуллерена

$$\Phi_2(r) = 4\varepsilon \left\{ \left(\frac{d}{r} \right)^{43} - \left(\frac{d}{r} \right)^9 \right\}, \quad (11)$$

где $d = 0.96$ нанометра, $\varepsilon/R = 6150$ К (кельвина), R – константа Больцмана; радиус молекулы фуллерена равен 0.35 нанометра.

Мы будем рассматривать регуляризованное взаимодействие при $r > r_0(b)$, где $r_0(b)$ – некоторый радиус, зависящий от температуры, который мы ниже определим.

Рассмотрим уравнение для одетого потенциала

$$U(x, y, z, r_0(b)) = U_0(x, y, z) + \int_{r \geq r_0(b)}^{\infty} \Phi(r) \Psi[-bU(\xi, \eta, \zeta, r_0(b)) - E_0(r_0(b))] d\xi d\eta d\zeta, \quad (12)$$

U_0 – внешний потенциал,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r \geq r_0(b),$$

$$E_0 = \min U(x, y, z, r_0(b)),$$

так что

$$E^0 : U(x, y, z, r_0(b)) \geq E_0(r_0(b))$$

может быть и отрицательным.

Величину $r_0(b)$ мы найдем из условия

$$\min_{x,y,z} \Psi(-b(U(x, y, z, r_0(b)))) = \frac{\Delta_t N}{N},$$

поскольку при $r_0(b) \rightarrow 0$ некоторые точки $U(x, y, z, r_0(b))$ будут стремиться к бесконечности, а значит, Ψ будет стремиться к нулю. Мы ограничиваем это стремление величиной той точности, с которой выводится само распределение.

Мы получаем таким образом, что учет взаимодействия приводит к увеличению “размерности” (см. [10]) от $3/2$ до 3 , и тем самым, к увеличению сжимаемости до величины, равной 2 .

3. Дисперсионное соотношение для квазичастиц

3.1. Квазичастицы. Теперь коснемся понятия, которое называется “коллективные колебания” в классической физике и “квазичастицы” в квантовой физике. В классической физике уравнение Власова самосогласованного (или среднего) поля, а в квантовой – это уравнение Хартри (или Хартри–Фока).

Уравнения в вариациях зависят от того, около каких решений исходного уравнения мы рассматриваем вариации. Например, в [11]–[14] мы рассматриваем вариации около микроканонического распределения в эргодической конструкции, а в [15]–[18] – около наноканонического распределения, сосредоточенного на инвариантном многообразии меньшей размерности, т.е. не на многообразии постоянной энергии, а, например, на лагранжевом многообразии размерности, совпадающей с размерностью конфигурационного пространства.

Отметим важный момент: решения уравнения в вариациях для уравнения Власова не совпадают с классическим пределом для уравнений в вариациях для уравнений среднего поля в квантовой теории. Этот вопрос рассматривался в работе [19; с. 388–391].

3.2. Наноканоническое распределение и уравнения в вариациях. Рассмотрим классическое уравнение самосогласованного поля (уравнение Власова) для функции распределения $\rho(x, p, t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + p \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) (\rho(\xi, \eta, t) d\xi d\eta) = 0, \quad (13)$$

где $u(x) \in C^2$ и $V(x) \in C^2$ – внешний потенциал и потенциал взаимодействия соответственно. Здесь

$$p \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left(p, \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial p} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \rho}{\partial p} \right),$$

и т.д. Для краткости мы обычно опускаем явное указание на скалярное произведение n -векторов, если это не мешает пониманию.

Уравнения в вариациях имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + p \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial p} - \alpha \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) \sigma(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \\ - \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - \xi) \rho(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $\Lambda^n = \{x = X(\alpha), p = P(\alpha)\}$ – лагранжево многообразие, инвариантное относительно гамильтоновой системы

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int V(x - X(\alpha)) d\mu_\alpha, \end{cases} \quad (15)$$

(см. [20], [21]) такое, что соответствующий гамильтониан H инвариантен на Λ^n ,

$$\frac{P^2(\alpha)}{2} + u(X(\alpha)) + \int V(X(\alpha) - X(\alpha')) d\mu_{\alpha'} = E = \text{const}, \quad (16)$$

где $\alpha \in \Lambda^n$ и $d\mu_\alpha$ – инвариантная мера на Λ^n [15], [16], [22].

Известно, что δ -функция на многообразии постоянной энергии называется микроканоническим распределением.

3.3. Локальная карта. Пусть δ_Λ является δ -функцией на многообразии Λ . Будем называть это распределение *наноканоническим*. Как было доказано в [15], δ_Λ удовлетворяет стационарному уравнению Власова (13) в локальной карте на Λ ; δ_Λ имеет вид

$$\delta_\Lambda = \frac{\delta(p - \nabla S)}{J},$$

где

$$S(x) = \int_{\alpha_0}^{\alpha(x)} p \, dx$$

есть действие на Λ^n , а J – якобиан $|dX/d\mu_\alpha|$. В этом случае решение уравнения (14) может быть получено в виде

$$\sigma = f(x) \frac{\delta(p - \nabla S)}{J} + \mathbf{a}(x) \frac{\partial}{\partial p} \frac{\delta(p - \nabla S)}{J}. \quad (17)$$

Уравнения для f и $\mathbf{a}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla S, \nabla f) - (\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \nabla) \ln J &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla S, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \nabla S + \nabla \int V(x - X(\alpha)) f(X(\alpha)) \, d\mu_\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Здесь мы введем квантовую поправку для уравнения, выведенного в [17],

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla S, \nabla f) - (\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \nabla) \ln J - \frac{i\hbar}{2} J \nabla \left(\frac{1}{J} \nabla f \right) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\nabla S, \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a}, \nabla) \nabla S + \frac{i\hbar}{2} \nabla \left\{ J \left(\nabla, \frac{\mathbf{a}}{J} \right) \right\} &= 0, \\ + \nabla \int V(x - X(\alpha)) f(X(\alpha)) \, d\mu_\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Эта поправка не исчезает при $\hbar \rightarrow 0$, так как умножается на число, которое в классической теории может принимать значения порядка $1/n$ (см. [19; с. 388–391]).

В главном члене квазиклассической асимптотики

$$f = f_0 e^{i/\hbar S_1}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_0 e^{i/\hbar S_1} \quad (19)$$

мы получаем классические уравнения в вариациях. Таким образом, квазиклассический предел уравнений в вариациях для уравнений Хартри содержит лишний член по сравнению с уравнениями в вариациях для уравнений Власова. Этот лишний член обуславливает явление свехтекучести.

Рассмотрим случай, когда $u(x) = 0$. Тогда инвариантное лагранжево многообразие есть плоскость $p = p_0$, δ -функция на этом многообразии имеет вид $\delta_\Lambda = \delta(p - p_0)$. Легко видеть, что решение уравнений (18)

$$f(x, t) = f_0 e^{i(\omega t + kx)/\hbar}, \quad \mathbf{a}(x, t) = \mathbf{a}_0 e^{i(\omega t + kx)/\hbar} \quad (20)$$

дает знаменитое дисперсионное соотношение Боголюбова для бозе-газа, которое, в частности, описывает свехтекучее состояние жидкого гелия.

3.4. Общий случай. Чтобы получить соответствующие уравнения в других картах атласа, покрывающего лагранжево многообразие Λ , дадим общее определение наноканонического распределения на Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть Λ^n лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, и пусть σ – мера на Λ^n . Пусть $e_i(\alpha)$ разбиение единицы на Λ^n , соответствующее разбиению на канонические карты (другими словами, $\text{supp } e_i(\alpha)$ проектируется диффеоморфно на координатную плоскость $(x_I p_I) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, p_{i_{k+1}}, \dots, p_{i_n})$). Тогда функция

$$\sum_i \frac{\delta(p_I - \partial S^I(x_I, p_I)/\partial x_I) \delta(x_I - \partial S^I(x_I, p_I)/\partial p_I) e_i^I(\alpha)}{D(p_I, x_i)/D\sigma}, \quad (21)$$

где

$$S^I = \int p_I dx_I - \int x_I dp_I$$

– действие в карте типа I , называется δ_Λ -функцией на Λ и обозначается F_Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функция δ_Λ не зависит от разбиения единицы.

Для простоты рассмотрим только p - и x -карты. Пусть Λ (локально) определено уравнениями $p = p(\alpha)$, $x = x(\alpha)$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \int \varphi(p, x) \frac{\delta(p - \partial S/\partial x)}{Dx/D\sigma} e_i(\alpha(x)) dp dx &= \int \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right) \frac{e_i(\alpha(x))}{Dx/D\sigma} dx \\ &= \int \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial x}(x(\alpha)), x(\alpha)\right) e_i(\alpha) d\sigma \\ &= \int \varphi(p(\alpha), x(\alpha)) e_i(\alpha) d\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

(лагранжево многообразие Λ по определению локально задано уравнением $p(\alpha) = \partial S(x(\alpha))/\partial x$ в силу того, что $S(x) = \int p dx$). Аналогично в случае p -карты имеем

$$\begin{aligned} \int \varphi(p, x) \frac{\delta(x - \partial \tilde{S}/\partial p)}{Dp/D\sigma} e_i(\alpha(p)) dp dx &= \int \varphi\left(p, -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial p}\right) \frac{e_i(\alpha(p))}{Dp/D\sigma} dp \\ &= \int \varphi(p(\alpha), q(\alpha)) e_i(\alpha) d\sigma \end{aligned} \quad (23)$$

в силу того, что $\tilde{S} = -\int x dp$ и $\dot{x}(\alpha) = -\partial \tilde{S}/\partial p(p(\alpha))$.

3.5. Сверхтекучесть классических жидкостей. Казалось бы, мы тем самым установили, что сверхтекучесть имеет место и для классических жидкостей.

Таким образом, асимптотическое разложение рассматривается по двум параметрам $N \rightarrow \infty$ и $\hbar \rightarrow 0$ (квазиклассический предел). Как они связаны между собой? В работе Н. Н. Боголюбова 1947 года внешний потенциал отсутствует, и поэтому задача решается точно. Это значит, что точно так же, как для линейного уравнения с постоянными коэффициентами, квазиклассика совпадает с точным решением. А если ввести потенциал? В этом случае, как было сказано выше, квазиклассическое приближение даст квазичастицы, сохраняющие свойство сверхтекучести. Однако, во-первых, должны соблюдаться следующие условия на внешний потенциал:

у классической задачи самосогласованного поля должно существовать инвариантное лагранжево многообразие с “атомарной точностью”, т.е. потенциал должен быть “совершенно точен” и не допускается его возмущение “шумом” порядка $\hbar$.

Если это не так, то боголюбовский спектр в трехмерном случае разрушается (см. ниже п. 3.6, а также [14] и [23]) и эффект сверхтекучести пропадает.

Во-вторых, потенциал должен очень медленно меняться – настолько, чтобы изменение его на конечном интервале было бы не более величины порядка $1/N$. Такая “наноточность”, т.е. выполнение столь жестких ограничений возможно только при использовании нанотехнологий.

3.6. Случай микроканонического распределения и распределения (6).

Если малые случайные помехи “спутают” все карты, то инвариантных многообразий размерности, меньшей чем $2n - 1$, не будет, и мы можем говорить только о микроканоническом распределении

$$\delta\left(E - \frac{p^2}{2m} - W_t(x)\right), \quad E - \text{const},$$

которое приведет к соотношению (16). Уравнение в вариациях в этом случае после того, как мы пренебрежем малыми случайными помехами и положим $u(x) = 0$, $V(x, y) = V(x - y)$, будет иметь вид [14], [19]

$$\int \frac{|\lambda|^2 \tilde{V}(\lambda)}{\beta_\lambda + (p, \lambda)} \rho(p) dp = 1.$$

где $\rho(p) = \delta(p_0^2/2m - p^2/2m)$, откуда находится β_λ как функция $\lambda \in \mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^3$. Если учесть поправку, отвечающую уравнению Хартри, то соотношение примет вид [23]

$$\int \frac{|\lambda|^2 \tilde{V}(\lambda)}{\beta_\lambda + (p, \lambda) - \hbar^2/2m \cdot |\lambda|^4/4} \rho(p) dp = 1. \quad (24)$$

Как уже говорилось выше, эта добавка чисто классическая, так как не является малой при значении λ , сравнимом с $1/\sqrt{\hbar}$. Спектр (24) не является метастабильным в трехмерном случае, а значит, в “эргодической” картине сверхтекучесть отсутствует.

Переход в классическую теорию не коммутирует с удалением случайных помех, точно так же, как в примере с ямой Лившица малые изменения симметрии при $\hbar \rightarrow 0$ приводят к тому, что частица оказывается лишь в одной из впадин, согласно концепции XIX века.

Нетрудно проверить, что в случае наноканонического распределения формула (24) совпадает со спектром Боголюбова

$$\beta_\lambda = -p\lambda + \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m} + \tilde{V}_\lambda\right)^2 - \tilde{V}_\lambda^2}, \quad (25)$$

поскольку в этом случае распределение наноканоническое.

В формуле (24), так же как и в формуле Боголюбова (25), предполагается достаточная малость потенциала взаимодействия. Это значит, что $r_0(b)$, которое было

введено, сравнительно немало относительно малого параметра (малой плотности). В нашем случае надо положить $\rho(p)$ в формуле (24) распределением вида (6) в теореме 1:

$$\rho(p) = \frac{(e^{bp^2/2m} - 1)^{-1}}{\int (e^{bp^2/2m} - 1)^{-1} dp}. \quad (26)$$

Как уже упоминалось, формула (24) может быть проверена на эксперименте с помощью нейтронного потока.

4. Квантование вихрей

Уравнение “среднего поля”, “самосогласованного поля” в квантовой теории были использованы на 10 лет раньше, чем в классической. Никто не сделал перехода при $\hbar \rightarrow 0$. И лишь через 10 лет их применил А. А. Власов как уравнения, описывающие плазму. Он установил роль уравнений в вариациях, определяющих так называемые “коллективные колебания плазмы”. Это было одним из основных его достижений.

При рассмотрении задачи многих тел имеют место два аспекта. Эти многие тела могут находиться в нашем трехмерном пространстве и как-то двигаться, может быть, сталкиваться, воздействовать друг на друга. Все это в нашем трехмерном пространстве. Но мы можем рассматривать их и по-другому. А именно: можем рассматривать эти N тел как одну точку (под N телами я понимаю N материальных точек) в $3N$ -мерном пространстве. И в этом $3N$ -мерном пространстве эта одна точка совершает некоторое движение, перемещается, а мы можем следить за этим перемещением. В некоторых случаях оказывается полезен один из этих двух подходов, двух аспектов, а в других случаях – другой. Так, с точки зрения математики, проще рассматривать одну точку. А с точки зрения физики, так как мы живем все-таки в трехмерном пространстве, хотелось бы понимать, как материальные точки ведут себя в нашем трехмерном пространстве. Это более естественная “картина”. Можно, например, следить в трехмерном пространстве за одной частицей, которая находится в поле всех других частиц. В частности, теория самосогласованного поля Власова на этом основана. Там мы считаем, что все частицы примерно одинаковы и имеют одинаковое распределение. Мы можем считать, что одна частица как бы взаимодействует с другой. А та другая – это та же самая частица, т.е. распределена она точно так же, как и первая.

С математической точки зрения важно было бы не интуитивное, а точное уравнение в трехмерном пространстве, которое бы соответствовало уравнению движения частицы в $3N$ -мерном пространстве.

Оказывается, это можно сделать не интуитивно, как Власов, а точно с помощью вторичного квантования, т.е., иначе говоря, рассматривать поведение в трехмерном пространстве не функций, а операторов – операторов рождения и уничтожения. Впервые это было сделано Дираком для квантовой механики. Однако рассматривать именно квантовую механику совершенно необязательно. Так, Шенберг рассматривал классическую механику (это было приблизительно в 1953–1956 гг.) и применил этот метод вторичного квантования к классическим объектам и к классической статистической физике.

Современный вывод уравнения Власова может быть получен с помощью метода вторичного квантования для классических частиц. При этом при $N \rightarrow \infty$ получается система [24]

$$\begin{aligned}\dot{u}(p, q, t) &= \left(\frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) u(p, q, t) \\ &\quad + \int dp' dq' v(p', q', t) \left(\frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) u(p', q', t) u(p, q, t), \\ \dot{v}(p, q, t) &= \left(\frac{\partial U}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) v(p, q, t) \\ &\quad + \int dp' dq' u(p', q', t) \left(\frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) v(p', q', t) v(p, q, t),\end{aligned}\quad (27)$$

где $U(q_i)$ – внешнее поле, $V(q_i, q_j)$ – парное взаимодействие.

Если положить вместо u и v операторы рождения и уничтожения $\hat{u}$, $\hat{v}$ в пространстве Фока, то после такой замены система (27) будет эквивалентна N -частичной задаче для системы Ньютона. Именно, проекция из пространства Фока в $3N$ -мерное пространство N частиц даст в точности систему уравнений Ньютона. Отсюда следует, что «уравнением характеристик для них с точки зрения операторного подхода будет уравнение Власова» [25; с. 10]. Этот подход позволяет получить поправки к уравнению Власова и разложению N -частичных уравнений Ньютона по степеням $1/N$.

Отметим, что подстановкой

$$u(p, q, t) = \sqrt{\rho(p, q, t)} e^{i\pi(p, q, t)}, \quad v(p, q, t) = \sqrt{\rho(p, q, t)} e^{-i\pi(p, q, t)} \quad (28)$$

система (27) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(p, q, t) &= \left(\frac{\partial W^t}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \rho(p, q, t), \\ \dot{\pi}(p, q, t) &= \left(\frac{\partial W^t}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \pi(p, q, t) + \int dp' dq' \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial \pi(p', q', t)}{\partial p'} \rho(p', q', t);\end{aligned}\quad (29)$$

здесь $W^t(q) = U(q) + \int dq' V(q, q') \rho(p', q', t) dp' dq'$.

Первое уравнение системы (29) является уравнением Власова [26], где ρ – функция распределения, которое используется в физике при изучении систем многих частиц; второе, новое, уравнение является линейным по функции $\pi(p, q, t)$. Функции u и v называются *полуплотностью*, а $\pi(p, q, t)$ – *фазой*. Полуплотность играет существенную роль в квазиклассическом приближении волновой функции квантовой механики. Фаза $\pi(p, q, t)$ играет роль, когда потенциал $V(x - y)$ имеет особенность, а решение имеет нить ветвления (вихревая нить). Тогда для условия существования однозначного значения $e^{i\pi}$ дает условия квантования для $\pi(p, q, t)$ – квантование вихрей, имеющих место и в классических задачах.

Поскольку уравнение для $\pi(p, q, t)$ линейно, то мы можем делить $\pi(p, q, t)$ на любую константу. Из размерности следует, что $\pi(p, q, t)$ нужно делить на константу Планка $\hbar$. Таким образом, $\hbar$ возникает в чисто классической задаче. Квантование вихрей димеров газа аргон может быть проверено на эксперименте при облучении газа коротковолновым радиоизлучением и наличием резонансного поглощения.

5. Двухчастичная функция распределения

Для определения кривой плавления и скачка плотности вдоль нее Е. Е. Тареева и В. Н. Рыжов [27], [28] применяли двухчастичные функции распределения, подобные тем, которые возникают в цепочке Боголюбова. Разложение этих функций в окрестности кривой плавления по степеням разности одночастичных функций распределения в жидкой и кристаллической фазе позволило описать фазовый переход при кристаллизации.

Поскольку двухчастичная функция распределения более строго описывается истинным символом при ультравторичном квантовании [23], мы рассмотрим вначале оператор $\hat{H}$, эквивалентный системе многочастичных уравнений Ньютона с парным взаимодействием.

Обозначим через $\hat{H}$ такой оператор:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & i \int dp dq \Psi^+(p, q) \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \Psi^-(p, q) \\ & + i \iint dp dq dp' dq' \Psi^+(p, q) \Psi^+(p', q') \\ & \times \left(\frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) \Psi^-(p', q') \Psi^-(p, q). \end{aligned} \quad (30)$$

Пусть $\hat{\rho}_B$ – оператор, введенный в [23] и в [29] в формуле (19).

Обозначим через

$$\mathcal{H}_B(b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)) = \frac{\text{Sp } \hat{\rho}_B \hat{H}}{\text{Sp } \hat{\rho}_B}$$

псевдосимвол этого двухчастичного оператора.

Здесь $\hat{\rho}_B$ зависит от функций $b(x, s)$, $B(y, y')$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_B = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{k! M! (k+2M)!} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \int \int dx dx' b(x, s) b^*(x', s) \hat{\psi}^+(x) \hat{\psi}^-(x') \right)^k \\ & \times \left(\iint dy_1 dy_2 B(y_1, y_2) \hat{\psi}^+(y_1) \hat{\psi}^+(y_2) \right)^M \\ & \times \left(\iint dy'_1 dy'_2 B(y'_1, y'_2) \hat{\psi}^-(y'_1) \hat{\psi}^-(y'_2) \right)^M \exp \left(- \int dz \hat{\psi}^+(z) \hat{\psi}^-(z) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\hat{\psi}^+(x)$, $\hat{\psi}^-(x)$ – бозевские операторы рождения и уничтожения, упорядоченные по Вику [30].

Пусть $\mathcal{F}$ – бозонное пространство Фока [30], $\hat{b}^+(x, s)$ – оператор рождения частиц с номером s , $\hat{b}^-(x, s)$ – оператор уничтожения частиц с номером s в пространстве $\mathcal{F}$ [30], $\hat{B}^+(x, x')$, $\hat{B}^-(x, x')$ – операторы рождения и уничтожения пары частиц. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям для бозонов b^- и b^+

$$\begin{aligned} [\hat{b}^-(x, s), \hat{b}^+(x', s')] &= \delta_{ss'} \delta(x - x'), \\ [\hat{b}^{\pm}(x, s), \hat{b}^{\pm}(x', s')] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\widehat{B}^-(x_1, x_2) \widehat{B}^+(x'_1, x'_2)] &= \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2), \\
[\widehat{B}^\pm(x_1, x_2), \widehat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= 0, \\
[\widehat{b}^\pm(x, s), \widehat{B}^\pm(x'_1, x'_2)] &= [\widehat{b}^\pm(x, s), \widehat{B}^\mp(x'_1, x'_2)] = 0.
\end{aligned}$$

Эти операторы нужно подставить в символ $\mathcal{H}_B(b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot))$ и получить оператор $\widehat{\mathcal{H}}_B$, а затем вычислить его истинный символ, который позволит написать самосогласованные уравнения для двухчастичной функции распределения (полуплотностей).

Рассмотрим случай ультравторичного квантования только по парам. В этом случае истинным символом является следующий функционал:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}[\Phi^+(\cdot), \Phi(\cdot)] &= i \iint dp dq dp' dq' \Phi^+(p, q, p', q') \\
&\quad \times \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial U(q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} - p \frac{\partial}{\partial q} - p' \frac{\partial}{\partial q'} \right) \Phi(p, q, p', q') \\
&\quad + 2i \int \dots \int dp dq dp' dq' dp_1 dq_1 dp'_1 dq'_1 \Phi^+(p, q, p', q') \Phi^+(p_1, q_1, p'_1, q'_1) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} \right) \Phi(p', q', p'_1, q'_1) \Phi(p, q, p_1, q_1).
\end{aligned} \tag{32}$$

Соответствующая система самосогласованных уравнений для двухчастичных функций распределения (полуплотностей) имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(p, q, p', q', t) &= \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \Phi(p, q, p', q', t) \\
&\quad + 2 \iint dp_1 dq_1 dp'_1 dq'_1 \Phi^+(p_1, q_1, p'_1, q'_1, t) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial V(q, q')}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q')}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V(q_1, q'_1)}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{\partial V(q_1, q'_1)}{\partial q'_1} \frac{\partial}{\partial p'_1} \right) \\
&\quad \times \Phi(p', q', p'_1, q'_1, t) \Phi(p, q, p_1, q_1, t), \\
\frac{\partial \Phi^+}{\partial t}(p, q, p', q', t) &= \left(\frac{\partial U(q)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - p \frac{\partial}{\partial q} \right) \Phi^+(p, q, p', q', t) \\
&\quad + 2 \iint dp_1 dq_1 dp'_1 dq'_1 \Phi(p_1, q_1, p'_1, q'_1, t) \times \\
&\quad \times \left(\frac{\partial V(q, q_1)}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial V(q, q_1)}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial V(q', q'_1)}{\partial q'} \frac{\partial}{\partial p'} + \frac{\partial V(q', q'_1)}{\partial q'_1} \frac{\partial}{\partial p'_1} \right) \\
&\quad \times \Phi^+(p', q', p'_1, q'_1, t) \Phi^+(p, q, p_1, q_1, t),
\end{aligned} \tag{33}$$

где функции $\Phi(p, q, p', q', t)$ и $\Phi^+(p, q, p', q', t)$ симметричны относительно перестановки пар p, q и p', q' .

ТЕОРЕМА 2. *Величина*

$$\int \Phi(p, q, p', q', t) \Phi^+(p, q, p', q', t) dp dq dp' dq'$$

не зависит от времени t .

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Разумеется $\int \rho(p, q, t) dp dq$ также сохраняется. Однако в силу того, что после “выпадения в конденсат” число частиц в газе не есть интеграл по всем энергиям, а лишь по энергиям от некоторого E_l до бесконечности, одночастичная “газовая” формула распределения и число частиц в газе могут меняться со временем. С другой стороны, одночастичное распределение в жидкости в силу наличия в ней большого числа квантованных вихрей (существенного увеличения вращательных составляющих молекул), не будет совпадать с распределением в газе, и мы можем лишь гарантировать в силу теоремы 2 сохранение полного числа частиц.

Автор приносит глубокую благодарность Е. Е. Тареевой, В. Е. Назайкинскому и Г. В. Ковалю за острые дискуссии.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Решение парадокса Гиббса в рамках классической механики (статистики) и кристаллизация газа C_{60} ”, *Матем. заметки*, **83**:5 (2008), 787–791.
- [2] V. P. Maslov, “Revision of probability theory from the point of view of quantum statistics”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 66–95.
- [3] В. П. Маслов, “Квазитермодинамическая поправка к закону Стефана–Больцмана”, *ТМФ*, **154**:1 (2008), 207–208.
- [4] В. П. Маслов В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. Г”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [5] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1975.
- [6] К. Чандрасекар, *Арифметические функции*, Наука, М., 1975.
- [7] А. М. Вершик, “Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.
- [8] А. И. Бурштейн, *Молекулярная физика*, Наука, Новосибирск, 1986.
- [9] И. З. Фишер, *Статистическая теория жидкостей*, Наука, М., 1961.
- [10] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2006.
- [11] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds and (in the ergodic case) with constant energy manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields. V”, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:4 (1996), 529–534.
- [12] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. VI”, *Russ. J. Math. Phys.*, **4**:1 (1996), 117–122.
- [13] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with isoenergetic manifolds corresponding to classical self-consistent fields. VII”, *Russ. J. Math. Phys.*, **4**:2 (1996), 266–270.
- [14] В. П. Маслов, А. С. Мищенко, “Квазиклассическая асимптотика квазичастиц”, *Матем. сб.*, **189**:6, 85–116.
- [15] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. I”, *Russ. J. Math. Phys.*, **2**:4 (1994), 528–534.
- [16] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to classical self-consistent fields. II”, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:1 (1995), 123–132.

- [17] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields. III”, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 271–276.
- [18] V. P. Maslov, “Quasi-particles associated with Lagrangian manifolds corresponding to semiclassical self-consistent fields. IV”, *Russ. J. Math. Phys.*, **3**:3 (1995), 401–406.
- [19] В. П. Маслов, “О сверхтекучести классической жидкости в нанотрубке для четного и нечетного числа нейтронов в молекуле”, *ТМФ*, **153**:3 (2007), 388–408.
- [20] В. П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений*, Наука, М., 1976.
- [21] В. П. Маслов, *Уравнения самосогласованного поля*, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем., **11**, ВИНТИ, М., 1978.
- [22] М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991.
- [23] В. П. Маслов, *Квантование термодинамики и ультравторичное квантование*, Ин-т компьют. исслед., М., 2001.
- [24] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов, *Метод комплексного роста в многочастичных задачах и задачах квантовой теории поля*, УРСС, М., 2000.
- [25] В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*, Наука, М., 1977.
- [26] А. А. Власов, “О вибрационных свойствах электронного газа”, *ЖЭТФ*, **8** (1938), 291–318.
- [27] E. E. Tareyeva, “On a microscopic approach to the theory of polymorphic phase transitions”, *Phys. Lett. A*, **49**:4 (1974), 309–310.
- [28] V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, “Towards a statistical theory of freezing”, *Phys. Lett. A*, **75**:1–2 (1979), 88–90.
- [29] В. П. Маслов, “О законе дисперсии вида $\varepsilon(p) = \hbar^2 p^2 / 2m + \tilde{V}(p) - \tilde{V}(0)$ элементарных возбуждений неидеального ферми-газа в приближении парного взаимодействия ($i \leftrightarrow j$), $V(|x_i - x_j|)$ ”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 690–708.
- [30] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1987.

В. П. Маслов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило
17.04.2008