Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, О распределении
целочисленных случайных величин, связанных одним
линейным неравенством. III, *Матем. заметки*, 2008,
том 83, выпуск 6, 880–898

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:17:16

О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. III

В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский

Рассматриваются наборы $\{N_{jk}\}$, $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, целых неотрицательных чисел, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \leq M.$$

В предположении, что $q_j \sim j^{d-1}$, $1 < d < 2$, исследуются вероятности уклонений сумм $\sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}$ от соответствующих интегралов для бозе-эйнштейновского распределения в зависимости от интервала $[j_1, j_2]$.

Библиография: 5 названий.

1. Основной результат

Пусть задана последовательность натуральных чисел

$$q_j = j^{d-1} + r_j, \quad |r_j| < 1, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $1 < d < 2$, а суммы

$$R_j = \sum_{s=1}^j r_s \quad (2)$$

равномерно ограничены:

$$|R_j| \leq C, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

для некоторой постоянной $C > 0$. Рассмотрим всевозможные наборы целых неотрицательных чисел N_{jk} , $j = 1, 2, \dots$, $k = 1, \dots, q_j$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{q_j} j N_{jk} \leq M \quad (4)$$

(их число конечно, и в каждом из них есть лишь конечное число ненулевых N_{jk}). Для заданного набора $\{N_{jk}\}$ положим

$$N_j = \sum_{k=1}^{q_j} N_{jk}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad N = \sum_{j=1}^{\infty} N_j. \quad (5)$$

При $M \rightarrow \infty$ число N оказывается для большинства наборов $\{N_{jk}\}$ близким к числу

$$N_0 = M^{d/(d+1)} \frac{\Gamma(d)\zeta(d)}{(\Gamma(d+1)\zeta(d+1))^{d/(d+1)}} \quad (6)$$

в следующем смысле. Если через $\mathcal{N}(M)$ обозначить общее число наборов $\{N_{jk}\}$, подчиненных соотношению (4), а через $\mathcal{N}(M, |N - N_0| > \Delta)$ — число тех из них, которые, кроме того, удовлетворяют условию

$$|N - N_0| > \Delta, \quad (7)$$

то при $\Delta = N_0^{1/d} \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)}$, где $\chi(x)$ — произвольно выбранная положительная функция, растущая (сколь угодно медленно) на бесконечности, доля последних мал: выполнены оценки

$$\frac{\mathcal{N}(M, |N - N_0| > N_0^{1/d} \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)})}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m N_0^{-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

с некоторыми постоянными C_m (см. [1; теорема 1], где доказан чуть более слабый результат с $\Delta = N_0^{1/d+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$).

Оценки (8) сохраняются (см. там же), если в формуле (5) заменить сумму по всем j от 1 до ∞ суммой по некоторому интервалу $j_1 \leq j \leq j_2$ (одновременно заменяя и N_0 под знаком модуля на подходящее выражение). Именно,

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left| \sum_{j=j_1}^{j_2} N_j - b^{-d} \int_{bj_1}^{bj_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} \right| > N_0^{1/d} \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)}\right)}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m N_0^{-m}, \quad (9)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

где параметр b связан с M соотношением

$$M = b^{-d-1} \Gamma(d+1) \zeta(d+1). \quad (10)$$

Если суммирование по j в (9) начинается с достаточно высокого номера j_1 , а именно, если $j_1^{-1} = O(b^\gamma)$ для некоторого $\gamma \in (0, 1]$, то оценку интервала отклонений, в котором концентрируется большинство вариантов, можно улучшить, заменяя показатель степени $1/d$ в выражении для этого интервала на меньшее число. Справедлива следующая теорема (ср. [1; теорема 4]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$j_1 \geq Cb^{-\gamma} \quad \text{для некоторых } \gamma \in (0, 1], \quad C > 0, \quad (11)$$

и пусть $\chi(x)$ — растущая на бесконечности положительная функция. Тогда существуют такие постоянные C_m , что выполнены оценки

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left| \sum_{j=j_1}^{j_2} N_j - b^{-d} \int_{bj_1}^{bj_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} \right| > N_0^\alpha \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)}\right)}{\mathcal{N}(M)} \leq C_m N_0^{-m}, \quad (12)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{(1-\gamma)}{d}. \quad (13)$$

Возникает естественный вопрос, является ли теорема 1 оптимальной, т.е. нельзя ли еще уменьшить показатель степени α в оценке

$$\Delta = N_0^\alpha \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)} \quad (14)$$

интервала отклонений, вне которого доля вариантов мала.

Основной результат данной статьи состоит в том, что при дополнительном условии на интервал $[j_1, j_2]$ (он не должен быть слишком узким) этот показатель неулучшаем. Мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\gamma \in (0, 1)$, а j_1 и j_2 удовлетворяют неравенствам

$$C_1 b^{-\gamma} \leq j_1 \leq C_2 b^{-\gamma}, \quad j_2 \geq j_1 + C_3 b^{-\gamma} \quad (15)$$

с положительными постоянными C_1, C_2, C_3 . Если

$$\Delta = C N_0^\alpha, \quad (16)$$

где α задается формулой (13), то

$$\frac{\mathcal{N}\left(M, \left| \sum_{j=j_1}^{j_2} N_j - b^{-d} \int_{bj_1}^{bj_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} \right| > \Delta\right)}{\mathcal{N}(M)} \geq \tilde{C} \quad (17)$$

для некоторой постоянной $\tilde{C} > 0$, зависящей от C .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналог утверждения теоремы имеет место и при $\gamma = 1$. Однако доказательства в этом случае несколько отличаются, и этот случай будет рассмотрен в другой работе.

Таким образом, вместе теоремы 1 и 2 дают весьма близкие друг к другу оценки сверху и снизу для ширины интервала, содержащего большинство вариантов: если $\Delta = N_0^\alpha \sqrt{\ln N_0 \chi(N_0)}$, то большинство вариантов содержится в таком интервале, но уже при $\Delta = C N_0^\alpha$ число вариантов, лежащих вне интервала, имеет тот же порядок, что и общее число вариантов. Ширина интервала зависит от того, на каком отрезке $[j_1, j_2]$ значений индекса j вычисляется отклонение — чем больше j_1 , тем уже этот интервал, и при $j_1 \sim b^{-1}$ получаем

$$\Delta = \sqrt{N_0 \ln N_0 \chi(N_0)}, \quad (18)$$

как и в размерностях $d > 2$ (см. [2]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Слабая сходимости подходящим образом масштабированных последовательностей $\{N_j\}$ к предельному распределению $x^{d-1}/(e^x - 1)$ была установлена в контексте теории разбиений А. М. Вершиком (см., например, [3], [4]). Однако оценки интересующего нас вида в этих работах не рассматривались и зависимость величины отклонений от интервала, на котором последовательность $\{N_j\}$ сравнивается с предельной функцией распределения, не изучалась.

2. Доказательства теорем

2.1. Предварительные замечания.

2.1.1. *Обозначения.* В доказательствах будет повсеместно использоваться стандартное обозначение $f \asymp g$, которое по определению означает, что отношение f/g ограничено сверху и снизу положительными постоянными. Буквой C , иногда с индексами, всегда обозначаются положительные постоянные, возможно, различные в разных формулах и рассуждениях.

2.1.2. *Переход от интегралов к суммам.* Соотношения (6) и (10) между b , M и N_0 , равно как и интегральное выражение

$$b^{-d} \int_{bj_1}^{bj_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1}, \quad (19)$$

с которым сравнивается сумма $\sum_{j=j_1}^{j_2} N_j$ в теоремах 1 и 2, получаются применением формул Эйлера–Маклорена к некоторым суммам. В доказательстве этих теорем нам будет удобнее оперировать с самими этими суммами, а не с интегралами. В данном пункте мы проверим, что интегралы в утверждениях теорем 1 и 2 можно заменить на эти суммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если в теоремах 1 и 2 предполагать, что M , b и N_0 связаны вместо соотношений (6) и (10) соотношениями*

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1}, \quad N = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad (20)$$

а интеграл (19) заменить на сумму

$$\bar{N}(j_1, j_2) = \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad (21)$$

то полученные при этом утверждения будут эквивалентны исходным теоремам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство разобьем на несколько утверждений.

ЛЕММА 6. *Имеет место равенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} = b^{-d-1} \Gamma(d+1) \zeta(d+1) + O(b^{-d}). \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Такого рода утверждения хорошо известны; нетривиальным моментом, на который мы и обратим основное внимание, является точная оценка остаточного члена. В соответствии с формулой (1)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^d}{e^{bj} - 1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j r_j}{e^{bj} - 1} \equiv \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Пользуясь формулой Эйлера–Маклорена (формула (117) из приложения), получаем

$$\Sigma_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^d dx}{e^{bx} - 1} + Q = b^{-d-1} \int_0^{\infty} \frac{x^d dx}{e^x - 1} + Q = b^{-d-1} \Gamma(d+1) \zeta(d+1) + Q,$$

где остаточный член Q удовлетворяет оценке

$$\begin{aligned} |Q| &\leq \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{x^d}{e^{bx} - 1} \right) \right| dx \leq C \int_0^\infty \frac{x^{d-1} dx}{e^{bx} - 1} + b \int_0^\infty \frac{x^d e^{bx} dx}{(e^{bx} - 1)^2} \\ &= C b^{-d} \int_0^\infty \left(\frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} + \frac{x^d e^{bx} dx}{(e^{bx} - 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Оба интеграла сходятся, поскольку $d - 2 > -1$, так что $Q = O(b^{-d})$.

Оценим теперь Σ_2 . Обозначим для краткости $j(e^{bj} - 1)^{-1} = g_j$. Тогда

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1}^\infty r_j g_j = R_1 g_1 + \sum_{j=2}^\infty (R_j - R_{j-1}) g_j = \sum_{j=1}^\infty R_j (g_j - g_{j+1})$$

(“суммирование по частям”) и, продолжая выкладку,

$$\Sigma_2 = \sum_{j=1}^\infty R_j \left(\frac{j}{e^{bj} - 1} - \frac{j+1}{e^{b(j+1)} - 1} \right) = \sum_{j=1}^\infty R_j \frac{j e^{bj} (e^b - 1)}{(e^{bj} - 1)(e^{b(j+1)} - 1)} - \sum_{j=1}^\infty R_j \frac{1}{e^{bj+b} - 1},$$

так что в силу наложенного на R_j условия (3) при $b \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$|\Sigma_2| \leq C b \sum_{j=1}^\infty \frac{j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} + C \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{e^{bj} - 1}.$$

Оценим первое слагаемое. По формуле Эйлера–Маклорена (116)

$$b \sum_{j=1}^\infty \frac{j e^{bj}}{(e^{bj} - 1)^2} = b \int_1^\infty \frac{x e^{bx} dx}{(e^{bx} - 1)^2} + Q_1 = b^{-1} \int_b^\infty \frac{x e^x dx}{(e^x - 1)^2} + Q_1,$$

где остаточный член Q_1 удовлетворяет оценке, указанной в предложении 16. Интеграл представим в виде суммы

$$b^{-1} \int_b^\infty \frac{x e^x dx}{(e^x - 1)^2} = b^{-1} \int_b^1 \frac{x e^x dx}{(e^x - 1)^2} + b^{-1} \int_1^\infty \frac{x e^x dx}{(e^x - 1)^2}.$$

Второй член есть, очевидно, $O(b^{-1})$. В первом члене подынтегральное выражение оценивается сверху через Cx^{-1} , так что этот член есть $O(b^{-1} |\ln b|)$. Остаточный член Q_1 можно оценить таким же образом и получить $Q_1 = O(b^{-1})$. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{e^{bj} - 1} = O(b^{-1} |\ln b|).$$

Поскольку $d > 1$, получаем $Q + \Sigma_2 = O(b^{-d})$, и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если b и β связаны с M соотношениями

$$M = \sum_{j=1}^\infty \frac{j q_j}{e^{bj} - 1} = \beta^{-d-1} \Gamma(d+1) \zeta(d+1), \quad (23)$$

то

$$\beta = b(1 + O(b)), \quad b = \beta(1 + O(\beta)).$$

Действительно, применяя лемму 6, получаем

$$b^{-d-1}(1 + O(b)) = \beta^{-d-1},$$

откуда немедленно вытекает нужное утверждение.

ЛЕММА 8. Пусть b и β связаны с M формулами (23), и пусть

$$j_2 \geq j_1 \geq Cb^{-\gamma}$$

для некоторого $\gamma \in [0, 1]$. Тогда

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j}{e^{bj} - 1} - \beta^{-d} \int_{\beta j_1}^{\beta j_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} = O(b^{\gamma-1+\gamma(1-d)}). \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 8. По формуле Эйлера–Маклорена (116)

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j}{e^{bj} - 1} = b^{-d} \int_{bj_1}^{b(j_2+1)} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} + \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{r_j}{e^{bj} - 1} + Q,$$

где остаточный член Q удовлетворяет оценке из предложения 16. Далее,

$$\begin{aligned} & b^{-d} \int_{bj_1}^{b(j_2+1)} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} - \beta^{-d} \int_{\beta j_1}^{\beta j_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} \\ &= (\beta^{-d} - b^{-d}) \int_{\beta j_1}^{\beta j_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} + b^{-d} \int_Z \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1}, \end{aligned}$$

где Z — объединение отрезков $[bj_1, \beta j_1]$ и $[bj_2 + 1, \beta j_2]$. Проводя оценки таким же образом, как и выше, получаем

$$\begin{aligned} Q &= O(b^{\gamma-1+\gamma(1-d)}), & \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{r_j}{e^{bj} - 1} &= O(b^{\gamma-1}), \\ (\beta^{-d} - b^{-d}) \int_{\beta j_1}^{\beta j_2} \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} &= O(b^{1-d}), & b^{-d} \int_Z \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} &= O(b^{\gamma(1-d)}). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка (24), поскольку при $1 < d < 2$, $0 \leq \gamma \leq 1$ справедливы неравенства

$$\gamma - 1 \geq \gamma - 1 + \gamma(1-d), \quad 1-d > \gamma \geq \gamma - 1 + \gamma(1-d), \quad \gamma(1-d) \geq \gamma - 1 + \gamma(1-d).$$

Лемма доказана.

Полагая $\gamma = 0$, $j_1 = 1$, $j_2 = \infty$, и учитывая, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{d-1} dx}{e^x - 1} = \Gamma(d)\zeta(d),$$

получаем из леммы следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если N_0 связано с M формулами (20), а

$$\tilde{N}_0 = M^{d/(d+1)} \frac{\Gamma(d)\zeta(d)}{(\Gamma(d+1)\zeta(d+1))^{d/(d+1)}},$$

то

$$\tilde{N}_0 = N_0(1 + O(N_0^{1/d-1})), \quad N_0 = \tilde{N}_0(1 + O(\tilde{N}_0^{1/d-1})).$$

Заметим, что

$$\gamma - 1 + \gamma(1 - d) > -\alpha d = -\frac{d\gamma}{2} + \gamma - 1$$

(это неравенство равносильно неравенству $d < 2$). Поэтому

$$O(b^{\gamma-1+\gamma(1-d)}) = o(b^{-\alpha d}) = o(N_0^\alpha),$$

откуда с учетом доказанного выше следует, что при замене соотношений (6) и (10) на (20) и интеграла на сумму в формулировках теорем 1 и 2 эти теоремы превращаются в эквивалентные утверждения (измениться могут лишь константа C в (16) и функция χ в (12), но они все равно выбираются произвольно).

Предложение 5 доказано.

Таким образом, достаточно доказать теоремы 1 и 2 в модифицированном варианте, указанном в предложении (5), что и будет сделано ниже. В частности, мы будем всюду считать, что выполнены соотношения (20). Асимптотические соотношения

$$M \asymp b^{-d-1}, \quad N_0 \asymp b^{-d}, \quad N_0 \asymp M^{d/(d+1)},$$

вытекающие из (20), будут использоваться без специальных пояснений.

По ходу доказательств нам и в дальнейшем часто приходится оценивать различные суммы. Такая оценка, как и выше в доказательстве предложения 5, во всех случаях проводится с помощью того же стандартного приема: сумма сводится к интегралу с помощью одной из формул Эйлера–Маклорена (которые мы для удобства читателя приводим в приложении), а затем оценивается полученный интеграл и остаточный член формулы. Поскольку эти вычисления тривиальны, ниже мы их всюду опускаем и сразу выписываем окончательную оценку без дополнительных пояснений для каждого конкретного случая.

2.2. Доказательство теоремы 1. По существу теорема 1 утверждает то же, что и теорема 4 в [1], однако имеется ряд не особенно существенных отличий: в последней вместо логарифмического множителя в определении Δ стоит N_0^ε , $\varepsilon > 0$, а индекс j в определении наборов $\{N_{jk}\}$, пробегает значения от j_1 до ∞ . Поэтому мы все же приведем доказательство, но в кратком варианте, ограничиваясь основными моментами и опуская технические подробности.

Пусть $\mathcal{N}_0(M)$ — число наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j = M. \quad (25)$$

Очевидно, $\mathcal{N}(M) \geq \mathcal{N}_0(M)$, поэтому оценка снизу для $\mathcal{N}_0(M)$ будет и оценкой снизу для $\mathcal{N}(M)$. В [2; предложение 17] доказано, что выполнено неравенство

$$\mathcal{N}_0(M) \geq Cb^{1+d/2}e^{bM+F_0(b)} \quad (26)$$

с некоторой постоянной $C > 0$, где

$$F_0(b) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-bj}}, \quad (27)$$

а b — решение уравнения (20). В дальнейшем будем пользоваться обозначением

$$\tilde{F}_0(M) \equiv bM + F_0(b). \quad (28)$$

Функция $\tilde{F}_0(M)$ — не что иное, как преобразование Лежандра функции $F_0(b)$. Из формул (20) и (27) вытекает, что

$$\tilde{F}_0(M) \asymp M^{d/(d+1)}, \quad \frac{\partial \tilde{F}_0(M)}{\partial M} \asymp M^{-1/(d+1)}. \quad (29)$$

Далее, пусть $\Delta = N_0^\alpha \ln N_0 \chi(N_0)$ (формула (14)). Числитель в (12) обозначим для краткости через $\mathcal{N}(M, \Delta)$. Рассуждая, как в [2] при выводе формулы (102), аналогично [1; предложение 15] получаем оценку

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq 2e^{\tilde{F}_0(M) - c\Delta + Kc^2/2} \quad (30)$$

для любого c в интервале

$$0 \leq c \leq \frac{bj_1}{2}, \quad (31)$$

где

$$K = \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j e^{bj/2}}{(e^{bj/2} - 1)^2} \leq Cb^{-2} j_1^{d-2} \leq C_1 b^{-d\gamma - 2(1-\gamma)} \quad (32)$$

(второе неравенство справедливо в силу (11)). Таким образом,

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq 2 \exp \left\{ \tilde{F}_0(M) - c\Delta + C_1 b^{-d\gamma - 2(1-\gamma)} \frac{c^2}{2} \right\}. \quad (33)$$

Минимум выражения в правой части (33) на отрезке (31) достигается при

$$\begin{aligned} c &= C_1^{-1} \Delta b^{d\gamma + 2(1-\gamma)} = C_2 b^{-d\alpha} \sqrt{\ln(N_0) \chi(N_0)} b^{d\gamma + 2(1-\gamma)} (1 + o(1)) \\ &= C_2 b^{(1-\gamma) + d\gamma/2} \sqrt{\ln(N_0) \chi(N_0)} (1 + o(1)); \end{aligned} \quad (34)$$

число (34) лежит на этом отрезке при достаточно малом b , поскольку

$$\frac{bj_1}{2} \geq C_3 b^{1-\gamma} > C_2 b^{(1-\gamma) + d\gamma/2} \sqrt{\ln(N_0) \chi(N_0)}.$$

Минимум этот равен

$$-\frac{c\Delta}{2} \leq -C_4 \ln(N_0) \chi(N_0), \quad (35)$$

откуда

$$\mathcal{N}(M, \Delta) \leq 2e^{\tilde{F}_0(M)} N_0^{-C_4 \chi(N_0)}. \quad (36)$$

Разделив эту оценку на (26), приходим к искомой оценке (12). Теорема 1 доказана.

2.3. Доказательство теоремы 2.

2.3.1. Точная оценка для функции $\mathcal{N}_0(M)$. В [2; п. 2.1.1] для числа $\mathcal{N}_0(M)$ получено интегральное представление

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{b}{2\pi} e^{\tilde{F}_0(M)} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \exp \left\{ ibMx + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-bj}}{1 - e^{-bj(1+ix)}} \right\} dx, \quad (37)$$

где b связано с M соотношением (20). Перепишем это представление в виде

$$\mathcal{N}_0(M) = \frac{b}{2\pi} e^{\tilde{F}_0(M)} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{\Lambda \Phi(x)} dx, \quad (38)$$

где $\Lambda = b^{-d}$, а

$$\Phi(x) = ib^{d+1}Mx + b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-bj}}{1 - e^{-bj(1+ix)}} \quad (39)$$

(см. [2; (63)–(64)]). Из [2; лемма 18] следует, что функция $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = 0, \quad (40)$$

$$-C_1 \geq \Phi''(0) \geq -C_2, \quad (41)$$

$$|\Phi'''(x)| \leq C_3. \quad (42)$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\operatorname{Re} \Phi(0) - \operatorname{Re} \Phi(x) > \delta \quad \text{при} \quad |x| > \varepsilon. \quad (43)$$

В [2] эти свойства были использованы, чтобы получить для $\mathcal{N}_0(M)$ оценку снизу (26). Небольшая модификация этих рассуждений показывает, что в действительности оценка (26) точна по порядку. Именно, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 10. *Справедлива оценка*

$$\mathcal{N}_0(M) \asymp b^{1+d/2} e^{\tilde{F}_0(M)}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу (26) для $\mathcal{N}_0(M)$ уже доказана. Таким образом, достаточно доказать оценку сверху, или, что то же самое, оценку

$$\int_{-\pi/b}^{\pi/b} e^{\Lambda \Phi(x)} dx = O(b^{d/2}) \equiv O(\Lambda^{-1/2}). \quad (45)$$

Из свойства (43) вытекает, что интеграл по дополнению к произвольно малой фиксированной окрестности нуля экспоненциально мал, поэтому достаточно доказать, что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\Lambda \Phi(x)} dx = O(\Lambda^{-1/2}), \quad (46)$$

где $\varepsilon > 0$ можно взять настолько малым, насколько потребуется. Справедливо соотношение (формула Тейлора с остаточным членом)

$$\operatorname{Re} \Phi(x) = \frac{1}{2} \Phi''(0)x^2 + \frac{1}{6} \operatorname{Re} \Phi'''(\theta x)x^3 \leq -\frac{C_1}{2}x^2 + \frac{C_3}{6}x^3. \quad (47)$$

Выберем $\varepsilon = 3C_1/(2C_3)$. Тогда

$$\operatorname{Re} \Phi(x) \leq -\frac{C_1}{4} x^2 \quad \text{при} \quad |x| \leq \varepsilon, \quad (48)$$

так что

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\Lambda \Phi(x)} dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\Lambda C_1 x^2/4} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Lambda C_1 x^2/4} dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{\Lambda C_1}}, \quad (49)$$

и лемма доказана.

2.3.2. Точная оценка для функции $\mathcal{N}(M)$. Заметим теперь, что

$$\mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(M - \sigma - 1) + \sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_0(K). \quad (50)$$

Из леммы 10, формулы (29) и оценки

$$\mathcal{N}(M) \leq e^{\tilde{F}_0(M)}$$

([2; формула (22)]) для $\mathcal{N}(M)$ следует, что первое слагаемое в правой части формулы (50) вносит экспоненциально малый вклад, если $\sigma = [M^\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon > 1/(d+1)$, так что остается оценить сумму. Можно считать, что $\varepsilon < 1$. Тогда во второй сумме $M \asymp K$. Следовательно,

$$\sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_0(K) \asymp b^{d+1/2} \sum_{K=M-\sigma}^M e^{\tilde{F}_0(K)} \asymp b^{d+1/2} \int_{M-\sigma-1}^M e^{\tilde{F}_0(K)} dK \asymp \frac{b^{d+1/2}}{\tilde{F}'_0(M)} e^{\tilde{F}_0(M)},$$

и окончательно получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Справедлива оценка

$$\mathcal{N}(M) \asymp b^{d/2} e^{\tilde{F}(M)}.$$

2.3.3. Точная оценка для функции $\mathcal{N}_0(M, S)$. Обозначим через $\mathcal{N}_0(M, S)$ число наборов $\{N_{jk}\}$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{\infty} j N_j = M, \quad \sum_{j=j_1}^{j_2} N_j = S. \quad (51)$$

Выведем для этой функции точные оценки при $M \rightarrow \infty$ при условии, что

$$|S - \overline{N}(j_1, j_2)| \leq C N_0^\alpha, \quad (52)$$

где

$$\overline{N}(j_1, j_2) = \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j}{e^{bj} - 1}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{d}(1 - \gamma)$$

(см. формулы (21) и (13)). Прежде всего предъявим интегральную формулу для $\mathcal{N}_0(M, S)$. Обозначим

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j_1 \leq j \leq j_2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (53)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть ν_1, ν_2 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\nu_1 > 0, \quad \nu_1 + j_1 \nu_2 > 0. \quad (54)$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$\mathcal{N}_0(M, S) = \frac{1}{4\pi^2} e^{\nu_1 M + \nu_2 S + F(\nu_1, \nu_2)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Phi(x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (55)$$

где

$$F(\nu_1, \nu_2) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1}{1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2}}, \quad (56)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = iMx_1 + iSx_2 + \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2}}{1 - e^{-(\nu_1 + ix_1)j - \theta_j(\nu_2 + ix_2)}}. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вывод формулы (56) аналогичен выводу интегрального представления (37) для $\mathcal{N}_0(M)$ (см. [2; п. 2.1.1]) и опирается на представление символа Кронекера в виде

$$\delta_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\varphi(m-n)} d\varphi. \quad (58)$$

Мы опустим соответствующие выкладки.

Вещественная часть функции $\Phi(x_1, x_2)$ неположительна (и обращается в нуль при $x_1 = x_2 = 0$). Поэтому интеграл в (55) не превосходит $4\pi^2$, и чтобы получить наиболее точную оценку для $\mathcal{N}_0(M, S)$, следует минимизировать показатель экспоненты в первом множителе по $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ на множестве (54):

$$\nu_1 M + \nu_2 S + F(\nu) \rightarrow \min_{\nu}. \quad (59)$$

Вычислим первые и вторые производные функции (56) по ν :

$$\frac{\partial F(\nu)}{\partial \nu_1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2} - 1}, \quad \frac{\partial F(\nu)}{\partial \nu_2} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\theta_j q_j}{e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2} - 1}, \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 F(\nu)}{\partial \nu^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2}}{(e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2} - 1)^2} \begin{pmatrix} j^2 & j \theta_j \\ j \theta_j & \theta_j^2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Матрица вторых производных представляет собой матрицу Грама векторов

$$\xi_1 = (1, 2, 3, \dots), \quad \xi_2 = (0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{\text{от } j_1 \text{ до } j_2}, 0, \dots) \quad (62)$$

в пространстве последовательностей $l^2(\omega)$ с весом, задаваемым последовательностью

$$\omega_j = \frac{q_j e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2}}{(e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2} - 1)^2}, \quad j = 1, 2, \dots. \quad (63)$$

Эти векторы линейно независимы, так что матрица вторых производных функции F положительно определена, т.е. эта функция выпукла. Задачу минимизации (59) можно, таким образом, понимать как задачу вычисления преобразования Лежандра

$$\tilde{F}(M, S) = \min_{\nu} (\nu_1 M + \nu_2 S + F(\nu)) \quad (64)$$

строго выпуклой функции $F(\nu)$, которая определена на открытом выпуклом множестве (54).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть выполнено условие (52), т.е.

$$|S - \bar{N}(j_1, j_2)| \leq CN_0^\alpha. \quad (65)$$

Тогда при достаточно больших M минимум в (64) на множестве (54) достигается в некоторой точке (ν_1, ν_2) , причем справедливы оценки

$$|\nu_1 - b| \leq C_1 b^{1+d/2}, \quad |\nu_2| \leq C_2 b^{1-\gamma+d\gamma/2}, \quad (66)$$

$$|\tilde{F}_0(M) - \tilde{F}(M, S)| \leq C_3. \quad (67)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (60), уравнения точки минимума имеют вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j q_j}{e^{\nu_1 j + \theta_j \nu_2} - 1} = M \quad \sum_{j=j_1}^{j_2} \frac{q_j}{e^{\nu_1 j + \nu_2} - 1} = S. \quad (68)$$

При $S = \bar{N}(j_1, j_2)$ эти уравнения имеют решение $\nu_1 = b$, $\nu_2 = 0$ (единственное в силу строгой выпуклости). Покажем, что и при S «достаточно близком» к $\bar{N}(j_1, j_2)$ (т.е. удовлетворяющем (65)) решение существует и выполнены нужные оценки.

Вместо функции $F(\nu_1, \nu_2)$, задаваемой формулой (56), введем новую функцию

$$\mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) = b^d F(b(\xi_1 + 1), b^\kappa \xi_2) + (\xi_1 + 1) b^{d+1} M + \xi_2 b^{d+\kappa} \bar{N}(j_1, j_2), \quad (69)$$

где

$$\kappa = \frac{(2-d)(1-\gamma)}{2} \quad (70)$$

(множитель b^d введен для того, чтобы обеспечить ограниченность вторых производных этой функции). Пусть

$$|\xi_1| + |\xi_2| \leq C b^{d/2} \quad (71)$$

(эти оценки эквивалентны оценкам (66)). Тогда

$$\mathcal{F}(0, 0) = b^d \tilde{F}_0(M), \quad (72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_1}(0, 0) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_2}(0, 0) = 0, \quad (73)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi^2}(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (74)$$

где $a_{11} \asymp 1$, $a_{22} \asymp 1$, $a_{12} = O(b^\kappa)$, $a_{21} = O(b^\kappa)$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \xi^2}(\xi_1, \xi_2) = O(1), \quad \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial \xi^3}(\xi_1, \xi_2) = O(b^{-d(1-\gamma)/2}). \quad (75)$$

(На самом деле все третьи производные, кроме $\partial^3 \mathcal{F} / \partial \xi_2^3$, даже ограничены, но нам это не понадобится.) В частности, матрица вторых производных функции $\mathcal{F}$ в нуле обратима, и обратная к ней матрица равномерно ограничена.

В терминах функции $\mathcal{F}$ уравнения (68) точки минимума приобретают вид

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) = b^{d+\kappa}(\overline{N}(j_1, j_2) - S),$$

или

$$G(\xi) = \eta, \quad (76)$$

где $G(\xi) = \mathcal{F}'(\xi)$ — градиент функции $\mathcal{F}$, а

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) \equiv (0, b^{d+\kappa}(\overline{N}(j_1, j_2) - S)),$$

так что в силу условия (65) выполнена оценка

$$\|\eta\| \leq C b^{d+\kappa-d\alpha} = C b^{d/2}. \quad (77)$$

О вектор-функции $G(\xi)$, входящей в уравнение (76), известно, согласно (73)–(75), следующее: $G(0) = 0$, матрица $G'(0)$ равномерно ограничена и имеет равномерно ограниченную обратную, а вторые производные $G''(\xi)$ суть $O(b^{-d(1-\gamma)/2})$.

По теореме о неявной функции уравнение (76) разрешимо, если норма правой части достаточно мала. Чтобы доказать разрешимость в интересующем нас случае и оценить норму решения, воспользуемся рассуждением из доказательства этой теоремы и будем решать уравнение (76) с правой частью, удовлетворяющей условию (77), методом последовательных приближений, выбирая $\xi_{(0)} = 0$ и затем полагая

$$\xi_{(k+1)} = f(\xi_{(k)}, \eta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{где} \quad f(\xi, \eta) = \xi - G'(0)^{-1}(G(\xi) - \eta). \quad (78)$$

Из оценок на вторые производные функции G следует, что

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta) \right\| = \|G'(0)^{-1}(G'(0) - G'(\xi))\| \leq C \|\xi\| b^{-(1-\gamma)d/2}.$$

Эта норма не превосходит $1/2$, если

$$\|\xi\| \leq \frac{1}{2C} b^{d/2(1-\gamma)},$$

откуда легко вывести, что итерационный процесс сходится, если правая часть η удовлетворяет оценке (77), поскольку

$$\frac{d}{2} > (1-\gamma) \frac{d}{2}.$$

При этом для решения справедливо неравенство

$$\|\xi\| \leq C \|\eta\| \leq C_1 b^{d/2},$$

т.е. оценки (71) (а с ними и (66)) действительно выполняются. Докажем оценку (67). Для этого достаточно заметить, что

$$|\tilde{F}_0(M) - \tilde{F}(M, S)| = b^{-d} |(\mathcal{F}(0, 0) - \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2) - \xi_2 \eta_2)| = O(1)$$

в силу (71)–(75).

Предложение 13 доказано.

Чтобы дать точную оценку для $\mathcal{N}_0(M, S)$, остается, таким образом, предполагая, что $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ удовлетворяет уравнениям (68), оценить интеграл

$$I \equiv I(M, S) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\Phi(x_1, x_2)} dx_1 dx_2, \quad (79)$$

где $\Phi(x_1, x_2)$ задается формулой (57).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Верна оценка*

$$I(M, S) \asymp b^{1+d+\varkappa}, \quad (80)$$

где $\varkappa = (2-d)(1-\gamma)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве предложения 13, сделаем замену переменных

$$x_1 = b\varphi, \quad x_2 = b^\varkappa\psi \quad (81)$$

и перепишем интеграл (79) в виде

$$I = b^{1+\varkappa} \int_{-\pi/b}^{\pi/b} \int_{-\pi/b^\varkappa}^{\pi/b^\varkappa} e^{\Lambda\Psi(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi, \quad (82)$$

где $\Lambda = b^{-d}$, а

$$\Psi(\varphi, \psi) = ib^{d+1}M\varphi + ib^{d+\varkappa}S\psi + b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2}}{1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2 - ibj\varphi - i\theta_j b^\varkappa \psi}}. \quad (83)$$

Функция $\Psi(\varphi, \psi)$ обладает следующими свойствами.

1. Справедливы соотношения

$$\Psi(0, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}(0, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}(0, 0) = 0, \quad (84)$$

$$-C_1 \geq \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2}(0, 0) \geq -C_2 \quad (85)$$

с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2 ,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \psi}(0, 0) = O(b^\varkappa). \quad (86)$$

2. Третьи производные функции $\Psi(\varphi, \psi)$ удовлетворяют оценкам

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varphi^3}(\varphi, \psi) = O(1), \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varphi^2 \partial \psi}(\varphi, \psi) = O(1), \quad \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \varphi \partial \psi^2}(\varphi, \psi) = O(1), \quad (87)$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \psi^3}(\varphi, \psi) = O(b^{-d(1-\gamma)/2}). \quad (88)$$

3. Для произвольно малых постоянных $c_1, c_2 > 0$ в области интегрирования вне прямоугольника

$$D_{c_1, c_2} = \{(\varphi, \psi) : |\varphi| < c_1, |\psi| < c_2 b^{d(1-\gamma)/2}\} \quad (89)$$

выполнено неравенство

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C b^{d(1-\gamma)}. \quad (90)$$

Свойства 1 и 2 проверяются непосредственным вычислением. Проверим свойство 3.

Имеем

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) = b^d \sum_{j=1}^{\infty} q_j \ln \frac{1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2}}{|1 - e^{-\nu_1 j - \theta_j \nu_2 - i b j \varphi - i \theta_j b^\kappa \psi}|}. \quad (91)$$

Рассмотрим отдельное слагаемое в сумме (91), обозначив для краткости

$$\delta = \nu_1 j + \theta_j \nu_2 > 0, \quad \tau = b j \varphi + \theta_j b^\kappa \psi. \quad (92)$$

Оценим выражение

$$\ln \frac{|1 - e^{-\delta - i\tau}|}{1 - e^{-\delta}}. \quad (93)$$

ЛЕММА 15. *Существует такая постоянная $C > 0$, что для любого $\delta > 0$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ имеет место оценка*

$$\ln \frac{|1 - e^{-\delta - i\tau}|}{1 - e^{-\delta}} \geq C \min \left\{ 1, \frac{e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \tau) \right\}. \quad (94)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\begin{aligned} |1 - e^{-\delta - i\tau}|^2 &= |1 - e^{-\delta} \cos \tau + i e^{-\delta} \sin \tau|^2 \\ &= 1 - 2e^{-\delta} \cos \tau + e^{-2\delta} \cos^2 \tau + e^{-2\delta} \sin^2 \tau \\ &= 1 - 2e^{-\delta} + e^{-2\delta} + 2e^{-\delta} (1 - \cos \tau) \\ &= (1 - e^{-\delta})^2 \left(1 + \frac{2e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \tau) \right), \end{aligned} \quad (95)$$

так что

$$\frac{|1 - e^{-\delta - i\tau}|}{1 - e^{-\delta}} = \sqrt{1 + \frac{2e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \tau)} = \sqrt{1 + 2z}, \quad (96)$$

где

$$z = \frac{e^{-\delta}}{(1 - e^{-\delta})^2} (1 - \cos \tau).$$

Поскольку $z \geq 0$, мы имеем

$$\ln \sqrt{1 + 2z} = \int_1^{\sqrt{1+2z}} \frac{d\tau}{\tau} \geq \frac{\sqrt{1+2z} - 1}{\sqrt{1+2z}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+2z}}.$$

Остается заметить, что

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+2z}} \geq C \min\{1, z\}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать оценку (90) вне множества (89). Пусть сначала $|\varphi| \geq \varepsilon$, где положительное $\varepsilon \leq c_1$ выбрано произвольно. Поскольку все слагаемые в ряде (91) неположительны, для оценки достаточно взять частичную сумму ряда по отрезку $[y_1/b] \leq j \leq [y_2/b]$, где $y_2 > y_1 > 0$ — заданные числа, такие, что либо $y_2/b < j_1$, либо $y_1/b > j_1$, так что на указанном отрезке все θ_j либо единицы, либо нули одновременно. Далее, на этом отрезке множитель $e^{-\delta}/(1 - e^{-\delta})^2$ и произведение $b^{d-1}q_j$ ограничены сверху и снизу положительными постоянными, так что из леммы получаем в этом случае оценку

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -Cb \sum_{j=y_1/b}^{y_2/b} (1 - \cos(bj\varphi + \Theta)), \quad (97)$$

где Θ равно либо нулю, либо $b^\kappa\psi$. Суммируя косинусы в соответствии с [5; 1.341.3], получаем, как и в [2; с. 247],

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C_1(y_2 - y_1 - b - b|\sin(b\varphi/2)|^{-1}) \leq -C_2(y_2 - y_1 - b - \pi/c_1). \quad (98)$$

Выбирая y_2 и y_1 таким образом, чтобы их разность была достаточно большой, видим, что в указанном случае

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C < 0. \quad (99)$$

Пусть теперь $|\varphi| \leq \varepsilon$, а $|\psi| > c_2 b^{d(1-\gamma)/2}$. Опять ограничиваясь конечным отрезком ряда, можем написать

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C_0 b^d \sum_{j=j_1}^{j_1+c_3 b^{-\gamma}} q_j \min \left\{ 1, \frac{1}{(\nu_1 j + \nu_2)^2} (1 - \cos(bj\varphi + b^\kappa\psi)) \right\} \quad (100)$$

(мы воспользовались леммой 15 и тем фактом, что на указанном отрезке величина $\nu_1 j + \nu_2$ ограничена). Далее, при указанных значениях индекса j

$$\begin{aligned} |bj\varphi| &\leq C_1 \varepsilon b^{1-\gamma}, & |b^\kappa\psi| &\geq C_2 b^{\kappa+d(1-\gamma)/2} = C_2 b^{1-\gamma}, \\ C_3 b^{1-\gamma} &\leq \nu_1 j + \nu_2 \leq C_4 b^{1-\gamma}, \end{aligned} \quad (101)$$

так что, выбирая достаточно малое ε , можно добиться того, чтобы было выполнено неравенство

$$|bj\varphi + b^\kappa\psi| \geq C_5 b^{1-\gamma} \quad (102)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C_6 b^d \sum_{j=j_1}^{j_1+c_3 b^{-\gamma}} q_j \leq -C_7 b^d b^{-\gamma} b^{-\gamma(d-1)} = -C_7 b^{d(1-\gamma)}, \quad (103)$$

что и доказывает свойство 3.

Из свойства 3 вытекает, что вне прямоугольника D_{c_1, c_2} справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \Lambda \Psi(\varphi, \psi) \leq -C \Lambda^\gamma. \quad (104)$$

Таким образом, интеграл по внешности прямоугольника убывает экспоненциально при $M \rightarrow \infty$, и достаточно оценить интеграл

$$I_1 = b^{1+\kappa} \iint_{D_{c_1, c_2}} e^{\Lambda \Psi(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi. \quad (105)$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом, получаем, что

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C_1(\varphi^2 + \psi^2) + C_2(|\varphi^3| + \varphi^2|\psi| + |\varphi|\psi^2 + \Lambda^{(1-\gamma)}|\psi^3|). \quad (106)$$

В частности, при достаточно малых $c_1, c_2 > 0$ в прямоугольнике D_{c_1, c_2} будет выполнено соотношение

$$\operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C(\varphi^2 + \psi^2). \quad (107)$$

Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1-\gamma}{2} \right), \quad (108)$$

и пусть B_1 — круг радиуса $\Lambda^{-\varepsilon}$ с центром в нуле. При достаточно больших Λ круг B_1 целиком содержится в D_{c_1, c_2} , поскольку

$$\varepsilon > \frac{1-\gamma}{2}. \quad (109)$$

В области $D_{c_1, c_2} \setminus B_1$ справедливо неравенство

$$\Lambda \operatorname{Re} \Psi(\varphi, \psi) \leq -C\Lambda^{1-2\varepsilon}, \quad (110)$$

и так как $\varepsilon < 1/2$, то в этой области подынтегральное выражение убывает экспоненциально, и в итоге осталось оценить интеграл по кругу B_1 . В этом круге, однако,

$$\Psi(\varphi, \psi) = \Psi_2(\varphi, \psi) + B(\varphi, \psi), \quad (111)$$

где Ψ_2 — квадратичная форма, определяемая матрицей вторых производных функции Ψ в нуле, а

$$|B(\varphi, \psi)| \leq C_1 \Lambda^{(1-\gamma)/2} (|\varphi|^3 + |\psi|^3) \leq C_2 \Lambda^{-1}. \quad (112)$$

Поэтому запишем

$$\iint_{B_1} e^{\Lambda \Psi(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi = \iint_{B_1} e^{\Lambda \Psi_2(\varphi, \psi)} d\varphi d\psi + \iint_{B_1} e^{\Lambda \Psi_2(\varphi, \psi)} (e^{\Lambda B(\varphi, \psi)} - 1) d\varphi d\psi. \quad (113)$$

Первый из интегралов в правой части имеет точный порядок Λ^{-1} , а второй можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{B_1} e^{\Lambda \Psi_2(\varphi, \psi)} (e^{\Lambda B(\varphi, \psi)} - 1) d\varphi d\psi \right| &\leq C\Lambda^{1+(1-\gamma)/2} \int_0^{\Lambda^{-\varepsilon}} r^4 e^{-C\Lambda r^2} dr \\ &\leq C\Lambda^{1+(1-\gamma)/2} \int_0^\infty r^4 e^{-C\Lambda r^2} dr \\ &= C\Lambda^{-1-\gamma/2}, \end{aligned} \quad (114)$$

так что второй член не меняет оценки. Окончательно с учетом формулы (105) получаем, что интеграл имеет порядок $b^{1+\kappa+d}$, что и требовалось.

Предложение доказано.

2.3.4. *Завершение доказательства.* Из результатов предыдущих разделов (в частности, из предложения 13) вытекает, что если выполнено условие (52), то

$$\frac{\mathcal{N}_0(M, S)}{\mathcal{N}_0(M)} \asymp b^{\varkappa+d/2}.$$

Пусть $\mathcal{N}_1(M, \Delta)$ — число наборов $\{N_{kj}\}$, для которых

$$\sum_{j=1}^{\infty} jN_j = M, \quad \left| \sum_{j=j_1}^{j_2} N_j - \overline{N}(j_1, j_2) \right| > \Delta,$$

причем Δ удовлетворяет условию (16). Ясно, что

$$\mathcal{N}_1(M, \Delta) \geq \sum_{S=[\overline{N}(j_1, j_2)+\Delta+1]}^{[\overline{N}(j_1, j_2)+\Delta+N_0^\alpha]} \mathcal{N}_0(M, S).$$

Для каждого из слагаемых в этой сумме выполнено условие (52), а общее число слагаемых равно $N_0^\alpha \asymp b^{-d\alpha}$. Отсюда следует, что

$$\frac{\mathcal{N}_1(M, \Delta)}{\mathcal{N}_0(M)} \asymp b^{\varkappa+d/2-d\alpha} = 1,$$

поскольку

$$\varkappa + \frac{d}{2} - d\alpha = \frac{2-d}{2}(1-\gamma) + \frac{d}{2} - \frac{\gamma d}{2} - 1 + \gamma = 0.$$

Нас интересует отношение

$$\frac{\sum_{K=1}^M \mathcal{N}_1(K, \Delta)}{\sum_{K=1}^M \mathcal{N}_0(K)}.$$

Рассуждая как и при выводе оценок для $\mathcal{N}(M)$, приходим к выводу, что

$$\frac{\sum_{K=1}^M \mathcal{N}_1(K, \Delta)}{\sum_{K=1}^M \mathcal{N}_0(K)} \asymp \frac{\sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_1(K, \Delta)}{\sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_0(K)},$$

где $\sigma = [M^\varepsilon]$ для некоторого $\varepsilon \in (1/(d+1), 1)$. Но тогда заданное Δ удовлетворяет условию (16) для каждого из членов в числителе правой части, так что

$$C \mathcal{N}_0(K) \leq \mathcal{N}_1(K, \Delta) \leq \mathcal{N}_0(K)$$

для каждого из них, и поэтому

$$C \leq \frac{\sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_1(K, \Delta)}{\sum_{K=M-\sigma}^M \mathcal{N}_0(K)} \leq 1,$$

а значит, выполнено (17).

Теорема 2 доказана.

2.4. Приложение. Формулы Эйлера–Маклорена. Оценки сумм, используемые в данной работе, основаны на преобразовании этих сумм в интегралы с помощью формул Эйлера–Маклорена. Для удобства читателя мы приводим здесь те варианты этих формул, которые при этом используются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. Пусть $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция на отрезке¹ $[0, n]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-1} f(j) = \int_0^{n-1} f(x) dx + Q_0 \quad (115)$$

$$= \int_1^n f(x) dx + Q_1 \quad (116)$$

$$= \int_0^n f(x) dx - \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + Q_2, \quad (117)$$

где остаточные члены удовлетворяют оценкам

$$|Q_0| \leq \int_0^{n-1} |f'(x)| dx, \quad |Q_1| \leq \int_1^n |f'(x)| dx, \quad |Q_2| \leq \int_0^n |f'(x)| dx.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. II”, *Матем. заметки*, **83**:3 (2008), 381–401.
- [2] В. П. Маслов, В. Е. Назайкинский, “О распределении целочисленных случайных величин, связанных одним линейным неравенством. I”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 232–263.
- [3] А. М. Вершик, “Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:2 (1996), 19–39.
- [4] А. М. Вершик, “Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел”, *УМН*, **52**:2 (1997), 139–146.
- [5] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ГИФМЛ, М., 1963.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

14.05.2008

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики РАН

E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

¹ Не исключается и случай $n = \infty$; при этом требуется абсолютная сходимость соответствующих рядов и интегралов.