Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Микитюк, М. Н. Шеремета, О. М. Сумык, О функциях, двойственных по Юнгу, и поведении максимальных членов производных ряда Дирихле, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 74–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:40:15

УДК 517.537.2

О ФУНКЦИЯХ, ДВОЙСТВЕННЫХ ПО ЮНГУ, И ПОВЕДЕНИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ПРОИЗВОДНЫХ РЯДА ДИРИХЛЕ

Я. В. Микитюк, О. М. Сумык, М. Н. Шеремета

Из доказанного более общего результата о двойственных по Юнгу функциях получен критерий роста максимального члена ряда Дирихле с положительными показателями в терминах поведения максимальных членов последовательных производных этого ряда.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Пусть $1 \leq \lambda_1 < \lambda_n \uparrow \infty, n \rightarrow \infty$, а ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} = A \in (-\infty, +\infty]. \quad (2)$$

Легко видеть, что абсцисса абсолютной сходимости ряда (1) $\sigma_a \leq A$. Действительно, для любого $\sigma > A$ существует последовательность $(n_k) \uparrow \infty, k \rightarrow \infty$, такая, что

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{|a_n|} \leq \sigma, \quad n = n_k,$$

т.е. $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \geq 1, n = n_k$, и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} = +\infty$. Если не накладывать никаких ограничений на показатели λ_n , то может случиться даже так, что $A = +\infty$ и $\sigma_a = -\infty$. Примером такого ряда Дирихле может служить ряд (1) с коэффициентами $a_n = \exp\{-\sqrt{\ln n}\}$ и показателями $\lambda_n = \ln \ln n, n \geq 3$.

Пусть $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 1\}$ – максимальный член ряда (1). В силу (2) для каждого $\sigma < A$ максимальный член существует, так как $|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, для таких σ . Если $\sigma_a = +\infty$ или $\sigma_a \in (-\infty, +\infty)$ и $\ln n = o(\lambda_n), n \rightarrow \infty$, то $\sigma_a = A$, сумма $F(s)$ ряда (1) является аналитической в $\{s : \operatorname{Re} s < A\}$ функцией и $\mu(\sigma, F) = \mu(\sigma), \sigma < A$. Если теперь $F^{(k)}$ – k -я производная функции F , то

$$\mu(\sigma, F^{(k)}) = \max\{|a_n| \lambda_n^k \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 1\}$$

– максимальный член соответствующего ряда Дирихле. Мы сохраним это обозначение и в случае, когда $\sigma_a < A$.

В [1] доказано, что для любого фиксированного $\sigma < A$ последовательность $(\mu(\sigma, F^{(k)}))$ неубывающая к ∞ и $\ln \mu(\sigma, F^{(k)}) \leq (1 + o(1))k \ln k$ при $k \rightarrow \infty$. Здесь мы установим связь между ростом $\ln \mu(\sigma)$ при $\sigma \uparrow A$ и поведением последовательности $(\mu(\sigma, F^{(k)}))$.

Обозначим через $\Omega(A)$ клас положительных неограниченных на $(-\infty, A)$ функций Φ таких, что их производные Φ' непрерывные положительные и возрастающие к $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Заметим, что если $\Phi \in \Omega(A)$, $A \in (-\infty, +\infty]$, то Φ выпуклая на $(-\infty, A)$, $\Phi(x) \rightarrow C \geq 0$ ($x \rightarrow -\infty$) и $\Phi'(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow -\infty$), ибо если $\Phi'(x) \rightarrow k > 0$ ($x \rightarrow -\infty$), то $\Phi(x) \sim kx$ ($x \rightarrow -\infty$), что невозможно. Как и в [2], функцию $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ будем называть *ассоциированной с Φ по Ньютону*. Очевидно, что функция Ψ непрерывная на $(-\infty, A)$, если $\Phi \in \Omega(A)$. В [2] показано, что она возрастает к A на $(-\infty, A)$. В дальнейшем через Ψ^{-1} будем обозначать функцию, обратную к Ψ . Ясно, что функция Ψ^{-1} непрерывная и возрастает к A на $(-\infty, A)$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\Phi \in \Omega(A)$ удовлетворяет условиям:

- а) $\Phi'(\sigma) = O(\Phi'(\Psi(\sigma)))$, $\sigma \uparrow A$;
- б) $\Phi'\left(\sigma + \frac{1}{\Phi'(\sigma)}\right) = O(\Phi'(\sigma))$, $\sigma \uparrow A$;
- в) $\Phi'(\sigma) > 1/(A - \sigma)$, $\sigma < A$.

Тогда для того чтобы $\ln \mu(\sigma) = O(\Phi(\sigma))$, $\sigma \uparrow A$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$\frac{\mu(\sigma, F^{(n)})}{n!(\Phi'(\sigma))^n} \leq \max \left\{ \frac{\mu(\sigma, F^{(k)})}{k!(\Phi'(\sigma))^k} : 0 \leq k \leq N \right\}$$

для всех $\sigma < A$ и $n \in \mathbb{Z}_+$.

В случае, когда $A = +\infty$, условие в) излишне.

Положим

$$P(t) = \begin{cases} \ln |a_n|, & t = \lambda_n \ (n \in \mathbb{Z}_+), \\ -\infty, & t \in (0, +\infty) \setminus \{\lambda_n\}, \end{cases}$$

и

$$Q(\sigma) = \sup\{P(t) + \sigma t : t > 0\}.$$

Тогда $\ln \mu(\sigma, F) = Q(\sigma)$ и задача о поведении максимального члена ряда (1) сводится к изучению функции Q .

В дальнейшем считаем, что P – произвольная функция, заданная на $(0, +\infty)$ и ограниченная сверху на каждом конечном интервале из $(0, +\infty)$ (она может принимать значение $-\infty$, но $P \not\equiv -\infty$; будем считать, что $P \equiv -\infty$ на $[0, 1)$). Функция Q называется *двойственной с P по Юнгу* [3], [4, с. 86–88].

Из определения Q видно, что если существует $Q(\sigma_2)$ и $\sigma_1 < \sigma_2$, то существует $Q(\sigma_1)$. Поэтому либо $Q(\sigma) < +\infty$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, либо $Q(\sigma) = +\infty$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, либо

существует $A \in \mathbb{R}$ такое, что $Q(\sigma) < +\infty$ для всех $\sigma < A$ и $Q(\sigma) = +\infty$ для всех $\sigma > A$. Это число A будем называть *абсциссой* функции Q . Легко показать, что

$$A = -\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{P(t)}{t}. \quad (3)$$

Действительно, если $\sigma < A$, то для $P(t) \leq -(A + \sigma)t/2$ для всех $t \geq t_0(\sigma)$ и поэтому

$$\begin{aligned} Q(\sigma) &\leq \max \left\{ \sup \{P(t) + \sigma t : 0 < t \leq t_0(\sigma)\}, \sup \left\{ -\frac{A + \sigma}{2}t + \sigma t : t \geq t_0(\sigma) \right\} \right\} \\ &\leq \max \{ \sigma^+ t_0(\sigma) + \sup \{P(t) : 0 < t \leq t_0(\sigma)\}, 1 \} < +\infty, \quad \sigma^+ = \max \{ \sigma, 0 \}. \end{aligned}$$

Для $\alpha \geq 0$ положим

$$Q(\alpha, \sigma) = \sup \{ P(t) + \alpha \ln t + \sigma t : t \geq 1 \}.$$

Справедливость теоремы 1 легко вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $\Phi \in \Omega(A)$ удовлетворяет условиям а)–в) теоремы 1. Тогда для того чтобы $Q(\sigma) = O(\Phi(\sigma))$, $\sigma \uparrow A$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $B > 0$ такое, что для всех $\sigma < A$ и $\alpha \geq 0$

$$Q(\alpha, \sigma) - \ln \Gamma(1 + \alpha) - \alpha \ln \Phi'(\sigma) \leq \max \{ Q(\beta, \sigma) - \ln \Gamma(1 + \beta) - \beta \ln \Phi'(\sigma) : 0 \leq \beta \leq B \}. \quad (4)$$

2. Вспомогательные утверждения. Прежде всего заметим, что из определения следует, что функция Q выпукла на $(-\infty, A)$ и, значит,

$$Q(\sigma) = Q(\sigma_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} q(t) dt, \quad -\infty < \sigma_0 \leq \sigma < A, \quad (5)$$

где q – неубывающая функция на $(-\infty, A)$.

Далее, рассматривая $Q(\alpha, \sigma)$ как функцию переменных $\alpha \in [0, +\infty)$ и $\sigma \in (-\infty, A)$, легко видеть, что справедлива следующая

ЛЕММА 1. Функция $Q(\alpha, \sigma)$ принимает конечные значения в области $[0, +\infty) \times (-\infty, A)$ и равна $+\infty$ в области $[0, +\infty) \times (A, +\infty)$. Для произвольного $\alpha \in [0, +\infty)$ функция $Q(\alpha, \cdot)$ неубывающая и выпуклая на $(-\infty, A)$, а для произвольного $\sigma \in (-\infty, A)$ функция $Q(\cdot, \sigma)$ неубывающая и выпуклая на $[0, +\infty)$.

Для $(\alpha, \sigma) \in [0, +\infty) \times (-\infty, A)$ положим

$$q(\alpha, \sigma) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup \{ t \geq 1 : P(t) + \alpha \ln t + \sigma t \geq Q(\alpha, \sigma) - \varepsilon \}.$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. Для фиксированного $\alpha \in [0, +\infty)$ функция $q(\alpha, \cdot)$ неубывающая на $(-\infty, A)$ и $Q'_\sigma(\alpha, \sigma) = q(\alpha, \sigma)$ для всех $\sigma \in (-\infty, A)$ за исключением не более чем счетного множества точек, а для фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$ функция $q(\cdot, \sigma)$ неубывающая на $[0, +\infty)$ и $Q'_\alpha(\alpha, \sigma) = \ln q(\alpha, \sigma)$ для всех $\alpha \in [0, +\infty)$ за исключением не более чем счетного множества точек.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся только доказательством первого утверждения, поскольку второе утверждение доказывается совершенно аналогично.

Покажем, что для произвольных $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $\sigma \in (-\infty, A)$ множество

$$E(\varepsilon, \alpha, \sigma) = \{t \geq 1 : |t - q(\alpha, \sigma)| < \varepsilon, P(t) + \alpha \ln t + \sigma t \geq Q(\alpha, \sigma) - \varepsilon\} \quad (6)$$

непустое. Действительно, зафиксируем $\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$, $\sigma < A$. Тогда существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что

$$|q(\alpha, \sigma) - \sup\{t \geq 1 : P(t) + \alpha \ln t + \sigma t \geq Q(\alpha, \sigma) - \delta\}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (7)$$

и существует $t_0 \geq 1$ такое, что

$$P(t_0) + \alpha \ln t_0 + \sigma t_0 \geq Q(\alpha, \sigma) - \delta \quad (8)$$

и

$$|t_0 - \sup\{t \geq 1 : P(t) + \alpha \ln t + \sigma t \geq Q(\alpha, \sigma) - \delta\}| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Из (6)–(8) получаем

$$|t_0 - q(\alpha, \sigma)| < \varepsilon, \quad P(t_0) + \alpha \ln t_0 + \sigma t_0 \geq Q(\alpha, \sigma) - \varepsilon,$$

т.е. $t_0 \in E(\varepsilon, \alpha, \sigma)$ и, значит, $E(\varepsilon, \alpha, \sigma) \neq \emptyset$.

Отсюда по аксиоме выбора для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $q_\varepsilon : [0, +\infty) \times (-\infty, A) \rightarrow [1, +\infty)$ такая, что для всех $\alpha \in [0, +\infty)$ и $\sigma \in (-\infty, A)$

$$Q(\alpha, \sigma) \geq P(q_\varepsilon(\alpha, \sigma)) + \alpha \ln q_\varepsilon(\alpha, \sigma) + \sigma q_\varepsilon(\alpha, \sigma) \geq Q(\alpha, \sigma) - \varepsilon \quad (10)$$

и

$$|q(\alpha, \sigma) - q_\varepsilon(\alpha, \sigma)| < \varepsilon. \quad (11)$$

Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in (-\infty, A)$. В силу определения

$$Q(\alpha, \sigma_1) \geq P(q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2)) + \alpha \ln q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2) + \sigma_1 q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2). \quad (12)$$

Из (10) имеем

$$Q(\alpha, \sigma_2) \leq \varepsilon + P(q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2)) + \alpha \ln q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2) + \sigma_2 q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2), \quad (13)$$

а из (12) и (13) получаем

$$Q(\alpha, \sigma_2) - Q(\alpha, \sigma_1) \leq (\sigma_2 - \sigma_1)q_\varepsilon(\alpha, \sigma_2) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая (11), имеем

$$Q(\alpha, \sigma_2) - Q(\alpha, \sigma_1) \leq (\sigma_2 - \sigma_1)q(\alpha, \sigma_2). \quad (14)$$

Поскольку σ_1, σ_2 произвольные, то, меняя их местами, получаем также неравенство

$$Q(\alpha, \sigma_1) - Q(\alpha, \sigma_2) \leq (\sigma_1 - \sigma_2)q(\alpha, \sigma_1). \quad (15)$$

Пусть $\sigma_1 < \sigma_2$. Тогда из (14) и (15) имеем

$$q(\alpha, \sigma_1) \leq \frac{Q(\alpha, \sigma_2) - Q(\alpha, \sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \leq q(\alpha, \sigma_2),$$

откуда легко следует справедливость первого утверждения леммы 2.

ЛЕММА 3. Для фиксированного $\sigma \in (-\infty, A)$ и всех $\alpha \in [0, +\infty)$ за исключением не более чем счетного множества точек выполняется неравенство

$$Q'_\sigma(\alpha, \sigma) \exp\{Q(\alpha, \sigma)\} \leq \exp\{Q(\alpha + 1, \sigma)\}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что

$$Q(\alpha + 1, \sigma) - Q(\alpha, \sigma) = \int_\alpha^{\alpha+1} \ln q(\xi, \sigma) d\xi \geq \ln q(\alpha, \sigma),$$

т.е. $\exp\{Q(\alpha, \sigma)\}q(\alpha, \sigma) \leq \exp\{Q(\alpha + 1, \sigma)\}$. Отсюда, снова учитывая лемму 2, получаем неравенство (16).

ЛЕММА 4. Пусть положительная ограниченная функция G задана на прямоугольнике $[0, B] \times [a, b]$ и удовлетворяет условиям:

- 1) для каждого $\beta \in [0, B]$ функция $G(\beta, \cdot)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$;
- 2) для каждого $x \in [a, b]$ функция $G(\cdot, x)$ непрерывна на $[0, B]$;
- 3) для каждого $\beta \in [0, B]$ и почти для всех $x \in [a, b]$

$$G'_x(\beta, x) \leq \varphi(x)g(x), \quad g(x) = \max\{G(\xi, x) : 0 \leq \xi \leq B\}, \quad (17)$$

где φ — положительная непрерывная на $[a, b]$ функция.

Тогда

$$\ln g(x) \leq \ln g(a) + \int_a^x \varphi(t) dt. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta, \gamma \in [a, b]$. Покажем, что

$$g(\gamma) - g(\delta) \leq \max\{G(\xi, \gamma) - G(\xi, \delta) : 0 \leq \xi \leq B\}. \quad (19)$$

Действительно, существуют $\xi_1, \xi_2 \in [0, B]$ такие, что $g(\gamma) = G(\xi_1, \gamma)$, $g(\delta) = G(\xi_2, \delta)$. Тогда $G(\xi_1, \delta) \leq G(\xi_2, \delta)$ и поэтому

$$g(\gamma) - g(\delta) = G(\xi_1, \gamma) - G(\xi_2, \delta) \leq G(\xi_1, \gamma) - G(\xi_1, \delta),$$

откуда следует (19).

Так как

$$G(\beta, \gamma) - G(\beta, \delta) = \int_{\delta}^{\gamma} G'_x(\beta, x) dx,$$

то в силу (17)

$$G(\beta, \gamma) - G(\beta, \delta) \leq \int_{\Delta(\delta, \gamma)} \varphi(x)g(x) dx,$$

где $\Delta(\delta, \gamma)$ – отрезок с концами δ, γ . Отсюда в силу (19)

$$g(\gamma) - g(\delta) \leq \int_{\Delta(\delta, \gamma)} \varphi(x)g(x) dx$$

и, следовательно,

$$|g(\gamma) - g(\delta)| \leq \int_{\Delta(\delta, \gamma)} \varphi(x)g(x) dx \quad (20)$$

для любых $\delta, \gamma \in [a, b]$.

Из определения функции g и непрерывности функции φ следует, что функция φg ограничена и измерима по мере Лебега, т.е. φg интегрируемая на $[a, b]$. Отсюда, учитывая (20), получаем, что функция g абсолютно непрерывна на $[a, b]$. Используя абсолютную непрерывность g и неравенство

$$g(\gamma + \Delta\gamma) - g(\gamma) \leq \int_{\gamma}^{\gamma + \Delta\gamma} \varphi(x)g(x) dx, \quad \Delta\gamma > 0,$$

легко получаем, что почти для всех $\gamma \in [a, b]$ выполняется $g'(\gamma) \leq \varphi(\gamma)g(\gamma)$. В силу положительности и абсолютной непрерывности функции g функция $\ln g$ также абсолютно непрерывна. Поэтому из последнего неравенства имеем

$$\ln g(x) - \ln g(a) = \int_a^x (\ln g(t))' dt = \int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt \leq \int_a^x \varphi(t) dt.$$

Лемма 4 доказана.

Нам понадобится также следующий результат из [5].

ЛЕММА 5. Если Φ – выпуклая непрерывно дифференцируемая на $(-\infty, A)$ функция, то для того чтобы для каждой выпуклой на $(-\infty, A)$ функции Q

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow A} \frac{Q(\sigma)}{\Phi(\sigma)} < +\infty \implies \overline{\lim}_{\sigma \rightarrow A} \frac{Q'(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow A} \frac{1}{\Phi'(\sigma)} \inf \left\{ \frac{\Phi(t)}{t - \sigma} : t > \sigma \right\} < +\infty. \quad (21)$$

3. Доказательство теоремы 2. Предположим, что

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow A} \frac{Q(\sigma)}{\Phi(\sigma)} = T < +\infty. \quad (22)$$

Так как

$$\inf \left\{ \frac{\Phi(t)}{t - \sigma} : t > \sigma \right\} = \frac{\Phi(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Psi^{-1}(\sigma) - \sigma} = \frac{\Phi(\Psi^{-1}(\sigma))}{\Psi^{-1}(\sigma) - \Psi(\Psi^{-1}(\sigma))} = \Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)),$$

то условие а) теоремы 2 и условие (21) эквивалентны. Поэтому по лемме 5 из (5) и (22) имеем

$$\overline{\lim}_{\sigma \rightarrow A} \frac{q(\sigma)}{\Phi'(\sigma)} = T_1 < +\infty. \quad (23)$$

Пусть $h \in (0, A - \sigma)$. Тогда в силу (5)

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \sigma) &= \sup \{ P(t) + \alpha \ln t + (\sigma + h)t - ht : t \geq 1 \} \\ &\leq Q(\sigma + h) + \sup \{ \alpha \ln t - ht : t \geq 1 \} \\ &= Q(\sigma + h) + \alpha \ln \frac{\alpha}{e} - \alpha \ln h = Q(\sigma) + \int_{\sigma}^{\sigma+h} q(t) dt + \alpha \ln \frac{\alpha}{e} - \alpha \ln h \\ &\leq Q(\sigma) + hq(\sigma + h) + \alpha \ln \frac{\alpha}{e} - \alpha \ln h, \end{aligned}$$

откуда ввиду (23) получаем

$$Q(\alpha, \sigma) \leq Q(\sigma) + T_2 h \Phi'(\sigma + h) + \alpha \ln \frac{\alpha}{e} - \alpha \ln h.$$

Если положим здесь $h = 1/\Phi'(\sigma)$, то в силу условия в) $\sigma + h < A$, а в силу условия б)

$$\begin{aligned} &Q(\alpha, \sigma) - \ln \Gamma(1 + \alpha) - \alpha \ln \Phi'(\sigma) \\ &\leq Q(\sigma) - \ln \Gamma(1 + \alpha) + \alpha \ln \frac{\alpha}{e} + \frac{T_2}{\Phi'(\sigma)} \Phi' \left(\sigma + \frac{1}{\Phi'(\sigma)} \right) \\ &\leq Q(\sigma) - \frac{1}{2} \ln(2\pi\alpha) + T_3 \leq Q(\sigma) \end{aligned}$$

для всех $\sigma \in (-\infty, A)$ и всех $\alpha \geq \alpha_0$. Отсюда легко получаем (4).

Наоборот, из (4) имеем

$$\frac{\exp\{Q(\alpha, \sigma)\}}{\Gamma(1+\alpha)(\Phi'(\sigma))^\alpha} \leq g(\sigma) = \max \left\{ \frac{\exp\{Q(\beta, \sigma)\}}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^\beta} : 0 \leq \beta \leq B \right\}.$$

Так как функция $Q(\alpha, \sigma)$ выпуклая (лемма 1) и $\Phi'' \geq 0$, то, используя лемму 3, для произвольных $\beta \in [0, B]$ и $\sigma \in (-\infty, A)$ за исключением не более чем счетного множества точек выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{\exp\{Q(\beta, \sigma)\}}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^\beta} \right)'_{\sigma} &= \frac{\exp\{Q(\beta, \sigma)\}Q'_{\sigma}(\beta, \sigma)}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^\beta} - \frac{\beta \exp\{Q(\beta, \sigma)\}\Phi''(\sigma)}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^{\beta+1}} \\ &\leq \frac{\exp\{Q(\beta, \sigma)\}Q'_{\sigma}(\beta, \sigma)}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^\beta} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\exp\{Q(\beta, \sigma)\}Q'_{\sigma}(\beta, \sigma)}{\Gamma(1+\beta)(\Phi'(\sigma))^\beta} : 0 \leq \beta \leq B \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\exp\{Q(\beta+1, \sigma)\}}{\Gamma(1+\beta+1)(\Phi'(\sigma))^{\beta+1}} \frac{\Gamma(1+\beta+1)}{\Gamma(1+\beta)} \Phi'(\sigma) : 0 \leq \beta \leq B \right\} \\ &\leq (B+1)\Phi'(\sigma)g(\sigma). \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 4 на каждом конечном интервале $[a, \sigma] \subset (-\infty, \sigma)$

$$\begin{aligned} \ln g(\sigma) &\leq \ln g(a) + \int_a^{\sigma} (B+1)\Phi'(t) dt \\ &= \ln g(a) + (B+1)(\Phi(\sigma) - \Phi(a)) = C + (B+1)\Phi(\sigma), \end{aligned}$$

где $C \equiv \text{const}$. Так как $Q(\sigma) \leq \ln g(\sigma)$, то тем самым теорема 2 полностью доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шеремета М. Н. О последовательностях максимальных членов и центральных показателей производных рядов Дирихле // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 457–467.
- [2] Шеремета М. Н., Федыняк С. И. О производной ряда Дирихле // Сиб. матем. ж. 1998. Т. 39. № 1. С. 206–223.
- [3] Young W. H. On classes of summable functions and their Fourier series // Proc. Roy. Soc. (A). 1912. V. 87. P. 225–229.
- [4] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Физматгиз, 1962.
- [5] Братищев А. В. Об обращении правила Лопиталья // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону: Изд. РГУ, 1985. С. 28–42.