Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Томашевская, О диофантовых приближениях числа π числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 912–922

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:03:37

УДК 511.36

О диофантовых приближениях числа π числами из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Е. Б. Томашевская

Доказывается оценка меры иррациональности любого ненулевого числа вида $r_1\pi + r_2\pi/\sqrt{3}$, $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Библиография: 7 названий.

Введение. В статье [1] Хата получил оценки

$$|\pi - p/q| \geq q^{-8.0161} \quad \text{и} \quad |\pi/\sqrt{3} - p/q| \geq q^{-4.6015},$$

где $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0$, которые являются лучшими на данный момент. В настоящей работе доказывается теорема, в которой объединены указанные выше результаты Хаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{Z}$, $(p_3, p_4) \neq (0, 0)$, $P = \max(|p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|)$, $P > P_0$. Тогда справедлива оценка

$$\left| \pi - \frac{p_1\sqrt{3} + p_2}{p_3\sqrt{3} + p_4} \right| > P^{-10.3567}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Мерой иррациональности $\mu(\gamma)$ вещественного числа γ называется нижняя грань чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $q_0(\varepsilon)$, которое удовлетворяет следующему условию: неравенство

$$\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$$

выполняется для всех целых чисел p, q , где $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Из теоремы простыми преобразованиями можно получить следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, $(r_1, r_2) \neq (0, 0)$. Тогда

$$\mu\left(r_1\pi + r_2\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \leq 10.3567.$$

Результат, полученный в теореме 1, улучшает оценку Виола и Аморозо. В их работе [2] установлено аналогичное неравенство, но с показателем степени 46.9075.

Ряд интересных результатов получен в работе [3]. Например, получена оценка $\mu(\pi/\sqrt{3} + \log 3) \leq 4.5586$. Чуть ранее та же оценка для чисел $\pi/\sqrt{3} \pm \log 3$ была установлена в работе [4].

Кратко остановимся на основных моментах доказательства теоремы 1. Метод построения основного интеграла в работе, основанный на идее симметрии, впервые был опубликован Салиховым [5]. Одним из основных этапов доказательства является применение леммы 2 из [6].

В работе, как и многими авторами, использовалась стандартная схема Чудновского–Хаты сокращения простых.

1. Вспомогательные утверждения. Будем считать далее, что $P_n(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами степени n .

ЛЕММА 1. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы представления вида

- 1) $\sin n\alpha = \sin \alpha \cdot P_{n-1}(2 \cos \alpha)$, где $P_{n-1}(x)$ – многочлен, содержащий лишь x^j , $j \equiv n-1 \pmod{2}$.
- 2) $2 \cos n\alpha = Q_n(2 \cos \alpha)$, где $Q_n(x)$ – многочлен, в котором содержатся лишь x^j , $j \equiv n \pmod{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) При $n = 1$, $n = 2$ утверждение выполнено. Далее применяем индукцию по n . При $n \geq 2$ имеем

$$2 \sin n\alpha \cos \alpha = \sin(n+1)\alpha + \sin(n-1)\alpha,$$

т.е.

$$\sin(n+1)\alpha = \sin n\alpha(2 \cos \alpha) - \sin(n-1)\alpha, \quad P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot x - P_{n-2}(x).$$

2) При $n = 1$ утверждение выполнено, при $n = 2$ имеем $2 \cos 2\alpha = (2 \cos \alpha)^2 - 2$. Далее применяем индукцию по n . При $n \geq 2$ имеем

$$2 \cos n\alpha \cos \alpha = \cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha,$$

т.е.

$$2 \cos(n+1)\alpha = 2 \cos n\alpha \cdot (2 \cos \alpha) - 2 \cos(n-1)\alpha,$$

и лемма доказана.

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{i \sin \alpha} I = \frac{1}{i \sin \alpha} \int_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \frac{(x - \cos \alpha)^{2an} (-x + e^{i\alpha})^{bn} (x - e^{-i\alpha})^{bn}}{x^{cn+1} (2 \cos \alpha - x)^{cn+1}} dx, \quad (1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $a, b, c, n \in \mathbb{N}$, $\cos \alpha \neq 0$, $a + b > c$.

Для подынтегральной функции интеграла (1)

$$R(x) = \frac{(x - \cos \alpha)^{2an} (-x + e^{i\alpha})^{bn} (x - e^{-i\alpha})^{bn}}{x^{cn+1} (2 \cos \alpha - x)^{cn+1}}$$

имеем

- 1) $R(x)$ – вещественная рациональная функция;
- 2) $R(2 \cos \alpha - x) = R(x)$ – свойство симметрии.

С учетом 1) и 2) получим разложение $R(x)$ в сумму простейших дробей

$$R(x) = P_{dn-2}(x) + \sum_{j=1}^{cn+1} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(2 \cos \alpha - x)^j} \right), \quad (2)$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $d = 2a + 2b - 2c$;

$$P_{dn-2}(x) = \sum_{j=1}^{dn-2} b_j x^j, \quad b_j \in \mathbb{R}, \quad P_{dn-2}(2 \cos \alpha - x) = P_{dn-2}(x),$$

$$a_j = \frac{1}{(cn+1-j)!} \cdot \frac{d^{cn+1-j}}{dx^{cn+1-j}} (R(x) \cdot x^{cn+1}) \Big|_{x=0}. \quad (3)$$

ЛЕММА 2. Для всех $j = 1, \dots, cn+1$ возможно представление

$$2^{2an} \cdot a_j = (2 \cos \alpha)^{2N_j+j_1} \cdot Q((2 \cos \alpha)^2), \quad (4)$$

где j_1 – вычет j по mod 2, $N_j \in \mathbb{Z}$, $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$D^k(f(x)) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k} (f(x)) \Big|_{x=0}.$$

По формуле дифференцирования Лейбница из (3) получим

$$a_j = D^{cn+1-j}(R(x) \cdot x^{cn+1})$$

$$= \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=cn+1-j} \gamma(\overline{m}) \cdot (\cos \alpha)^{2an-m_1}$$

$$\times e^{i\alpha(bn-m_2)} \cdot e^{-i\alpha(bn-m_3)} \cdot (2 \cos \alpha)^{-cn-1-m_4},$$

где $j = 1, \dots, cn+1$, все $m_k \in \mathbb{Z}^+$, $m_1 \leq 2an$, $m_2, m_3 \leq bn$, $\overline{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $\gamma(\overline{m}) \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma(\overline{m}) = (-1)^{m_1+m_2+m_3+bn} \cdot \frac{2an \cdot (2an-1) \cdots (2an-m_1+1)}{m_1!}$$

$$\times \frac{bn \cdot (bn-1) \cdots (bn-m_2+1)}{m_2!}$$

$$\times \frac{bn \cdot (bn-1) \cdots (bn-m_3+1)}{m_3!} \cdot \frac{(cn+1) \cdots (cn+m_4)}{m_4!}.$$

Тогда

$$2^{2an} \cdot a_j = \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=cn+1-j} 2^{m_1} \cdot \gamma(\overline{m}) \cdot e^{i\alpha(m_3-m_2)} \cdot (2 \cos \alpha)^{2an-cn-1-m_1-m_4}.$$

Если $m_2 = m_3$, то $2an - cn - 1 - m_1 - m_4 \equiv j \pmod{2}$.

Если $m_2 \neq m_3$, то, группируя слагаемые при $m_3 = m_2 + \rho$, $m_2 = m_3 + \rho$, $\rho \geq 1$, и используя то обстоятельство, что $\gamma(\overline{m})$ для таких слагаемых одинаковы, получим для этих слагаемых множитель $e^{i\alpha\rho} + e^{-i\alpha\rho} = 2 \cos \alpha\rho$. По лемме 1 п. 2) имеем

$$2 \cos \alpha\rho = (2 \cos \alpha)^{\rho_1} Q_{(\rho-\rho_1)/2}((2 \cos \alpha)^2), \quad \rho_1 \equiv \rho \pmod{2}.$$

Так как $m_2 + m_3 = 2m + \rho$, где $m = \min(m_2, m_3)$, то $\rho_1 \equiv -m_2 - m_3 \pmod{2}$, и тогда $2an - cn - 1 - m_1 - m_4 + \rho_1 \equiv j \pmod{2}$. Отсюда легко следует представление вида (4).

ЛЕММА 3. Для всех $j = 1, \dots, dn - 2$ возможно представление

$$2^{2an} \cdot b_j = (2 \cos \alpha)^{j_1} \cdot S((2 \cos \alpha)^2), \quad (5)$$

где j_1 – вычет j по mod 2, $S(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2) следует, что $P_{dn-2}(x)$ – часть разложения функции $R(x)$ в точке $x = \infty$, содержащая все неотрицательные степени x . Имеем из (1) при $|x| > 2|\cos \alpha|$

$$R(x) = (-1)^{bn+cn+1} x^{dn-2} \left(1 - \frac{\cos \alpha}{x}\right)^{2an} \left(1 - \frac{e^{i\alpha}}{x}\right)^{bn} \left(1 - \frac{e^{-i\alpha}}{x}\right)^{bn} \left(1 - \frac{2 \cos \alpha}{x}\right)^{-cn-1}.$$

Тогда

$$b_j = \sum_{m_1+m_2+m_3+m_4=dn-2-j} (-1)^{cn+1} \gamma(\overline{m}) \cdot (\cos \alpha)^{m_1} \cdot e^{i\alpha(m_3-m_2)} \cdot (2 \cos \alpha)^{m_4},$$

где $\overline{m}$, $\gamma(\overline{m}) \in \mathbb{Z}$ определены в доказательстве леммы 2.

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны приведенным в доказательстве леммы 2.

Пусть $g \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\Theta \in \mathbb{R}$, $\sqrt{g} \notin \mathbb{N}$,

$$l_n = (\Lambda_1(n) \cdot \sqrt{g} + \Lambda_2(n)) \cdot \Theta + \Lambda_3(n) \cdot \sqrt{g} + \Lambda_4(n),$$

где все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$, не все $\Lambda_i(n) = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Lambda_1(n) \cdot \sqrt{g} + \Lambda_2(n)| = \gamma_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| \leq \gamma_2, \quad \gamma_1 + \gamma_2 > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |l_n| = -\gamma_3, \quad \gamma_3 > \gamma_2,$$

$\mu > 2(\gamma_1 + \gamma_3)/(\gamma_3 - \gamma_2)$; числа $p_1, p_2, p_3, p_4, P, P_0 = P_0(\mu)$ определены как в теореме 1. Тогда

$$\left| \Theta - \frac{p_1 \sqrt{g} + p_2}{p_3 \sqrt{g} + p_4} \right| > \frac{1}{P^\mu}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2 статьи [6].

Выберем параметры в интеграле (1) $a = 21$, $b = 81$, $c = 68$, $\alpha = \pi/12$. Везде далее I – это интеграл (1) с указанными параметрами. Обозначим $q_M = \text{НОК}(1, 2, \dots, M)$ для $M \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 5. Справедливо представление вида

$$6 \cdot q_{68n} \cdot 2^{42n} \cdot \frac{I}{i \sin \alpha} = (\Lambda'_1(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda'_2(n)) \cdot \pi + \Lambda'_3(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda'_4(n),$$

где все $\Lambda'_i(n) \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим интеграл (1) с помощью представления (2). При $j = 2, \dots, 68n + 1$ имеем

$$\begin{aligned} I_j &\equiv \int_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \left(\frac{a_j}{x^j} + \frac{a_j}{(2 \cos \alpha - x)^j} \right) dx \\ &= -\frac{a_j}{j-1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(2 \cos \alpha - x)^{j-1}} \right) \Big|_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= -\frac{a_j}{j-1} (e^{-i(j-1)\alpha} - e^{i(j-1)\alpha}) = \frac{a_j}{j-1} 2i \sin((j-1)\alpha). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь ввиду п. 1) леммы 1

$$\sin((j-1)\alpha) = \sin \alpha \cdot (2 \cos \alpha)^{j_1} P_{(j-j_1-2)/2}((2 \cos \alpha)^2).$$

Тогда из (6) и леммы 2 получим

$$\frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I_j \cdot 2^{42n} \cdot q_{68n} = (2 \cos \alpha)^{2N_j} \tilde{P}_j((2 \cos \alpha)^2), \quad (7)$$

где $N_j \in \mathbb{Z}$, $\tilde{P}_j \in \mathbb{Z}[x]$.

При $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv a_1 \int_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \cos \alpha - x} \right) dx = a_1 \log \frac{x}{2 \cos \alpha - x} \Big|_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \\ &= a_1 \log e^{2i\alpha} = i2a_1\alpha. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь $j_1 = 1$; из леммы 2

$$\frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I_1 \cdot 2^{42n} \cdot q_{68n} = (2 \cos \alpha)^{2N_1} \tilde{P}_1((2 \cos \alpha)^2) \cdot \frac{\alpha}{\sin 2\alpha}, \quad (8)$$

где $N_1 \in \mathbb{Z}$, $\tilde{P}_1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Наконец, аналогично при $d = 2a + 2b - 2c = 68$ получим

$$\begin{aligned} I^* &\equiv \int_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \sum_{j=1}^{68n-2} b_j x^j dx = \frac{1}{2} \int_{\cos \alpha - i \sin \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \sum_{j=0}^{68n-2} b_j x^j dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{68n-2} \frac{b_j}{j+1} \cdot (e^{i\alpha(j+1)} - e^{-i\alpha(j+1)}) \\ &= i \sin \alpha \sum_{j=0}^{68n-2} \frac{b_j}{j+1} \cdot (2 \cos \alpha)^{j_1} \cdot P_{(j-j_1)/2}((2 \cos \alpha)^2). \end{aligned}$$

По лемме 3 тогда получим

$$\frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I^* \cdot 2^{42n} \cdot q_{68n} = \tilde{P}((2 \cos \alpha)^2), \quad (9)$$

где $\tilde{P} \in \mathbb{Z}[x]$.

Из (7)–(9) с учетом того, что $I = I^* + \sum_{j=0}^{68n-2} I_j$, имеем

$$\frac{I}{i \sin \alpha} \cdot 2^{42n} \cdot q_{68n} = (4 \cos^2 \alpha)^N \cdot \left(T_1(4 \cos^2 \alpha) + T_2(4 \cos^2 \alpha) \frac{\alpha}{\sin 2\alpha} \right), \quad (10)$$

где $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}[x]$, $N \in \mathbb{Z}$, $N = \min_{1 \leq j \leq 68n+1} N_j$.

При $\alpha = \pi/12$ имеем $(2 \cos \alpha)^2 = 2 + \sqrt{3}$. Обозначим через K кольцо чисел вида $k_1 + k_2\sqrt{3}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Тогда для $N \in \mathbb{Z}^+$ имеем $(2 \cos \alpha)^{2N} = (2 + \sqrt{3})^N \in K$, для $N = -N_1$, $N_1 \in \mathbb{N}$,

$$(2 \cos \alpha)^{2N} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{N_1}} = (2 - \sqrt{3})^{N_1} \in K.$$

Так как $\alpha/\sin 2\alpha = \pi/6$, то из (10) получим

$$6 \cdot q_{68n} \cdot 2^{42n} \cdot \frac{I}{i \sin \alpha} = (\Lambda'_1(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda'_2(n)) \cdot \pi + \Lambda'_3(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda'_4(n),$$

где все $\Lambda'_i(n) \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $B_n/A_n = (34n)!(42n)!(81n)!/((21n)!(68n)!(68n)!)$, $A_n, B_n \in \mathbb{N}$, $(A_n, B_n) = 1$,

$$l_n = B_n^{-1} \cdot 6 \cdot q_{81n} \cdot 2^{42n} \cdot \frac{I}{i \sin \alpha} = (\Lambda_1(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda_2(n)) \cdot \pi + \Lambda_3(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda_4(n). \quad (11)$$

Тогда все $\Lambda_i(n) \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала приведем интеграл I к гипергеометрическому виду с помощью замены $x = \cos \alpha + i\sqrt{t} \sin \alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} 2 \cos \alpha - x &= \cos \alpha - i\sqrt{t} \sin \alpha, & x - \cos \alpha &= i\sqrt{t} \sin \alpha, \\ x(2 \cos \alpha - x) &= \cos^2 \alpha + t \sin^2 \alpha, & -x + \cos \alpha + i \sin \alpha &= i(1 - \sqrt{t}) \sin \alpha, \\ x - \cos \alpha + i \sin \alpha &= i(1 + \sqrt{t}) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 2^{42n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I &= 2^{42n} \cdot \frac{(\sin \alpha)^{204n}}{2(\cos \alpha)^{136n+2}} \cdot \int_0^1 \frac{t^{21n-1/2}(1-t)^{81n}}{(1 + (\operatorname{tg}^2 \alpha)t)^{68n+1}} dt \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})^{170n+1}}{2^{26n-1}} \int_0^1 \frac{t^{21n-1/2}(1-t)^{81n}}{(1 + (2 - \sqrt{3})^2 t)^{68n+1}} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Применим формулу Эйлера для гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b, c, z)$ [7; с. 72]:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{t^{21n-1/2}(1-t)^{81n}}{(1 + (2 - \sqrt{3})^2 t)^{68n+1}} dt \\ &= \frac{\Gamma(21n + 1/2)\Gamma(81n + 1)}{\Gamma(102n + 3/2)} \cdot F\left(68n + 1, 21n + \frac{1}{2}, 102n + \frac{3}{2}; -(2 - \sqrt{3})^2\right). \end{aligned}$$

Затем применим формулу Куммера $F(a, b, c, z) = (1 - z)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c, z)$ [7; с. 113] и снова формулу Эйлера:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{t^{21n-1/2}(1-t)^{81n}}{(1+(2-\sqrt{3})^2t)^{68n+1}} dt \\ &= \frac{\Gamma(21n+1/2)\Gamma(81n+1)}{\Gamma(34n+1/2)\Gamma(68n+1)} \cdot (4(2-\sqrt{3}))^{13n} \int_0^1 \frac{t^{34n-1/2}(1-t)^{68n}}{(1+(2-\sqrt{3})^2t)^{81n+1}} dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & 2^{68n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot J \\ & \equiv 2^{68n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \int_{\cos \alpha}^{\cos \alpha + i \sin \alpha} \frac{(x - \cos \alpha)^{68n} (-x + e^{i\alpha})^{68n} (x - e^{-i\alpha})^{68n}}{x^{81n+1} (2 \cos \alpha - x)^{81n+1}} dx \\ & = 2^{26n+1} \cdot (2 - \sqrt{3})^{183n+1} \int_0^1 \frac{t^{34n-1/2}(1-t)^{68n}}{(1+(2-\sqrt{3})^2t)^{81n+1}} dt. \end{aligned}$$

По формуле удвоения аргумента гамма-функции имеем

$$\frac{\Gamma(21n+1/2)}{\Gamma(34n+1/2)} = 2^{26n} \cdot \frac{(42n)!(34n)!}{(21n)!(68n)!}.$$

Итак, получим с учетом (12)

$$\begin{aligned} 2^{42n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I &= \frac{(2-\sqrt{3})^{170n+1}}{2^{26n-1}} \cdot \frac{\Gamma(21n+1/2)}{\Gamma(34n+1/2)} \cdot \frac{\Gamma(81n+1)}{\Gamma(68n+1)} \cdot (4(2-\sqrt{3}))^{13n} \\ &\quad \times \frac{1}{2^{26n+1}(2-\sqrt{3})^{183n+1}} \cdot 2^{68n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot J, \end{aligned}$$

или

$$J = 2^{-26n} \cdot \frac{A_n}{B_n} \cdot I. \quad (13)$$

Аналогично доказательству для I , для интеграла J можно доказать, что

$$6 \cdot q_{81n} \cdot 2^{68n} \cdot \frac{J}{i \sin \alpha} = (\tilde{\Lambda}_1(n) \cdot \sqrt{3} + \tilde{\Lambda}_2(n)) \cdot \pi + \tilde{\Lambda}_3(n) \cdot \sqrt{3} + \tilde{\Lambda}_4(n),$$

где все $\tilde{\Lambda}_i(n) \in \mathbb{Z}$.

Пусть

$$L_n = \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I \cdot 2^{42n} \cdot 6, \quad L'_n = \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot J \cdot 2^{68n} \cdot 6.$$

Из (13) получим

$$q_{81n} L'_n = q_{81n} \frac{A_n}{B_n} L_n. \quad (14)$$

Тогда из (14) и леммы 5 по стандартной схеме сокращения простых Чудновско-Хаты получаем утверждение леммы.

Далее вычислим константы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, введенные в лемме 4, для линейной формы (11).

ЛЕММА 7. *Выполнено равенство*

$$\gamma_3 = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |l_n| = 240.531.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \log |L_n|$ для только что введенной в доказательстве леммы 6 линейной формы L_n . Применим теорему Лапласа к интегралу (12). Корнем уравнения

$$\frac{21}{t} - \frac{81}{1-t} - \frac{68(2-\sqrt{3})^2}{1+(2-\sqrt{3})^2 t} = 0 \quad (15)$$

на интервале $(0; 1)$ является $t_0 = 0.1983$, т.е.

$$\begin{aligned} -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |L_n| &= -[170 \cdot \log(2 - \sqrt{3}) - 26 \cdot \log 2 + 21 \cdot \log t_0 \\ &\quad + 81 \cdot \log(1 - t_0) - 68 \cdot \log(1 + (2 - \sqrt{3})^2 t_0)] \\ &= 294.746. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n.$$

Рассмотрим для $x \in [0; 1)$ функцию

$$f(x) = [34x] + [42x] + [81x] - [21x] - [68x] - [68x].$$

Легко видеть, что $f(x) \in \{-1; 0; 1\}$ для $x \in [0; 1)$, причем $f(x) = 1$ при

$$\begin{aligned} x \in & \left[\frac{1}{81}; \frac{1}{68} \right) \cup \left[\frac{2}{81}; \frac{1}{34} \right) \cup \left[\frac{1}{27}; \frac{3}{68} \right) \cup \left[\frac{1}{14}; \frac{5}{68} \right) \cup \left[\frac{7}{81}; \frac{3}{34} \right) \\ & \cup \left[\frac{8}{81}; \frac{7}{68} \right) \cup \left[\frac{10}{81}; \frac{9}{68} \right) \cup \dots \cup \left[\frac{37}{42}; \frac{15}{17} \right) \cup \left[\frac{8}{9}; \frac{61}{68} \right) \cup \left[\frac{25}{27}; \frac{63}{68} \right) \\ & \cup \left[\frac{76}{81}; \frac{16}{17} \right) \cup \left[\frac{77}{81}; \frac{20}{21} \right) \cup \left[\frac{20}{21}; \frac{65}{68} \right) \cup \left[\frac{41}{42}; \frac{67}{68} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log B_n &= \left(\psi\left(\frac{1}{68}\right) - \psi\left(\frac{1}{81}\right) \right) \\ &\quad + \left(\psi\left(\frac{1}{34}\right) - \psi\left(\frac{2}{81}\right) \right) + \dots + \left(\psi\left(\frac{67}{68}\right) - \psi\left(\frac{41}{42}\right) \right) \\ &= 26.785. \end{aligned}$$

Так как $l_n = L_n \cdot q_{81n} \cdot B_n^{-1}$, то $\gamma_3 = 294.746 - 81 + 26.785 = 240.531$, и лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Выполнено равенство*

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Lambda_1(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda_2(n)| = 147.775.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\gamma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\Lambda_1(n) \cdot \sqrt{3} + \Lambda_2(n)| = 81 - 26.785 + 42 \log 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1|.$$

Последний предел можно вычислить методом перевала, используя второй корень уравнения (15), либо непосредственно корень уравнения $f'(x) = 0$, где

$$f(x) = \frac{(x - \cos \alpha)^{42} (-x + \cos \alpha + i \sin \alpha)^{81} (x - \cos \alpha + i \sin \alpha)^{81}}{x^{68} (2 \cos \alpha - x)^{68}}$$

при $\alpha = \pi/12$. Имеем $x_0 = 2.670$, тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |a_1| = \log |f(x_0)| = 64.448.$$

Поэтому $\gamma_1 = 81 - 26.785 + 42 \log 2 + 64.448 = 147.775$, и лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Выполнена оценка*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| \leq \gamma_2 = 165.545.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем представление интеграла (12) из леммы 6. Имеем

$$2^{42n} \cdot \frac{1}{i \sin \alpha} \cdot I = 2^{-26n+1} (2 - \sqrt{3})^{170n+1} \int_0^1 \frac{t^{21n-1/2} (1-t)^{81n}}{(1-zt)^{68n+1}} dt,$$

где $z = -(2 - \sqrt{3})^2$.

Тогда, применяя разложение

$$\frac{1}{(1-zt)^{68n+1}} = \sum_{s \geq 0} \frac{(s+1) \cdots (s+68n)}{(68n)!} z^s t^s,$$

имеем последовательно

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{t^{21n-1/2} (1-t)^{81n}}{(1-zt)^{68n+1}} dt \\ &= \sum_{s \geq 0} \frac{(s+1) \cdots (s+68n)}{(68n)!} \\ & \quad \times \frac{(81n)!}{(s+21n+1/2)(s+21n+3/2) \cdots (s+102n+1/2)} \cdot z^s \\ &= \sum_{\substack{s=s_1-68n \\ s_1 \geq 0}} \frac{s_1(s_1-1) \cdots (s_1-68n+1)}{(68n)!} \\ & \quad \times \frac{(81n)!}{(s_1-47n+1/2) \cdots (s_1+34n+1/2)} \cdot z^{s_1-68n} \\ &= \frac{(81n)!}{(68n)!} \cdot \sum_{s_1 \geq 0} \left(\sum_{k=1}^{47n} \omega_k \cdot \frac{z^{s_1-68n}}{s_1-k+1/2} + \sum_{k=0}^{34n} \tilde{\omega}_k \cdot \frac{z^{s_1-68n}}{s_1+k+1/2} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\omega_k = \frac{(-1)^{21n}((1/2) \cdot (3/2) \cdots (68n - k - 1/2)) \cdot ((1/2) \cdot (3/2) \cdots (k - 1/2))}{(47n - k)!(34n + k)!},$$

$$\tilde{\omega}_k = \frac{(-1)^{21n+k}(k + 1/2) \cdot (k + 3/2) \cdots (k + 68n - 1/2)}{(k + 47n)!(34n - k)!}.$$

Имеем для рядов из (16)

$$\sum_{s_1 \geq 0} \frac{z^{s_1 - \kappa}}{s_1 - \kappa + 1/2} = - \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{z^{-j}}{j - 1/2} + \varphi(z), \quad \sum_{s_1 \geq 0} \frac{z^{s_1 + k}}{s_1 + k + 1/2} = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^j}{j + 1/2} + \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{j \geq 0} \frac{z^j}{j + 1/2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \log \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Окончательно из (11), (12), (16) получим

$$l_n = 6 \cdot B_n^{-1} \cdot q_{81n} \cdot 2^{-26n+2} \cdot (2 - \sqrt{3})^{170n+1} \cdot \frac{(81n)!}{(68n)!}$$

$$\times \left[\frac{\pi/6}{2 - \sqrt{3}} \left(\sum_{\kappa=1}^{47n} (2 - \sqrt{3})^{2\kappa-136n} \cdot \omega_{\kappa} + \sum_{k=1}^{34n} (2 - \sqrt{3})^{-2k-136n} \cdot \tilde{\omega}_k \right) \right.$$

$$\left. + \sum_{\kappa=1}^{47n} \omega_{\kappa} \cdot \sum_{j=1}^{\kappa} \frac{(2 - \sqrt{3})^{2\kappa-136n-2j}}{j - 1/2} + \sum_{k=1}^{34n} \tilde{\omega}_k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2 - \sqrt{3})^{2j-2k-136n}}{j + 1/2} \right]. \quad (17)$$

Обозначим

$$t_1 = 6 \cdot B_n^{-1} \cdot q_{81n} \cdot 2^{-26n+2};$$

$$t_2 = \max_{1 \leq \kappa \leq 47n} \frac{(81n)!}{(68n)!} |\omega_{\kappa}| \cdot (2 + \sqrt{3})^{2\kappa+34n};$$

$$t_3 = \max_{1 \leq k \leq 34n} \frac{(81n)!}{(68n)!} |\tilde{\omega}_k| \cdot (2 + \sqrt{3})^{34n-1}.$$

Тогда из (17) простыми оценками по модулю и заменой $2 - \sqrt{3}$ на $2 + \sqrt{3}$ имеем

$$\Lambda(n) \equiv \max_{1 \leq i \leq 4} |\Lambda_i(n)| \leq 2 \cdot (47n)^2 \cdot t_1 \cdot \max(t_2, t_3).$$

Вычислим t_2, t_3 . Обозначим

$$W_1(k) = |\omega_k| \cdot (2 + \sqrt{3})^{2k}, \quad W_1 = \max_{1 \leq k \leq 47n} W_1(k),$$

$$W_2(k) = |\tilde{\omega}_k|, \quad W_2 = \max_{0 \leq k \leq 34n} W_2(k).$$

Решим неравенства

$$\frac{W_1(k+1)}{W_1(k)} \leq 1, \quad \text{или} \quad \frac{(2 + \sqrt{3})^2(k + 1/2)(47n - k)}{(34n + k + 1)(68n - k - 1/2)} \leq 1,$$

$$\frac{W_2(k+1)}{W_2(k)} \leq 1, \quad \text{или} \quad \frac{(k+68n+1/2)(34n-k)}{(47n+k+1)(k+1/2)} \leq 1.$$

Тогда t_2 достигается при $k = k_0n + o(n)$, $k_0 = 43.936$, t_3 достигается при $k = 19.323n + o(n)$, при этом $t_2 > t_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 81 - 26.785 - 26 \log 2 + 81 \log 81 - 68 \log 68 + (34 + 2k_0) \log(2 + \sqrt{3}) \\ &\quad + (68 - k_0) \log(68 - k_0) + k_0 \log k_0 - (47 - k_0) \log(47 - k_0) \\ &\quad - (34 + k_0) \log(34 + k_0) \\ &= 165.545. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 1. Вычисленные в леммах 7–9 значения γ_1 , γ_2 , γ_3 позволяют применить лемму 4 к линейной форме (11) и получить оценку

$$\mu > 2 \frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_3 - \gamma_2} = 10.3567.$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. Х. Салихову за большую помощь в работе, а также Ю. В. Нестеренко и В. В. Зудилину за проявленное внимание и полезное обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Hata, “Rational approximations to π and some other numbers”, *Acta Arith.*, **63**:4 (1993), 335–349.
- [2] F. Amoroso, C. Viola, “Approximation measures for logarithms of algebraic numbers”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **30**:1 (2001), 225–249.
- [3] A. Heimonen, T. Matala-Aho, K. Väänänen, “An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50**:2 (1994), 225–243.
- [4] M. Hata, “Irrationality measures of the values of hypergeometric functions”, *Acta Arith.*, **60**:4 (1992), 335–347.
- [5] В. Х. Салихов, “О мере иррациональности $\log 3$ ”, *Докл. РАН*, **417**:6 (2007), 1–3.
- [6] В. Х. Салихов, Е. С. Сальникова, “Диофантовы приближения логарифма “золотого сечения”, *Вестн. БГТУ*, 2007, № 1, 111–119.
- [7] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.

Е. Б. Томашевская

Брянский государственный технический университет
E-mail: syssov@mail.ru

Поступило
23.05.2007