Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Трунк, Спектральная теория операторных матриц, встречающихся в моделях механики, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 923–932

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:17:33

Спектральная теория операторных матриц, встречающихся в моделях механики

К. Трунк

Доказаны различные свойства операторных матриц

$$\mathcal{A} = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -D \end{vmatrix},$$

где A_0 – равномерно положительный оператор и $A_0^{-1/2}DA_0^{-1/2}$ – ограниченный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H . Таким операторным матрицам соответствуют задачи второго порядка вида $\ddot{z}(t) + A_0z(t) + D\dot{z}(t) = 0$, которые используются в моделях поперечного движения тонких лучей при демпфировании.

Библиография: 35 названий.

1. Введение. Линейное уравнение, описывающее поперечное движение тонкого луча, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[E \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + C_d \frac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial t} \right] = 0, \quad r \in (0, 1), \quad t > 0,$$

где $u(r, t)$ – поперечное смещение луча в момент времени t в точке r . Существование и поведение решений u также зависит от граничных и начальных условий. В приведенном выше примере, нас интересуют решения, имеющие конечную энергию, т.е. решения такие, что $\|u(\cdot, t)\|^2 + \|u''(\cdot, t)\|^2 < \infty$ при всех $t > 0$, где $\|\cdot\|$ обозначает обычную норму в гильбертовом пространстве $L^2(0, 1)$. отождествляя функцию $u(\cdot, t)$ и элемент $z(t) \in L^2(0, 1)$ соотношением $z(t)(r) = u(r, t)$, мы из приведенного выше дифференциального уравнения получим уравнение второго порядка в $L^2(0, 1)$, которое имеет вид

$$\ddot{z}(t) + A_0z(t) + D\dot{z}(t) = 0, \tag{1}$$

где операторы

$$A_0 = E \frac{\partial^4}{\partial r^4} \quad \text{и} \quad D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} C_d \frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

действуют в $L^2(0, 1)$ и имеют соответствующие области определения, несущие в себе информацию о граничных условиях изучаемой задачи.

В настоящей работе рассматриваются уравнения второго порядка вида (1) в абстрактном гильбертовом пространстве H , где оператор жесткости A_0 может быть

неограниченным положительным оператором на H , но мы предполагаем, что он ограниченно обратимый, а оператор демпфирования D – неограниченный оператор на H . Это уравнение второго порядка эквивалентно стандартному уравнению первого порядка $\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t)$, где

$$\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \times H \rightarrow \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \times H$$

задается соотношениями

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -D \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \times \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \mid A_0 z + Dw \in H \right\}.$$

Этот матричный оператор изучался в литературе в течение более чем 20 лет. Интерес к этой частной модели вызван различными задачами, такими как задачи стабилизации, см., например, [1]–[4], задачами разрешимости уравнения Риккати [5], свойствами минимальной фазы [6] и задачами о компенсаторе с частичными наблюдениями [7]. Хорошо известно, что $\mathcal{A}$ порождает C_0 -полугруппу сжимающих отображений в $\mathcal{D}(A_0^{1/2}) \times H$, где $\mathcal{D}(A_0^{1/2})$ снабжено нормой $x \mapsto \|A_0^{1/2}x\|_H$, и, таким образом, спектр операторной матрицы $\mathcal{A}$ расположен в замкнутой левой полуплоскости. Это построение восходит к [8] и [9], см. также [10], [11]. Некоторые авторы не зависимо друг от друга доказали, что условие

$$\inf_{z \in \mathcal{D}(A_0^{1/2}) \setminus \{0\}} \frac{\langle A_0^{-1/2} D z, A_0^{1/2} z \rangle_H}{\|z\|_H^2} > 0$$

достаточно для экспоненциальной устойчивости C_0 -полугруппы, порождаемой $\mathcal{A}$, см., например [8], [10]–[16]. Другие свойства C_0 -полугруппы такие, как аналитичность, изучались в [8], [10], [11], [17]–[23].

В большинстве работ требуется, чтобы оператор демпфирования D был сравнимым с A^ρ для некоторого $\rho \in [1/2, 1]$. В [23] оператор демпфирования D имеет вид

$$D = \alpha A_0 + B, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$ – константа, A_0^{-1} – компактный, а B – симметричный и A_0 -компактный операторы.

Если $-1/\alpha \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, то, как показано в работе [23], $\mathcal{A}$ порождает аналитическую полугруппу. В [24] мы расширили этот результат на случай, когда A_0^{-1} компактен в H и $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$. Кроме того, в [24] показано, что $\mathcal{A}$ – дефинизируемый оператор.

В данной работе также предполагается, что A_0^{-1} – компактный оператор. Покажем, что условие $\sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D) = \{0\}$ эквивалентно условию дефинизируемости для $\mathcal{A}$. Оказывается, что в случае, когда $\mathcal{A}$ имеет компактную резольвенту, в отличие от ситуации, рассмотренной в [23] и [24], оператор $\mathcal{A}$ перестает быть дефинизируемым.

Всюду в этой работе предполагается, что все рассматриваемые гильбертовы пространства бесконечномерные.

2. Спектр операторов в пространствах Крейна. Пусть $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ – пространство Крейна. Коротко напомним, что комплексное линейное пространство $\mathcal{H}$ с эрмитовой невырожденной полубилинейной формой $[\cdot, \cdot]$ называется *пространством Крейна*, если существует разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ на подпространства $\mathcal{H}_\pm$, ортогональные друг другу относительно $[\cdot, \cdot]$ и такие, что $(\mathcal{H}_\pm, \pm[\cdot, \cdot])$ являются гильбертовыми пространствами. В дальнейшем, все топологические понятия вводятся относительно нормы некоторого гильбертова пространства $\|\cdot\|$ на $\mathcal{H}$ так, чтобы форма $[\cdot, \cdot]$ была $\|\cdot\|$ -непрерывной. Более подробно фундаментальная теория пространств Крейна и операторов, действующих в этих пространствах, изложена в [25] и [26].

Пусть A – замкнутый оператор в $\mathcal{H}$. Определим расширенный спектр $\sigma_e(A)$ оператора A как $\sigma_e(A) := \sigma(A)$, если A ограничен, и как $\sigma_e(A) := \sigma(A) \cup \{\infty\}$, если A не ограничен. Резольвентное множество оператора A обозначим через $\rho(A)$ и положим, что $\rho_e(A) := (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \sigma_e(A)$. Будем говорить, что точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ принадлежит *аппроксимативному точечному спектру* $\sigma_{\text{ap}}(A)$ оператора A , если существует последовательность $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ такая, что $\|x_n\| = 1$ при $n = 1, 2, \dots$ и $\|(A - \lambda_0 I)x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для самосопряженного оператора A в $\mathcal{H}$, все вещественные точки спектра оператора A принадлежат $\sigma_{\text{ap}}(A)$ (см., например, [25; следствие VI.6.2]).

Из индефинитности скалярного произведения на $\mathcal{H}$ следуют определения некоторых подмножеств спектра оператора. Следующее определение было дано в [27]–[29].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Для самосопряженного оператора A в $\mathcal{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$, точка $\lambda_0 \in \sigma(A)$ называется *спектральной точкой типа π_+* (соответственно *типа π_-*) *оператора A* , если $\lambda_0 \in \sigma_{\text{ap}}(A)$ и существует линейное подмножество $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ коразмерности $\text{codim } \mathcal{H}_0 < \infty$ такое, что для любой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{D}(A)$ с $\|x_n\| = 1$ и $\|(A - \lambda_0 I)x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] > 0 \quad (\text{соответственно } \limsup_{n \rightarrow \infty} [x_n, x_n] < 0).$$

Точка $\lambda_0 \in \sigma(A)$ называется *спектральной точкой положительного типа* (соответственно *отрицательного типа*) *оператора A* , если $\lambda_0 \in \sigma_{\pi_+}(A)$ (соответственно если $\lambda \in \sigma_{\pi_-}(A)$) и $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$. Точка ∞ называется *точкой положительного типа* (соответственно *отрицательного типа*) *оператора A* , если A не ограничен и, для любой последовательности $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ и $\|Ax_n\| = 1$, имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} [Ax_n, Ax_n] > 0 \quad (\text{соответственно } \limsup_{n \rightarrow \infty} [Ax_n, Ax_n] < 0).$$

Обозначим множество точек спектра $\sigma_e(A)$ положительного (соответственно отрицательного) типа через $\sigma_{++}(A)$ (соответственно через $\sigma_{--}(A)$).

Аналогично вводится понятие того, что ∞ является спектральной точкой типа π_+ (типа π_-) оператора A (ср. [29]). Обозначим множество всех точек спектра $\sigma_e(A)$ типа π_+ (типа π_-) оператора A через $\sigma_{\pi_+}(A)$ (через $\sigma_{\pi_-}(A)$ соответственно). Нетрудно видеть, что множества $\sigma_{++}(A)$ и $\sigma_{--}(A)$ содержатся в $\overline{\mathbb{R}}$. Кроме того, невещественный спектр оператора A не может накапливаться до $\sigma_{++}(A) \cup \sigma_{--}(A)$. Более подробное изложение свойств этих множеств можно найти в [29].

Напомним, что самосопряженный оператор A в пространстве Крейна $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ называется *дефинизируемым*, если $\rho(A) \neq \emptyset$ и существует рациональная функция $p \neq 0$, имеющая полюса только в $\rho(A)$ и такая, что $[p(A)x, x] \geq 0$ при всех $x \in \mathcal{H}$. Тогда спектр оператора A вещественный или его невещественная часть содержит конечное число точек, ср. [30].

Приведенные ниже теоремы понадобятся при доказательстве основного результата в п. 3. Будет показано, что вещественная спектральная точка, не являющаяся собственным значением и примыкающая к спектру типа π_+ (типа π_-) и к резольвентному множеству дефинизируемого оператора должна быть спектральной точкой положительного или отрицательного типа соответственно.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть A – дефинизируемый оператор, и пусть (a, b) – открытый интервал такой, что

$$(a, b) \subset \sigma_{\pi_+}(A) \cup \sigma_{\pi_-}(A) \cup \rho(A) \quad \text{и} \quad b \notin \sigma_p(A).$$

Если существует $c > b$ такое, что $(b, c) \subset \rho(A)$, то

$$b \in \sigma_{++}(A) \cup \sigma_{--}(A) \cup \rho(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как A – дефинизируемый оператор, существуют $a_0 \in (a, b)$ и $c_0 \in (b, c)$ такие, что $[a_0, c_0] \setminus \{b\}$ является либо подмножеством множества $\sigma_{++}(A) \cup \rho(A)$, либо подмножеством множества $\sigma_{--}(A) \cup \rho(A)$. Пусть $[a_0, c_0] \setminus \{b\} \subset \sigma_{++}(A) \cup \rho(A)$. Обозначим через E спектральную функцию оператора A (ср. [30]). Тогда $E([a_0, c_0])$ определено и $E([a_0, c_0])\mathcal{H}$ – пространство Крейна. По [31; теорема 4.8 и замечание 4.9] оператор

$$A' := A|_{E([a_0, c_0])\mathcal{H}}$$

дефинизируем и сужение E на $E([a_0, c_0])$ является спектральной функцией для A' . Из предложения [29; предложение 25] следует, что для любого интервала $\delta \subset [a_0, c_0]$ с $b \notin [a_0, c_0]$ проекция $E([a_0, c_0])$ неотрицательна. Следовательно, подпространство $\mathcal{S}$ пространства $E([a_0, c_0])\mathcal{H}$,

$$\mathcal{S} := \text{cls}\{E(\delta)\mathcal{H} : \delta \subset [a_0, c_0], \delta - \text{интервал}, b \notin \bar{\delta}\}.$$

неотрицательно [30; лемма I.5.3]. В силу ([30; предложения II.5.1, II.5.2]), подпространство ортогональное $\mathcal{S}$ в $E([a_0, c_0])\mathcal{H}$ является корневым подпространством для оператора A , соответствующим b , и, следовательно, так как $b \notin \sigma_p(A)$,

$$\mathcal{S} = E([a_0, c_0])\mathcal{H},$$

т.е. $(E([a_0, c_0])\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ – гильбертово пространство. Из [29; предложение 25] следует, что

$$[a_0, c_0] \subset \sigma_{++}(A) \cup \rho(A).$$

Аналогичные рассуждения проводятся и для $[a_0, c_0] \setminus \{b\} \subset \sigma_{--}(A) \cup \rho(A)$. Теорема 2.2 доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что оператор A – дефинизируемый, а положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора A . Тогда*

$$\infty \in \sigma_{\pi+}(A) \cup \sigma_{\pi-}(A) \cup \rho_e(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [29; лемма 10] имеем $\infty \in \sigma_{\pi+}(A) \cup \sigma_{\pi-}(A) \cup \rho_e(A)$ тогда и только тогда, когда $\infty \in \sigma_{++}(A) \cup \sigma_{--}(A) \cup \rho_e(A)$. Это эквивалентно тому, что $\infty \in \sigma_{++}(A-1) \cup \sigma_{--}(A-1) \cup \rho_e(A-1)$. Последнее включение выполняется тогда и только тогда, когда

$$0 \in \sigma_{++}((A-1)^{-1}) \cup \sigma_{--}((A-1)^{-1}) \cup \rho_e((A-1)^{-1}),$$

см. [32]. Здесь $(A-1)^{-1}$ – ограниченный дефинизируемый оператор. Так как A – дефинизируемый оператор, некоторый интервал $(-\infty, -t)$ принадлежит области $\sigma_{++}(A) \cup \rho(A)$ или $\sigma_{--}(A) \cup \rho(A)$. Тогда теорема 2.3 следует из теоремы 2.2.

3. Демпфирование, малое по сравнению с A_0 . В заключительной части этой работы мы сделаем следующие предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (A). *Оператор жесткости $A_0: \mathcal{D}(A_0) \subset H \rightarrow H$ – самосопряженный равномерно положительный оператор на гильбертовом пространстве H . Будем считать, что при $s > 0$ пространство $H_s = \mathcal{D}(A_0^s)$ снабжено нормой $\|\cdot\|_{H_s} := \|A_0^s \cdot\|_H$ и H_{-s} является пополнением пространства H относительно нормы $\|z\|_{H_{-s}} = \|A_0^{-s}z\|_H$. Таким образом, A_0 сужается (или расширяется) до ограниченного оператора $A_0: H_s \rightarrow H_{s-1}$. Мы будем пользоваться тем же самым обозначением A_0 для сужения или расширения. Будем обозначать скалярное произведение на H через $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ или $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и дуальное спаривание на $H_{-s} \times H_s$ – через $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{-s} \times H_s}$. Заметим, что для $(z', z) \in H \times H_s$ выполняется соотношение*

$$\langle z', z \rangle_{H_{-s} \times H_s} = \langle z', z \rangle_H.$$

Кроме того, в этом пункте предполагается, что оператор D сравним с A_0 в следующем смысле.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ (D1). *Оператор демпфирования $D: H_{1/2} \rightarrow H_{-1/2}$ – ограниченный оператор такой, что $A_0^{-1/2}DA_0^{-1/2}$ – ограниченный самосопряженный оператор в H , удовлетворяющий условию*

$$\langle Dz, z \rangle_{H_{-1/2} \times H_{1/2}} \geq 0, \quad z \in H_{1/2}.$$

Уравнение (1) эквивалентно следующему стандартному уравнению первого порядка:

$$\dot{x}(t) = \mathcal{A}x(t),$$

где $\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset H_{1/2} \times H \rightarrow H_{1/2} \times H$ задается соотношениями

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -D \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in H_{1/2} \times H_{1/2} \mid A_0z + Dw \in H \right\}.$$

Сам оператор $\mathcal{A}$ не является самосопряженным в гильбертовом пространстве $H_{1/2} \times H$. Легко видеть (см., например, [15]), что $\mathcal{A}$ – ограниченный обратный оператор в $H_{1/2} \times H$, задаваемый соотношением

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{vmatrix} -A_0^{-1}D & -A_0^{-1} \\ I & 0 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $A_0^{-1}D$ рассматривается как оператор, действующий в $H_{1/2}$. Отсюда и из того, что

$$J\mathcal{A}, \quad \text{где } J = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}, \quad (4)$$

– симметричный оператор в гильбертовом пространстве $H_{1/2} \times H$, следует самосопряженность оператора $J\mathcal{A}$ в $H_{1/2} \times H$. Следовательно (ср. также [33; доказательство леммы 4.5]),

$$\mathcal{A}^* = J\mathcal{A}J \quad \text{при том, что } \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = J\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

и

$$\operatorname{Re}\langle \mathcal{A}x, x \rangle \leq 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}^*x, x \rangle \leq 0 \quad \text{при } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*).$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу сжимающих отображений на пространстве состояний $H_{1/2} \times H$. Этот факт хорошо известен.

Для

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H_{1/2} \times H$$

определим индефинитное скалярное произведение на $H_{1/2} \times H$ с помощью соотношения

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] := \left\langle J \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_{1/2}} - \langle y_1, y_2 \rangle. \quad (5)$$

Тогда $(H_{1/2} \times H, [\cdot, \cdot])$ – пространство Крейна, а $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор относительно $[\cdot, \cdot]$. Таким образом, мы доказали следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Оператор $\mathcal{A}$ – самосопряженный в пространстве Крейна $(H_{1/2} \times H, [\cdot, \cdot])$, его спектр содержится в замкнутой левой полуплоскости и расположен симметрично относительно вещественной оси. Оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный оператор и порождает сильную полугруппу сжимающих отображений на $H_{1/2} \times H$.

В дальнейшем будет рассматриваться случай оператора A_0 с компактной резольвентой. Заметим, что в этом случае оператор $\mathcal{A}^{-1}$, вообще говоря, не будет компактным оператором в $H_{1/2} \times H$.

ЛЕММА 3.2. Предположим, что A_0^{-1} – компактный оператор в H . Тогда

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{\lambda} \in \sigma_{\text{ess}}(-A_0^{-1}D) \right\} \subset (-\infty, 0). \quad (6)$$

Здесь $A_0^{-1}D$ является оператором, действующим в $H_{1/2}$. В частности, следующие

утверждения эквивалентны:

- (i) оператор $\mathcal{A}^{-1}$ – компактный оператор в $H_{1/2} \times H$;
- (ii) $\sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D) = \{0\}$;
- (iii) оператор D – компактный оператор, действующий из $H_{1/2}$ в $H_{-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (6) следует из (3) (см., например, [34]). Очевидно, в силу (3) из (i) следует (ii). Оператор $A_0^{-1}D$ является ограниченным сопряженным оператором в гильбертовом пространстве $H_{1/2}$. Следовательно, из (ii) следует компактность оператора $A_0^{-1}D$ в $H_{1/2}$ и в силу (3) следует утверждение (i). Оператор $\mathcal{A}^{-1}$, рассматриваемый как оператор, действующий из $H_{-1/2}$ в $H_{1/2}$, является унитарным оператором. Отсюда следует эквивалентность утверждений (ii) и (iii).

Напомним, что не более чем счетное бесконечное множество $\mathcal{M}$ элементов гильбертова пространства называется базисом Рисса, если существует изоморфное отображение $\mathcal{M}$ на ортогональный базис, ср. [35; лекция VI]. В работе [24] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A_0^{-1} – компактный оператор в H и $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$, где $A_0^{-1}D$ является оператором, действующим в $H_{1/2}$. Тогда $\mathcal{A}$ – дефинизируемый оператор, порождающий аналитическую полугруппу на $H_{1/2} \times H$. Кроме того, если множество $\sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$ счетно и имеет не более чем счетное число точек накопления и если $1/\mu \notin \sigma_p(\mathcal{A})$ при всех $\mu \in \sigma_{\text{ess}}(-A_0^{-1}D)$, то в пространстве $H_{1/2} \times H$ существует базис Рисса, состоящий из собственных векторов и конечного числа присоединенных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Главный результат данной работы представлен следующей теоремой. Показано, что оператор $\mathcal{A}$ – дефинизируемый тогда и только тогда, когда $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть A_0^{-1} – компактный оператор в H и $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$, где $A_0^{-1}D$ является оператором, действующим в $H_{1/2}$. Тогда $\mathcal{A}$ не является дефинизируемым оператором в $H_{1/2} \times H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{A}$ – дефинизируемый оператор.

Так как $0 \in \sigma_{\text{ess}}(A_0^{-1}D)$, существует последовательность $(x_n) \in H_{1/2}$, слабо сходящаяся к нулю в $H_{1/2}$ так, что $\|x_n\|_{H_{1/2}} = 1$, и такая, что $A_0^{-1}Dx_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $(A_0^{1/2}x_n)$ слабо сходится к нулю в H , и отсюда следует, что (x_n) сходится к нулю в H . Последовательность

$$\left(\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right) \subset H_{1/2} \times H$$

удовлетворяет условиям

$$\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{H_{1/2} \times H} = 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0^{-1}Dx_n \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, $\left(\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ слабо сходится к нулю в $H_{1/2} \times H$ так, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 1.$$

В силу [29; лемма 14] 0 не принадлежит $\sigma_{\pi_-}(\mathcal{A}^{-1})$.

Выберем последовательность $(y_n) \in H$, слабо сходящуюся к нулю в H и такую, что $\|y_n\| = 1$. Следовательно, $(A_0^{-1}y_n)$ сходится к нулю в H . Последовательность

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right) \subset H_{1/2} \times H$$

удовлетворяет условиям

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right\|_{H_{\frac{1}{2}} \times H} = 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_0^{-1}y_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right)$ слабо сходится к нулю в $H_{1/2} \times H$ так, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_n \end{pmatrix} \right] = -11.$$

В силу [29; теорема 14] 0 не принадлежит $\sigma_{\pi_+}(\mathcal{A}^{-1})$ и, следовательно, $0 \notin \sigma_{\pi_+}(\mathcal{A}^{-1}) \cup \sigma_{\pi_-}(\mathcal{A}^{-1})$. Легко видеть (см., например, [32]), что это выполняется тогда и только тогда, когда $\infty \notin \sigma_{\pi_+}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{\pi_-}(\mathcal{A})$. Но по теореме 2.3 это невозможно. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ не является дефинизируемым.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Если B – самосопряженный оператор в H такой, что при некоторых $0 \leq \theta < 1/2$ выполняются неравенства

$$k_1 \|A_0^\theta x\| \leq \|Bx\| \leq k_2 \|A_0^\theta x\| \quad \text{при } x \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_0^\theta),$$

то полугруппа, порождаемая оператором $\mathcal{A}$, не является аналитической, ср. [18; предложение 2.1]. Однако, в [18] было показано, что если B – самосопряженный оператор в H и такой, что $\mathcal{D}(A_0^{\theta/2}) = \mathcal{D}(B^{1/2})$ при некоторых $1/2 \leq \theta \leq 1$ и

$$k_1 A_0^\theta \leq B \leq k_2 A_0^\theta, \quad x \in \mathcal{D}(B),$$

то полугруппа, порождаемая $\mathcal{A}$, является аналитической. Кроме того, в [23] приведены достаточные условия для существования базиса Рисса.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C.D. Benchimol, “A note on weak stabilizability of contraction semigroups”, *SIAM J. Control Optimization*, **16**:3 (1978), 373–379.
- [2] I. Lasiecka, R. Triggiani, “Uniform exponential energy decay of wave equations in a bounded region with $L^2(0, \infty; L^2(\Gamma))$ – feedback control in the Dirichlet boundary condition”, *J. Differential Equations*, **66**:3 (1987), 340–390.
- [3] N. Levan, “The stabilization problem: A Hilbert space operator decomposition approach”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **25**:9 (1978), 721–727.
- [4] M. Slemrod, “Stabilization of boundary control systems”, *J. Differential Equation*, **22**:2 (1976), 402–415.
- [5] E. Hendrickson, I. Lasiecka, “Numerical approximations and regularizations of Riccati equations arising in hyperbolic dynamics with unbounded control operators”, *Comput. Optim. Appl.*, **2**:4 (1993), 343–390.
- [6] B. Jacob, K. Morris, C. Trunk, “Minimum-phase infinite-dimensional second-order systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* (to appear).

- [7] E. Hendrickson, I. Lasiecka, “Finite-dimensional approximations of boundary control problems arising in partially observed hyperbolic systems”, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, **1:1** (1995), 101–142.
- [8] H. T. Banks, K. Ito, “A unified framework for approximation in inverse problems for distributed parameter systems”, *Control Theory Adv. Tech.*, **4:1** (1988), 73–90.
- [9] I. Lasiecka, “Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary”, *J. Differential Equations*, **79:2** (1989), 340–381.
- [10] H. T. Banks, K. Ito, Y. Wang, “Well posedness for damped second-order systems with unbounded input operators”, *Differential Integral Equations*, **8:3** (1995), 587–606.
- [11] S. Chen, K. Liu, Z. Liu, “Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin–Voigt damping”, *SIAM J. Appl. Math.*, **59:2** (1999), 651–668.
- [12] A. Bátkai, K.-J. Engel, “Exponential decay of 2×2 operator matrix semigroups”, *J. Comput. Anal. Appl.*, **6:2** (2004), 153–163.
- [13] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, “Экспоненциальная устойчивость полугрупп, связанных с некоторыми операторными моделями в механике”, *Матем. заметки*, **73:5** (2003), 657–664.
- [14] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, “Экспоненциальное убывание энергии решений уравнений, отвечающих некоторым операторным моделям механики”, *Функц. анализ и его прил.*, **38:3**, 3–14.
- [15] M. Tucsnak, G. Weiss, “How to get a conservative well-posed linear system out of thin air. II: Controllability and stability”, *SIAM J. Control Optim.*, **42:3** (2003), 907–935.
- [16] K. Veselić, “Energy decay of damped systems”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **84:12** (2004), 856–863.
- [17] G. Chen, D. Russell, “A mathematical model for linear elastic systems with structural damping”, *Quart. Appl. Math.*, **39:4** (1982), 433–454.
- [18] S. Chen, R. Triggiani, “Proof of extensions of two conjectures on structural damping for elastic systems”, *Pacific J. Math.*, **136:1** (1989), 15–55.
- [19] S. Chen, R. Triggiani, “Characterization of domains of fractional powers of certain operators arising in elastic systems, and applications”, *J. Differential Equations*, **88:2** (1990), 279–293.
- [20] Р. О. Гринив, А. А. Шкаликов, “Операторные модели в теории упругости и гидромеханике и соответствующие аналитические полугруппы”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 5, 5–14.
- [21] F. Huang, “On the mathematical model for linear elastic systems with analytic damping”, *SIAM J. Control Optim.*, **26:3** (1988), 714–724.
- [22] F. Huang, “Some problems for linear elastic systems with damping”, *Acta Math. Sci.*, **10:3** (1990), 319–326.
- [23] P. Lancaster, A. Shkalikov, “Damped vibrations of beams and related spectral problems”, *Canad. Appl. Math. Quart.*, **2:1** (1994), 45–90.
- [24] B. Jacob, C. Trunk, M. Winklmeier, *Analyticity and Riesz basis property of semigroups associated to damped vibrations* (to appear).
- [25] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **78**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1974.
- [26] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986.
- [27] P. Lancaster, A. Markus, V. Matsaev, “Definitizable operators and quasihyperbolic operator polynomials”, *J. Funct. Anal.*, **131:1** (1995), 1–28.
- [28] H. Langer, A. Markus, V. Matsaev, “Locally definite operators in indefinite inner product spaces”, *Math. Ann.*, **308:3** (1997), 405–424.
- [29] Т. Я. Азизов, P. Jonas, C. Trunk, “Spectral points of type π_+ and π_- of self-adjoint operators in Krein spaces”, *J. Funct. Anal.*, **226:1** (2005), 114–137.
- [30] H. Langer, “Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces”, *Functional Analysis* (Dubrovnik, 1981), *Lecture Notes in Math.*, **948**, Springer, Berlin, 1982, 1–46.

- [31] P. Jonas, “On locally definite operators in Krein spaces”, *Spectral analysis and its applications*, Theta Ser. Adv. Math., **2**, Theta, Bucharest, 2003, 95–127.
- [32] T. Ya. Azizov, J. Behrndt, P. Jonas, C. Trunk, *Spectral points of type π_+ and π_- for closed linear relations in Krein spaces* (to appear).
- [33] G. Weiss, M. Tucsnak, “How to get a conservative well-posed linear system out of thin air. I: Well-posedness and energy balance”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **9** (2003), 247–274.
- [34] B. Jacob, C. Trunk, “Location of the spectrum of operator matrices which are associated to second order equations”, *Oper. Matrices*, **1**:1 (2007), 45–60.
- [35] Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига*, Наука, М., 1980.

К. Трунк

Technische Universität Berlin

E-mail: trunk@math.tu-berlin.de

Поступило

20.07.2007