Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Жура, Об одном классе гиперболических полиномов, *Матем. заметки*, 2008, том 83, выпуск 6, 825–830

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:42:42

Об одном классе гиперболических полиномов

Н. А. Жура

В работе изучается вопрос о вещественности корней биквадратного уравнения, который определяется по паре вещественных симметрических положительно определенных матриц третьего порядка и трехмерному вектору параметров. Получено явное представление дискриминанта такого многочлена в виде суммы не более чем двух квадратов.

Библиография: 6 названий.

Введение. Каждой неособой матрице $a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ поставим в соответствие ее присоединенную $a^* = \det a \cdot a^{-1}$. Сумма диагональных элементов матрицы a , называемая ее *следом*, обозначается $\text{tr } a$. Кроме того, с каждым ненулевым вектором $\xi \in \mathbb{R}^3$ свяжем кососимметрическую матрицу

$$[\xi] = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3,$$

где

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из двух вещественных, симметричных, положительно определенных матриц a и b третьего порядка, введем однородные формы соответственно второй и четвертой степеней

$$p(\xi) = \text{tr}[\xi]b[\xi]a, \quad q(\xi) = (a^*\xi, \xi)(b^*\xi, \xi). \quad (1)$$

С помощью этих форм определим полином

$$h(\lambda, \xi) = \lambda^4 + p(\xi)\lambda^2 + q(\xi) \quad (2)$$

четвертой степени относительно переменной $\lambda \in \mathbb{R}$.

Целью настоящей заметки является доказательство вещественности относительно λ корней уравнения $h(\lambda, \xi) = 0$ при всех $\xi \neq 0$. Такие полиномы называются *гиперболическими*. Рассматриваемый вопрос возникает при изучении распространения света в анизотропных средах с некоммутирующими тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости [1]. Случай, когда одна из матриц a и b скалярна, изучался в [2], см. также [3], [4]. Случай, когда матрицы a и b имеют по крайней мере один общий собственный вектор, рассматривался в работе [5]. Следует отметить, что общий случай некоммутирующих матриц a , b изучался в монографии Федорова [1], однако его результаты не совсем корректны.

Основной результат, который был анонсирован в [5], будет получен ниже в предположении, что матрицы a и b не имеют общих собственных векторов. Прежде чем переходить к его формулировке и доказательству, заметим, что дело сводится к доказательству неотрицательности биквадратичной тернарной формы

$$\Delta(\xi) = p^2(\xi) - 4q(\xi) \quad (3)$$

и отысканию ее (нетривиальных) корней.

Как было впервые установлено Гильбертом [6], произвольная неотрицательная биквадратичная тернарная форма приводится к сумме трех квадратов. Однако конструктивное доказательство этого факта по-видимому отсутствует. Ниже для частного класса форм вида (3) описана явная конструкция их представимости суммой двух квадратов и найдены нули этих форм. Доказательство элементарно в том смысле, что используются лишь средства линейной алгебры. Получены также условия, при которых рассматриваемая форма есть полный квадрат, а также когда она обращается в нуль тождественно.

Основной результат. Важную роль далее будет играть матрица

$$s = a^{-1/2}ba^{-1/2}, \quad (4)$$

которая, очевидно, также симметрична и положительно определена.

Пусть для определенности ортогональная матрица e приводит s к диагональному виду

$$e^{-1}se = \nu, \quad \nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad (5)$$

где собственные числа ν_k , $k = 1, 2, 3$, упорядочены

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3. \quad (6)$$

Если одно из этих собственных чисел двукратно, то

$$\nu_1 = \nu_2 < \nu_3 \quad \text{или} \quad \nu_1 < \nu_2 = \nu_3. \quad (6')$$

Когда же все собственные числа совпадают, то $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, т.е. матрица ν скалярна, равно как и s , а значит, a и b коммутируют. Таким образом, a и b имеют общую систему собственных векторов. Этот случай, а также случай, когда a и b не коммутируют, но имеют только один общий собственный вектор, рассматривается вкратце после доказательства основного результата. Сформулируем теперь основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть собственные числа матрицы s удовлетворяют неравенству (6): $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$. Тогда форма (3) в переменных

$$\zeta = (\sqrt{\det a})e^{-1}a^{-1/2}\xi$$

имеет вид

$$\Delta = P^2(\zeta) + Q^2(\zeta), \quad (7)$$

где квадратичные формы

$$P(\zeta) = (\nu_2 - \nu_3)\zeta_1^2 + (\nu_2 - \nu_1)\zeta_3^2 + (\nu_3 - \nu_1)\zeta_2^2, \quad (8)$$

$$Q(\zeta) = 2\sqrt{(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2)}\zeta_1\zeta_2. \quad (9)$$

Если $\nu_1 = \nu_2 < \nu_3$ или $\nu_1 < \nu_2 = \nu_3$, то эта форма является точным квадратом

$$\Delta = R^2(\zeta),$$

где квадратичная форма $R(\zeta)$ совпадает с

$$(\nu_3 - \nu_1)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) \quad \text{или} \quad (\nu_3 - \nu_1)(\zeta_3^2 + \zeta_2^2) \quad (10)$$

соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1. Собственные числа матриц s и $t = ba^{-1}$ совпадают, а их собственные вектора x и y связаны соотношением $y = \sqrt{a}x$.

Для доказательства достаточно заметить, что $s - \nu = a^{-1/2}(t - \nu)a^{1/2}$. Утверждение следствия в равной мере относится и к матрице $a^{-1}b$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$. Тогда

$$\Delta(\zeta) = \Delta^+(\zeta)\Delta^-(\zeta),$$

где

$$\Delta^\pm(\zeta) = (\nu_3 - \nu_1)\zeta_2^2 + (\sqrt{\nu_3 - \nu_2}\zeta_1 \pm \sqrt{\nu_2 - \nu_1}\zeta_3)^2.$$

Для доказательства достаточно заметить, что $(\nu_2 - \nu_1)(\nu_2 - \nu_3) < 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Форма $\Delta(\zeta)$ обращается в нуль при

$$\zeta_2 = 0, \quad \sqrt{\nu_3 - \nu_2}\zeta_1 + \sqrt{\nu_2 - \nu_1}\zeta_3 = 0$$

и при

$$\zeta_2 = 0, \quad \sqrt{\nu_3 - \nu_2}\zeta_1 - \sqrt{\nu_2 - \nu_1}\zeta_3 = 0,$$

если $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$.

Если же $\nu_1 = \nu_2 < \nu_3$ или $\nu_1 < \nu_2 = \nu_3$, то она обращается в нуль, если

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0 \quad \text{или} \quad \zeta_2 = \zeta_3 = 0.$$

Это утверждение следует из предыдущего.

Доказательство теоремы является следствием трех утверждений, каждое из которых для удобства формулируем отдельно.

ЛЕММА 1. Квадратичная форма $p(\xi)$ представима в виде

$$p(\xi) = -(c^*\xi, \xi), \quad c^* = (a + b)^* - a^* - b^*, \quad (11)$$

где матрица c^* симметрична и положительно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Симметричность матрицы (11) является следствием симметричности a и b и того факта, что арифметические операции сложения и вычитания, а также операция $*$ сохраняют ее.

Тождество $p(\xi) = -(c^*\xi, \xi)$ проверяется непосредственно. Положительная определенность согласно известному критерию Сильвестра будет доказана, если все ее главные миноры положительны. Заметим, прежде всего, что матрицу a (или b) с самого начала можно считать диагональной. Действительно, поскольку она симметрична и положительно определена, то найдется такая собственная ортогональная

матрица d , что $d^{-1}ad = \tilde{a}$ диагональна. Поскольку для собственных ортогональных матриц $d^* = d^{-1}$, находим

$$(\tilde{a})^* = (a^*)^\sim.$$

Аналогично и для матрицы c

$$(c^*)^\sim = (\tilde{c})^* = (\tilde{a} + \tilde{b})^* - \tilde{a}^* - \tilde{b}^*.$$

В соответствии с этим далее считаем a диагональной $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$, а матрицу b берем в виде

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & b_6 & b_5 \\ b_6 & b_2 & b_4 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{pmatrix}.$$

При этом в силу их симметричности и положительной определенности имеем

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

а также

$$\begin{aligned} b_1b_2 - b_6^2 &> 0, & b_1b_3 - b_5^2 &> 0, & b_2b_3 - b_4^2 &> 0, \\ \det b &= b_1b_2b_3 - b_1b_4^2 - b_2b_5^2 - b_3b_6^2 + 2b_4b_5b_6 &> 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку в явном виде

$$c^* = \begin{pmatrix} a_2b_3 + a_3b_2 & -a_3b_6 & -a_2b_5 \\ -a_3b_6 & a_1b_3 + a_3b_1 & -a_1b_4 \\ -a_2b_5 & -a_1b_4 & a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

диагональные элементы c^* положительны. В силу первых трех неравенств (12) положительны главные миноры второго порядка матрицы c^* . Например,

$$(a_2b_3 + a_3b_2)(a_1b_3 + a_3b_1) - a_3^2b_6^2 = a_1a_2b_3^2 + a_2a_3b_1b_3 + a_1a_3b_2b_3 + a_3^2(b_1b_2 - b_6^2).$$

Покажем теперь, что $\det c^* > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \det c^* &= a_1^2(a_2b_3 + a_3b_2)(b_2b_3 - b_4^2) + a_2^2(a_1b_3 + a_3b_1)(b_1b_3 - b_5^2) \\ &\quad + a_3^2(a_1b_2 + a_2b_1)(b_1b_2 - b_6^2) + 2a_1a_2a_3(b_1b_2b_3 - b_4b_5b_6). \end{aligned}$$

В силу (12) $|b_4b_5b_6| < b_1b_2b_3$, поэтому $\det c^* > 0$. Утверждение тем самым доказано.

Перейдем теперь в (3) к новым переменным

$$\eta = (a^*)^{1/2}\xi, \quad (14)$$

и обозначим $c_0^* = (a^*)^{-1/2}c^*(a^*)^{-1/2}$. В этих обозначениях форма (3) примет вид

$$\Delta(\eta) = (c_0^*\eta, \eta) - 4(\eta, \eta)(s^*\eta, \eta). \quad (15)$$

ЛЕММА 2. Матрицы s, s^*, c_0^* попарно коммутативны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$c_0^* = s_0 - s, \quad (16)$$

где $s_0 = \text{tr } s$ — сумма диагональных элементов s . Поэтому s и c_0^* коммутируют $sc_0^* = c_0^*s$. Докажем, что коммутируют c_0^* и s^* , т.е.

$$c_0^*s^* = s^*c_0^*.$$

Это равенство равносильно

$$b^*(a^*)^{-1}c^* = c^*(a^*)^{-1}b^*,$$

или ввиду определения (11) матрицы c^*

$$b^*(a^*)^{-1}(a+b)^* = (a+b)^*(a^*)^{-1}b^*.$$

Ввиду обратимости всех множителей последнее равенство равносильно

$$(a+b)a^{-1}b = ba^{-1}(a+b),$$

которое выполняется тождественно. Тем самым, утверждение леммы установлено.

В силу попарной коммутативности s , s^* , c_0^* найдется такая ортогональная матрица e , что

$$e^{-1}se = \nu, \quad e^{-1}c_0^*e = m, \quad e^{-1}s^*e = n = \nu^*, \quad (17)$$

где элементами диагональных матриц

$$\nu = \text{diag}(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad m = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \quad n = \text{diag}(n_1, n_2, n_3)$$

служат собственные числа матриц s , c_0^* , s^* соответственно.

В переменных ζ , где

$$\eta = e\zeta, \quad (18)$$

форма (16) с учетом (17) принимает вид

$$\Delta(\zeta) = (m\zeta, \zeta)^2 - 4(\zeta, \zeta)(n\zeta, \zeta), \quad (19)$$

где учтено $(e\zeta, e\zeta) = (\zeta, \zeta)$. В развернутом виде

$$\begin{aligned} \Delta(\zeta) = & (m_1^2 - 4n_1)\zeta_1^4 + (m_2^2 - 4n_2)\zeta_2^4 + (m_3^2 - 4n_3)\zeta_3^4 + 2(m_1m_2 - 2(n_1 + n_2))\zeta_1^2\zeta_2^2 \\ & + 2(m_1m_3 - 2(n_1 + n_3))\zeta_1^2\zeta_3^2 + 2(m_2m_3 - 2(n_2 + n_3))\zeta_2^2\zeta_3^2. \end{aligned} \quad (20)$$

ЛЕММА 3. *Соотношения*

$$m_k^2 - 4n_k = (\nu_j - \nu_i)^2, \quad m_i m_j - 2(n_i + n_j) = (\nu_k - \nu_i)(\nu_k - \nu_j), \quad (21)$$

имеют место при любой круговой перестановке $\{i, k, j\}$ индексов $\{1, 2, 3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $c_0^* = s_0 - s$, принимая во внимание (17), находим

$$m = s_0 - \nu, \quad n = \nu^*.$$

Отсюда следует $m_k = s_0 - \nu_k$, $k = 1, 2, 3$, и $n_k = \nu_i \nu_j$, где $\{i, k, j\}$ — произвольная круговая перестановка индексов $\{1, 2, 3\}$. Подстановка этих равенств в левую часть (21) и приводит к справедливости утверждения леммы.

С учетом леммы 3 форма (20) принимает вид

$$\Delta(\zeta) = (\nu_3 - \nu_2)^2 \zeta_1^4 + (\nu_2 - \nu_1)^2 \zeta_3^4 + (\nu_3 - \nu_1)^2 \zeta_2^4 + 2(\nu_3 - \nu_1)(\nu_3 - \nu_2) \zeta_1^2 \zeta_2^2 + 2(\nu_1 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_2) \zeta_3^2 \zeta_2^2 + 2(\nu_2 - \nu_1)(\nu_2 - \nu_3) \zeta_1^2 \zeta_3^2. \quad (22)$$

Форма (22), очевидно, представима в виде (7), где квадратичные формы P и Q определены согласно (8), (9). Тем самым, когда $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3$ утверждение теоремы установлено. Полагая в (22) $\nu_2 = \nu_1$ или $\nu_2 = \nu_3$, находим, что $\Delta(\zeta) = R^2(\zeta)$, где $R(\zeta)$ определено согласно (10). Тем самым, доказана и теорема.

Рассмотрим теперь некоторые следствия этого утверждения. Пусть матрицы a и b не коммутируют, но имеют один общий собственный вектор. Тогда матрица b имеет одну из следующих форм:

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_4 \\ 0 & b_4 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & b_6 & 0 \\ b_6 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_5 \\ 0 & b_2 & 0 \\ b_5 & 0 & b_3 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Очевидно, аналогичную структуру имеют и матрицы c_0^* , s , s^* . Их собственные значения определяются в явном виде через элементы матриц a и b . Например, если b совпадает с одной из матриц (23), то, как нетрудно видеть, $\nu_2 = s_2 = b_2/a_2$, а остальные два собственных значения являются корнями квадратного уравнения

$$\nu^2 - \nu(s_1 + s_3) + s_1 s_3 - g^2 = 0,$$

где $s_1 = b_1/a_1$, $s_3 = b_3/a_3$, $g = b_5/\sqrt{a_1 a_3}$.

Ясно, что коэффициенты квадратичных форм P и Q , определенных согласно (8), (9), выражаются в явном виде через элементы матриц a и b .

Сказанное относится и к случаю, когда $\nu_2 = \nu_1$ или $\nu_2 = \nu_3$. На подробностях не останавливаемся.

Когда $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, то ν — скалярная матрица, и это же относится к матрице s . Значит, матрица $b = \nu a$ также диагональна, причем $b_i = \nu a_i$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае $\Delta(\zeta) \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред*, Изд-во АН БССР, Минск, 1958.
- [2] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II: Partial differential equations. By R. Courant, Intersci. Publ., New York–London, 1962; рус. пер.: Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.
- [3] F. John, “Algebraic conditions for hyperbolicity of systems of partial differential equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:1 (1978), 89–106.
- [4] L. Gårding, “Hyperbolic differential equations”, *Perspectives in Mathematics*, Anniversary of Oberwolfach, Birkhäuser, Basel, 1984, 215–247.
- [5] Н. А. Жура, “Задача Коши для системы уравнений кристаллооптики”, *Докл. РАН*, **412**:6 (2007), 727–731.
- [6] D. Hilbert, “Über die Darstellung definierter Formen als Summe von Formenquadraten”, *Math. Ann.*, **32**:3 (1888), 342–350.

Н. А. Жура

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН

Поступило

25.12.2006

Исправленный вариант

07.08.2007