Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Неделко, Асимптотическая устойчивость, локальная единственность и область влияния двумерной контрастной структуры типа ступеньки, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 82–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:31:01

УДК 517.956.226

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ОБЛАСТЬ ВЛИЯНИЯ ДВУМЕРНОЙ КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА СТУПЕНЬКИ

И. В. Неделько

Доказана асимптотическая устойчивость двумерного стационарного решения с внутренним переходным слоем сингулярно возмущенной параболической задачи. Построено множество функций, принадлежащих области влияния такого решения.

Библиография: 11 названий.

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left(\Delta u + a_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - f(u, x, \varepsilon) = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$u(x, \varepsilon) = g(x), \quad x \in \partial D, \quad (2)$$

где u – скалярная функция, Δ – оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, D – ограниченная односвязная область, $x = (x_1, x_2)$.

(A1) Пусть функция $g(x)$ бесконечно гладкая на ∂D (границу ∂D мы считаем тоже сколь угодно гладкой), f – бесконечно гладкая в области $\mathbb{R}^1 \times \overline{D} \times [0, \varepsilon_0]$, где ε_0 – некоторое положительное число, функции $a_i(x)$ – бесконечно гладкие в $\overline{D}$, $i = 1, 2$.

Требования бесконечной гладкости, сформулированные в условии (A1), не являются обязательными. Нужный порядок гладкости определяется порядком асимптотики, которую требуется построить.

Пусть функция f удовлетворяет следующим требованиям.

(A2) Вырожденное уравнение $f(u, x, 0) = 0$ имеет три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, причем $\varphi_1 < \varphi_0 < \varphi_2$, $x \in \overline{D}$, и между φ_1 и φ_2 нет других корней, кроме φ_0 .

(A3) $f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0$, $i = 1, 2$; $f_u(\varphi_0(x), x, 0) < 0$, $x \in \overline{D}$.

Введем функцию $I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(u, x, 0) du$.

(A4) Пусть уравнение $I(x) = 0$ определяет замкнутую гладкую кривую C_0 , разделяющую область D на две подобласти: $D_0^{(-)}$ (вне кривой C_0) и $D_0^{(+)}$ (внутри кривой C_0), и пусть $\partial I / \partial n < 0$, $x \in C_0$, где $\partial / \partial n$ – производная по нормали к C_0 , направленной внутрь $D_0^{(+)}$.

(A5) Пусть $\int_{\varphi_1(x)}^s f(u, x, 0) du > 0$ при $s \in (\varphi_1(x), g(x)]$, $x \in \partial D$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00694.

Точно так же, как это сделано в работе [1], для задачи (1), (2) в случае, когда уравнение (1) не содержит первых производных, с помощью метода пограничных функций [2] можно построить для любого $n \geq 0$ частичную сумму $U_n(x, \varepsilon)$ формального асимптотического ряда по степеням ε решения $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2) такого, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in D_0^{(-)}, \\ \varphi_2(x), & x \in D_0^{(+)}. \end{cases} \quad (3)$$

Решения, удовлетворяющие соотношению (3), принято называть контрастными структурами типа ступеньки (КСТС). Далее, модифицировав построенную асимптотику так же, как в [1], можно получить $\forall n \geq 1$ нижнее $\alpha_n(x, \varepsilon)$ и верхнее $\beta_n(x, \varepsilon)$ решения задачи (1), (2), удовлетворяющие при малых ε следующим условиям:

$$L_\varepsilon \alpha_n = (f_u(\bar{u}_0(x), x, 0) + \Pi(x, \varepsilon))\varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) > 0, \quad x \in D, \quad (4)$$

$$L_\varepsilon \beta_n = -(f_u(\bar{u}_0(x), x, 0) + \Pi(x, \varepsilon))\varepsilon^{n+1} + O(\varepsilon^{n+2}) < 0, \quad x \in D, \quad (5)$$

$$\beta_n - \alpha_n \geq \mu_n \varepsilon^{n+1}, \quad x \in \bar{D}; \quad \sup_{x \in \bar{D}} |\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^n), \quad (6)$$

$$\sup_{x \in \bar{D}} |\alpha_n(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^n). \quad (7)$$

Здесь $\Pi(x, \varepsilon)$ – неотрицательная функция погранслоного типа, т. е. существенная лишь в малой окрестности ∂D , $\bar{u}_0(x)$ равно $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно вне и внутри области, ограниченной кривой C_{α_n} в случае (4) и кривой C_{β_n} в случае (5), $\mu_n > 0$ – некоторое число, не зависящее от ε , кривые C_{α_n} и C_{β_n} при малых ε близки к C_0 (алгоритм построения C_{α_n} и C_{β_n} подробно изложен в [1]); кривые C_{α_n} и C_{β_n} не имеют общих точек. Функции α_n и β_n непрерывны в $\bar{D}$ и имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков всюду в $\bar{D}$, за исключением кривых C_{α_n} и C_{β_n} соответственно, на которых указанные производные имеют скачок. Более того,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial n_{\beta_n}} \right)^{(+)} &\geq \left(\frac{\partial \beta_n}{\partial n_{\beta_n}} \right)^{(-)}, & x \in C_{\beta_n}, \\ \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial n_{\alpha_n}} \right)^{(+)} &\leq \left(\frac{\partial \alpha_n}{\partial n_{\alpha_n}} \right)^{(-)}, & x \in C_{\alpha_n}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\vec{n}_{\beta_n}$ ($\vec{n}_{\alpha_n}$) – внешняя нормаль к кривой C_{β_n} (C_{α_n}), а $(\cdot)^{(+)}$ и $(\cdot)^{(-)}$ обозначают предельные значения функции $(\cdot)$ на рассматриваемой кривой соответственно изнутри и извне области, ограниченной этой кривой. На кривой C_{α_n} (C_{β_n}) соотношение (4) (соответственно (5)) выполняется для предельных значений $L_\varepsilon \alpha_n$ ($L_\varepsilon \beta_n$) с одной и с другой стороны от кривой.

Из существования верхнего и нижнего решений задачи (1), (2) следует, что для любого $n \geq 1$ существует решение $u(x, \varepsilon)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам $\beta_n \geq u \geq \alpha_n$ в $\bar{D}$.

Таким образом, можно говорить о существовании КСТС $u(x, \varepsilon)$ в задаче (1), (2).

Рассмотрим параболическую задачу, соответствующую задаче (1), (2):

$$L_\varepsilon v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (9)$$

$$v(x, t, \varepsilon) = g(x), \quad (x, t) \in \partial D \times (0, +\infty), \quad (10)$$

$$v(x, 0, \varepsilon) = v_0(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}. \quad (11)$$

КСТС $u(x, \varepsilon)$ является стационарным решением задачи (9), (10). Встает вопрос об асимптотической устойчивости этого решения по Ляпунову, а также об области влияния этого решения (если оно окажется асимптотически устойчивым), т. е. о множестве начальных функций $v_0(x, \varepsilon)$, для которых решение задачи (9)–(11) существует, единственно и стремится к $u(x, \varepsilon)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Для решений с внутренними переходными слоями одномерного уравнения $\varepsilon^2 u'' = f(u, x)$, рассматриваемого на конечном промежутке из $\mathbb{R}^1$ с условиями Неймана на концах промежутка, эти вопросы исследовались в работах [3]–[6]; см. также [7] и цитированную там литературу.

В настоящей работе развивается метод доказательства асимптотической устойчивости КСТС, базирующийся на существовании верхнего β_n и нижнего α_n решений задачи (1), (2) для достаточно большого n . Этот подход существенно отличается от методов, используемых в [3]–[6], и применим как в одномерном, так и многомерном случаях.

В п. 2 приведены определения устойчивости и области влияния, а также доказана общая теорема об асимптотической устойчивости и области влияния стационарного решения параболической задачи в случае, когда существуют квазистационарные барьеры, соответствующие этому решению. Определение квазистационарных барьеров также содержится в п. 2.

В п. 3, используя верхнее и нижнее решения β_n и α_n задачи (1), (2) (их свойства выражены в формулах (4)–(8)), мы докажем существование квазистационарных барьеров задачи (9), (10), соответствующих КСТС $u(x, \varepsilon)$. Эти барьеры обеспечивают асимптотическую устойчивость решения $u(x, \varepsilon)$ и дают информацию об области его влияния. Попутно в п. 3 установлена локальная единственность КСТС $u(x, \varepsilon)$.

В п. 4 сформулирован основной результат по асимптотической устойчивости, области влияния и локальной единственности КСТС $u(x, \varepsilon)$.

2. Общая теорема об асимптотической устойчивости и области влияния стационарного решения параболической задачи. В данном пункте мы для краткости записи не всегда указываем зависимость функций от ε .

Под регулярным решением задачи (1), (2) будем понимать ее решение из $C^2(\overline{D})$.

Здесь и далее через $C^k(\overline{D})$ обозначается пространство функций, имеющих в $\overline{D}$ непрерывные производные до порядка k включительно; через $C^{k+\nu}(\overline{D})$, $\nu \in (0, 1)$, обозначается пространство функций, у которых, кроме того, производные порядка k удовлетворяют в $\overline{D}$ условию Гёльдера с показателем ν .

Под регулярным решением задачи (9)–(11) будем понимать ее решение из $C^{1,0}(\overline{D} \times [0, +\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{D} \times (0, +\infty))$.

(B1) Пусть задача (9), (10) имеет стационарное решение $u(x) \in C^2(\overline{D})$.

(B2) Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^1 \times \overline{D})$, $\partial D \in C^{2+\nu}$, $g \in C^{2+\nu}(\partial D)$, $a_i(x) \in C^{1+\nu}(\overline{D})$, $i = 1, 2$.

Введем класс функций W : $w \in W$, если

1°. $w(x) \in C(\overline{D})$;

2°. $w(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно всюду в $\overline{D}$, за исключением, может быть, конечного числа гладких замкнутых кривых C_i , не имеющих общих точек и самопересечений. На каждой кривой C_i существуют предельные значения с одной и с другой стороны от кривой всех частных производных функции $w(x)$ до второго порядка включительно.

Каждая кривая C_i разделяет область D на подобласти $D_i^{(+)}$ (лежащую внутри C_i) и $D_i^{(-)}$. Через $\vec{n}_i$ обозначим внешнюю нормаль к C_i .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции

$$v^{(+)}(x, t) = u(x) + \Theta(x) \exp\{-\lambda t\}, \quad v^{(-)}(x, t) = u(x) - \Theta(x) \exp\{-\lambda t\},$$

где $\lambda > 0$ – некоторое число, назовем соответственно *верхними* и *нижним квазистационарными барьерами* (КВБ и КНБ) задачи (9), (10), соответствующими стационарному решению $u(x)$, если

1°. $\Theta(x) \in W$, $\Theta(x) > 0$ в $\overline{D}$;

2°. на каждой кривой C_i (см. определение класса W) выполнено неравенство

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial n_i}\right)^{(+) } \geq \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n_i}\right)^{(-)},$$

где $(\cdot)^{(+)}$ и $(\cdot)^{(-)}$ обозначают предельные значения на C_i соответственно из области $D_i^{(+)}$ и $D_i^{(-)}$;

3°. выполнены условия

$$L_\varepsilon v^{(+)} - \frac{\partial v^{(+)}}{\partial t} < 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (12)$$

$$L_\varepsilon v^{(-)} - \frac{\partial v^{(-)}}{\partial t} > 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (13)$$

причем на поверхностях $C_i \times (0, +\infty)$ условие (12) (соответственно (13)) должно выполняться для предельных значений $L_\varepsilon v^{(+)} - \partial v^{(+)} / \partial t$ ($L_\varepsilon v^{(-)} - \partial v^{(-)} / \partial t$) с одной и с другой стороны от поверхности.

(В3) Пусть существуют КВБ и КНБ задачи (9), (10), соответствующие стационарному решению $u(x)$.

Докажем утверждение, хорошо известное для случая, когда $v^{(+)}$ и $v^{(-)}$ – достаточно гладкие функции [8]. В нашем случае, как уже было отмечено, $v^{(+)}$ и $v^{(-)}$ могут иметь скачки производных на поверхностях $C_i \times (0, +\infty)$.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия (В1)–(В3) и

$$v^{(-)}(x, 0) < v_0(x) < v^{(+)}(x, 0), \quad x \in \overline{D}.$$

Тогда регулярное решение $v(x, t)$ задачи (9)–(11) (если оно существует) удовлетворяет неравенству

$$v^{(-)}(x, t) < v(x, t) < v^{(+)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, +\infty). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что (14) не выполняется. Тогда существует число $T > 0$ такое, что

$$v^{(-)}(x, t) \leq v(x, t) \leq v^{(+)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T], \quad (15)$$

$$v^{(-)}(x, t) < v(x, t) < v^{(+)}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T], \quad (16)$$

$$\exists P \in D : v^{(+)}(P, T) = v(P, T) \quad (17)$$

$$\text{либо } v^{(-)}(P, T) = v(P, T). \quad (18)$$

Будем считать, что выполнено (17) (случай, когда выполнено (18), рассматривается аналогично).

Введем функцию $w = (v^{(+)} - v) \exp\{-At\}$, $A > 0$. Она удовлетворяет условиям:

$$Lw + c(x, t)w - \frac{\partial w}{\partial t} < 0, \quad (x, t) \in D \times (0, T], \quad (19)$$

$$w(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \partial D \times (0, T], \quad (20)$$

где

$$Lw = \varepsilon^2 \left(\Delta w + a_1(x) \frac{\partial w}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial w}{\partial x_2} \right), \quad c(x, t) = -A - F(x, t),$$

$$F(x, t) = \int_0^1 f_u(v + s(v^{(+)} - v), x) ds.$$

Выберем $A > 0$ столь большим, чтобы $c(x, t) < 0$, $(x, t) \in \overline{D} \times [0, T]$. Это можно сделать, так как в силу условий данной леммы и (15) $F(x, t)$ непрерывна в указанной области.

Из (15), (16), (17) для $w(x, t)$ имеем

$$w(x, t) > 0, \quad (x, t) \in \overline{D} \times [0, T]; \quad w(x, T) \geq 0, \quad x \in \overline{D}, \quad (21)$$

$$w(P, T) = 0. \quad (22)$$

Следствием (21) и (22) является неравенство

$$\frac{\partial w}{\partial t}(P, T) \leq 0.$$

Пусть Ω_p^ρ – круг радиуса ρ с центром в точке P на плоскости $t = T$, причем ρ столь мало, что $\overline{\Omega}_p^\rho \subset D$. Кроме того, если $P \in C_i$ при каком-то i , то возьмем ρ столь малым, чтобы $\overline{\Omega}_p^\rho \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$, а если $P \notin C_i$ ни при каком i , то столь малым, чтобы $\overline{\Omega}_p^\rho \cap C_i = \emptyset$ для любого i .

Положим $\overline{w}(x) = w(x, T)$, $\overline{c}(x) = c(x, T)$. Так как $\partial w / \partial t(x, T)$ – непрерывная функция в круге $\overline{\Omega}_p^\rho$ и $\partial w / \partial t(P, T) \leq 0$, то при достаточно малом ρ из (19) получаем неравенство

$$L\overline{w} + \overline{c}(x)\overline{w} < 0, \quad x \in \Omega_p^\rho. \quad (23)$$

В частности, если $P \in C_i$, то на C_i это неравенство выполняется для предельных значений $L\bar{w} + \bar{c}\bar{w}$.

Заметим также, что в силу требования 2° определения КВБ

$$\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial n_i}\right)^{(+)} \geq \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial n_i}\right)^{(-)}, \quad x \in C_i, \quad (24)$$

в остальной же части $\bar{\Omega}_p^\rho$ $\bar{w}(x)$ – достаточно гладкая функция.

Используя (23) и (24), нетрудно показать, что для любой функции $W(x) \in C_0^1(\Omega_p^\rho)$, $W(x) \geq 0$ в Ω_p^ρ , выполняется неравенство

$$\int_{\Omega_p^\rho} \left(\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} \frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) - W \bar{c}(x) \bar{w} - \varepsilon^2 W \left(a_1(x) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_2} \right) \right) dx \geq 0. \quad (25)$$

Через $C_0^1(\Omega_p^\rho)$ мы обозначили пространство функций из $C^1(\bar{\Omega}_p^\rho)$, имеющих компактный носитель. Чтобы доказать справедливость (25), достаточно разбить область Ω_p^ρ на подобласти (кривой C_i , если $P \in C_i$), где $\bar{w}(x)$ достаточно гладкая, и воспользоваться формулой Грина для каждой из подобластей.

Так как $\bar{c}(x) < 0$, $x \in \bar{\Omega}_p^\rho$, согласно принципу максимума для слабых решений [9, с. 190] из (25) следует, что $\bar{w}(x)$ не может иметь внутри круга $\bar{\Omega}_p^\rho$ неположительного минимума. Однако в силу (21), (22) $\bar{w}(x)$ принимает в точке $x = P$ минимальное значение, равное нулю.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, а значит, выполнено (14).

Лемма 1 доказана.

Введем обозначение

$$C_g^2(\bar{D}) = \{u \in C^2(\bar{D}) : u(x) = g(x), x \in \partial D\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия (B1)–(B3) и $v_0(x) \in C_g^2(\bar{D})$. Тогда если $v^{(-)}(x, 0) < v_0(x) < v^{(+)}(x, 0)$ в $\bar{D}$, то существует единственное регулярное решение $v(x, t)$ задачи (9)–(11) и

$$v^{(-)}(x, t) < v(x, t) < v^{(+)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D} \times [0, +\infty).$$

В силу [10, теорема (3.1)] (см. также [8], [11]) лемма 2 является следствием леммы 1, так как квазистационарные барьеры априорно ограничены на всем промежутке времени от 0 до $+\infty$.

Введем определения асимптотической (С-С)-устойчивости и области влияния устойчивого решения. Через $\|\cdot\|_{C(\bar{D})}$ здесь и далее обозначаем норму в пространстве $C(\bar{D})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение $u(x)$ назовем *асимптотически (С-С)-устойчивым стационарным решением* задачи (9), (10), если $\forall \xi > 0 \exists \eta > 0$ такое, что если $\|v_0(x) - u(x)\|_{C(\bar{D})} < \eta$ и $v_0(x) \in C_g^2(\bar{D})$, то существует регулярное решение $v(x, t)$ задачи (9)–(11) и оно удовлетворяет условиям:

- 1°. $\sup_{t \geq 0} \|v(x, t) - u(x)\|_{C(\bar{D})} \leq \xi$;
- 2°. $\|v(x, t) - u(x)\|_{C(\bar{D})} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Областью влияния асимптотически (С-С)-устойчивого стационарного решения $u(x)$ назовем подмножество функций $v_0(x)$ из $C_g^2(\overline{D})$, для которых задача (9)–(11) имеет регулярное решение, удовлетворяющее условию 2° определения 2.

Как следствие леммы 2 и того факта, что $\forall T > 0$ функции $v^{(-)}(x, t+T)$ и $v^{(+)}(x, t+T)$ являются КНБ и КВБ задачи (9), (10), соответствующими решению $u(x)$, а также учитывая, что $v^{(\pm)}(x, T) \rightarrow u(x)$ при $T \rightarrow \infty$, получаем теорему об асимптотической устойчивости и области влияния стационарного решения $u(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (В1)–(В3). Тогда $u(x)$ – асимптотически (С-С)-устойчивое стационарное решение задачи (9), (10) и его область влияния содержит все функции $v_0(x)$ из $C_g^2(\overline{D})$, удовлетворяющие неравенствам

$$v^{(-)}(x, 0) < v_0(x) < v^{(+)}(x, 0), \quad x \in \overline{D}.$$

3. Построение квазистационарных барьеров для контрастной структуры типа ступеньки. Для удобства результат о существовании КСТС $u(x, \varepsilon)$ в задаче (1), (2), описанный в п. 1, сформулируем в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (А1)–(А5). Тогда для любого $n \geq 1$ при достаточно малых ε существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), являющееся КСТС и удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_n(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta_n(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D}.$$

Пусть выполнены условия (А1)–(А5). Тогда согласно теореме 2 для $n = 2$ при достаточно малых ε существует регулярное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), являющееся КСТС и удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_2 \leq u \leq \beta_2, \quad x \in \overline{D}.$$

Докажем, что существуют КВБ и КНБ задачи (9), (10), соответствующие этому решению.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия (А1)–(А5). Тогда существует не зависящее от ε число $m > 0$ такое, что при достаточно малых ε функции

$$\begin{aligned} v^{(+)}(x, t, \varepsilon) &= u(x, \varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon) \exp\{-\varepsilon m t\}, \\ v^{(-)}(x, t, \varepsilon) &= u(x, \varepsilon) - \frac{m}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon) \exp\{-\varepsilon m t\}, \end{aligned}$$

где $\Theta(x, \varepsilon) = \beta_2(x, \varepsilon) - \alpha_2(x, \varepsilon)$, являются соответственно верхним и нижним квазистационарными барьерами (КВБ и КНБ) задачи (9), (10), соответствующими КСТС $u(x, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для $v^{(+)}(x, t, \varepsilon)$; доказательство для $v^{(-)}(x, t, \varepsilon)$ проводится аналогично.

Требования 1° и 2° определения КВБ выполнены в силу свойств α_2 и β_2 (см. (6), (8)).

Остается проверить, что

$$K \equiv L_\varepsilon v^{(+)} - \frac{\partial v^{(+)}}{\partial t} < 0, \quad (x, t) \in D \times (0, +\infty), \quad (26)$$

причем на поверхностях $C_{\alpha_2} \times (0, +\infty)$ и $C_{\beta_2} \times (0, +\infty)$ данное неравенство должно выполняться для предельных значений K с одной и с другой стороны от поверхности.

Вычитая (4) из (5) при $n = 2$, для функции Θ получаем равенство

$$L\Theta - B(x, \varepsilon)\Theta = -\varepsilon^3 \Phi(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^4), \quad x \in D,$$

где

$$L = \varepsilon^2 \left(\Delta + a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x) \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

$B(x, \varepsilon) = \int_0^1 f_u(\alpha_2(x, \varepsilon) + s\Theta(x, \varepsilon), x, \varepsilon) ds$; $\Phi(x, \varepsilon) \geq C > 0$, число C не зависит от ε в силу условия (A3). Отсюда следует, что при достаточно малых ε

$$L\Theta - B(x, \varepsilon)\Theta \leq -C_0 \varepsilon^3, \quad (27)$$

где $C_0 > 0$ – некоторое число, не зависящее от ε , причем на кривых C_{α_2} и C_{β_2} неравенство (27) выполняется для предельных значений $L\Theta - B(x, \varepsilon)\Theta$ с одной и с другой стороны от кривой.

Далее,

$$\begin{aligned} K \equiv L_\varepsilon v^{(+)} - \frac{\partial v^{(+)}}{\partial t} &= Lu + \frac{m}{\varepsilon} L\Theta \exp\{-\varepsilon mt\} - f(u, x, \varepsilon) \\ &\quad - \left(f\left(u + \frac{m}{\varepsilon} \Theta \exp\{-\varepsilon mt\}, x, \varepsilon\right) - f(u, x, \varepsilon) \right) + m^2 \Theta \exp\{-\varepsilon mt\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством $L_\varepsilon u \equiv Lu - f(u, x, \varepsilon) = 0$ и раскладывая f по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} K &= \exp\{-\varepsilon mt\} \frac{m}{\varepsilon} \left((L\Theta - B(x, \varepsilon)\Theta) + (B(x, \varepsilon) - f_u(u, x, \varepsilon))\Theta \right. \\ &\quad \left. + m\varepsilon \Theta - \frac{1}{2} f_{uu}^* \frac{m}{\varepsilon} \Theta^2 \exp\{-\varepsilon mt\} \right), \end{aligned}$$

где производная f_{uu}^* берется в промежуточной точке.

Учитывая соотношения $\alpha_2 \leq u \leq \beta_2$ и $\Theta = O(\varepsilon^2)$ (см. (6)), нетрудно показать, что

$$B(x, \varepsilon) - f_u(u, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2). \quad (28)$$

Используя (6), (27), (28), получаем, что $\exists C_1, C_2, C_3 > 0$ такие, что

$$K \leq m \exp\{-\varepsilon mt\} (-C_0 \varepsilon^2 + C_1 \varepsilon^3 + m \varepsilon^2 (C_2 + C_3 \exp\{-\varepsilon mt\})).$$

Отсюда следует, что при достаточно малых ε и достаточно малом m , не зависящим от ε , $K < 0$, т.е. справедливо (26).

Лемма 3 доказана.

4. Основной результат. Суммируя утверждения теорем 1, 2 и леммы 3, формулируем основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия (A1)–(A5). Тогда при достаточно малых ε существует регулярное решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), (2), являющееся КСТС (т. е. удовлетворяющее соотношению (3)).

Это решение асимптотически (С-С)-устойчиво как стационарное решение задачи (9), (10), и его область влияния содержит все функции v_0 из $C_g^2(\overline{D})$, удовлетворяющие неравенствам

$$u(x, \varepsilon) - \frac{m}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon) < v_0(x, \varepsilon) < u(x, \varepsilon) + \frac{m}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D},$$

где $m > 0$ – некоторое число, не зависящее от ε , $\Theta(x, \varepsilon) = \beta_2(x, \varepsilon) - \alpha_2(x, \varepsilon)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Очевидно, что в области

$$\left\{ w \in C_g^2(\overline{D}) : |w(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)| < \frac{m}{\varepsilon} \Theta(x, \varepsilon), \quad x \in \overline{D} \right\}$$

нет решений задачи (1), (2), отличных от $u(x, \varepsilon)$, т. е. $u(x, \varepsilon)$ – локально единственное решение задачи (1), (2).

2. Используя неравенство $\beta_2 - \alpha_2 \geq \mu_2 \varepsilon^3$ (см. (6)), нетрудно показать, что при достаточно малых ε область влияния устойчивого решения $u(x, \varepsilon)$ содержит шар

$$\{v_0 \in C_g^2(\overline{D}) : \|v_0(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)\|_{C(\overline{D})} \leq M \varepsilon^2\},$$

где $M > 0$ – некоторое число, которое не зависит от ε .

3. Используя теорему 2, равенство

$$\sup_{x \in \overline{D}} |\beta_n(x, \varepsilon) - \alpha_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^n)$$

(см. (6)), а также локальную единственность КСТС $u(x, \varepsilon)$, можно показать, что $u(x, \varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$\sup_{x \in \overline{D}} |u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1})$$

для любого $n \geq 0$.

4. Результат, аналогичный теореме 3, имеет место и в случае, когда вместо (2) поставлено условие Неймана. Он доказывается так же, как теорема 3. Отметим, что выполнение условия (A5) при этом не требуется.

5. Представленный в работе подход применим также для исследования на устойчивость решений задачи (1), (2), имеющих несколько переходных слоев.

Автор выражает благодарность профессору В. Ф. Бутузову за помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нефедов Н. Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1139.
- [2] Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
- [3] Васильева А. Б. Об устойчивости контрастных структур // Матем. моделирование. 1991. Т. 3. № 4. С. 114–123.
- [4] Angenent S., Mallet-Paret J., Peletier L. Stable transition layers in a semilinear boundary value problems // J. Differential Equations. 1987. V. 67. № 2. P. 212–242.
- [5] Васильева А. Б., Бутузова М. В. Об устойчивости стационарных решений с пограничными и внутренними слоями // Математические методы и их приложения. (Труды третьих математических чтений МГСУ 24–29 января 1995). М.: МГСУ, 1995. С. 81–86.
- [6] Hale J. K., Sakamoto K. Existence and stability of transition layers // Japan J. of Appl. Math. 1988. V. 5. № 3. P. 367–405.
- [7] Fife P. C., Hsiao L. The generation and propagation of internal layers // Nonlinear Anal. 1988. V. 12. № 1. P. 19–41.
- [8] Amann H. Periodic solutions of semilinear parabolic equations // Nonlinear analysis: Collections of Papers in Honor of Eric Rothe. New York: Academic Press, 1978. P. 1–29.
- [9] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
- [10] Amann H. Existence and stability of solutions for semilinear parabolic systems and applications to some diffusion reaction equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1978. V. 81. № 1. P. 35–47.
- [11] Amann H. Invariant sets and existence theorems for semilinear parabolic and elliptic systems // J. Math. Anal. Appl. 1978. V. 65. № 2. P. 432–467.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: butuzov@mt384.phis.msu.su

Поступило
21.12.1998