Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Нежметдинов, Об однолистности одного интеграла на подклассах мероморфных функций, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 92–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:54:10

УДК 517.546

ОБ ОДНОЛИСТНОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛА НА ПОДКЛАССАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

И. Р. Нежметдинов

Исследуется интегральный оператор $P_\lambda[f](\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} (f'(t))^\lambda dt$, $|\zeta| > 1$, действующий на классе Σ функций, мероморфных и однолистных во внешности единичного круга. Уточняются области значений параметра λ , при которых данный оператор сохраняет однолистность на Σ или на его подклассе, состоящем из выпуклых функций. Как следствие получается двусторонняя оценка разделяющей постоянной в достаточном условии однолистной разрешимости внешней обратной краевой задачи.

Библиография: 8 названий.

Пусть Σ – класс функций вида $f(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k}$, регулярных и однолистных в области $E^- = \{\zeta : 1 < |\zeta| < \infty\}$ и имеющих простой полюс в $\zeta = \infty$. Рассмотрим интегральный оператор

$$P_\lambda[f](\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} (f'(t))^\lambda dt, \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\zeta_0 \in E^-$.

Обозначим через $\Lambda(\mathfrak{M}, \Sigma)$ множество всех таких λ , что $P_\lambda[\mathfrak{M}] \subset \Sigma$, где $\mathfrak{M} = \Sigma$ или Σ^0 (Σ^0 – подкласс Σ , состоящий из выпуклых функций [1, с. 10]).

Проблема определения аналогичных множеств для операторов

$$P_{\lambda,0}[f](z) = \int_0^z (f'(t))^\lambda dt, \quad |z| < 1,$$

действующего на классе S функций, однолистных в единичном круге, хорошо известна (см. работы [2]–[4]). Полагая $\Lambda(\mathfrak{N}, S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : P_{\lambda,0}[\mathfrak{N}] \subset S\}$, запишем имеющиеся результаты в виде

$$\Lambda(S^0, S) = \left\{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{2} \right\} \cup \left\{ \lambda : \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{2} \right\},$$

где S^0 – подкласс выпуклых функций и

$$\left\{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{4} \right\} \subset \Lambda(S, S) \subset \left\{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{3} \right\} \cup \{1\}.$$

Для дальнейшего понадобится достаточное условие однолистности, принадлежащее И. Беккеру [5].

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k}$ регулярна в E^- и при некотором $c \neq 1$, $|c| \leq 1$, удовлетворяет условию

$$\left| \frac{(|\zeta|^2 - c)(|\zeta|^2 - 1)\zeta f''(\zeta)}{(1 - c)f'(\zeta)} + c \right| \leq |\zeta|^2, \quad \zeta \in E^-.$$

Тогда $f(\zeta)$ однолистка в E^- .

ТЕОРЕМА 1. Справедливы включения

$$\left\{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{4} \right\} \subset \Lambda(\Sigma, \Sigma) \subset \left\{ \lambda : |\lambda| + \frac{|\lambda - 1|}{2} \leq 1 \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F = P_\lambda[f]$, где $f \in \Sigma$. Повторно дифференцируя соотношение (1), получим

$$\frac{\zeta F''(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{\lambda \zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}, \quad \zeta \in E^-. \quad (2)$$

Известно (см. [6, с. 139]), что на классе Σ имеет место точная оценка

$$\left| \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} + \frac{4\kappa(\rho) - 2}{\rho - 1} \right| \leq \frac{4\kappa(\rho)}{\rho - 1}, \quad \rho = |\zeta|^2 > 1, \quad (3)$$

где функция $\kappa(\rho) = \rho(1 - E(\rho^{-1/2})/K(\rho^{-1/2}))$ выражена через полные эллиптические интегралы

$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Если $|\lambda| \leq 1/4$, то при $\zeta \in E^-$ из (2) и (3) получим

$$\left| \frac{\zeta F''(\zeta)}{F'(\zeta)} + \frac{2\lambda(1 - 2\lambda)}{(\rho - 1)(\rho - 2\lambda)} \right| \leq \frac{1}{\rho - 1} \left(\kappa(\rho) + \left| \frac{1}{2} - \kappa(\rho) + \frac{1 - 2\lambda}{2(\rho - 2\lambda)} \right| \right). \quad (4)$$

В силу (4) и леммы 1 (при $c = 2\lambda$) функция $F(\zeta)$ будет однолистной, если

$$G(w) \equiv \kappa(\rho)|w| + \left| \left(\frac{1}{2} - \kappa(\rho) \right) w + \frac{1}{2} \right| \leq \rho, \quad (5)$$

причем область значений переменной $w = (\rho - 2\lambda)/(1 - 2\lambda)$ есть замкнутый круг $|w - a| \leq b$, где $a = (4\rho - 1)/3$, $b = 2(\rho - 1)/3$. Функция $G(w)$ достигает максимума на границе этого круга (достаточно заметить, что $\partial G/\partial v = 0$, где $v = \operatorname{Im} w$, только при $v = 0$, но там максимума, очевидно, нет). Теперь, полагая $w = a + be^{i\psi}$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$, будем иметь

$$\begin{aligned} G(w) &= \sqrt{(1/2 - \sigma a)^2 + b^2 \sigma^2 - 2b\sigma(1/2 - a\sigma) \cos \psi} + \kappa(\rho) \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \psi} \\ &\equiv G_1(\cos \psi), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\sigma = \kappa(\rho) - 1/2 > 0$ (см. [7]).

Заметим, что $G_1''(t) \leq 0$, откуда $G_1'(t) \geq G_1'(1)$ при $-1 \leq t \leq 1$. Остается проверить, что $G_1'(1) \geq 0$, поскольку тогда $G_1(t) \leq G_1(1) = \rho$ и неравенство (5) выполняется.

С этой целью докажем оценку

$$\varkappa(\rho) \leq \frac{1}{2} + \frac{4\rho - 1}{2(8\rho^2 - 4\rho - 1)}, \quad \rho > 1. \quad (7)$$

Используя формулы (5.2.16.6) и (5.2.16.7) из [8], дающие разложения функций $K(m)$, $E(m)$ в ряды Маклорена, получаем

$$\varkappa(\rho) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (2k+1) \rho^{-k} / (2k+2)}{\sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^{-k}}, \quad \text{где} \quad c_k = \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2, \quad k \geq 0$$

(при этом полагаем $(-1)!! = 0!! = 1$).

Оценка (7) приводится к виду

$$(8\rho^2 - 4\rho - 1) \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)^{-1} c_k \rho^{-k} \leq (4\rho - 1) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^{-k},$$

откуда после элементарных преобразований получаем

$$3\rho - \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4(2k+3)}{k+2} c_{k+1} - \frac{8(k+2)}{k+3} c_{k+2} - \frac{c_k}{k+1} \right) \rho^{-k} \geq 0, \quad \rho > 1. \quad (8)$$

Теперь достаточно заметить, что при $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{4(2k+3)}{k+2} c_{k+1} - \frac{8(k+2)}{k+3} c_{k+2} - \frac{c_k}{k+1} \\ &= \frac{c_k}{k+1} \left(\frac{3(2k+1)^2(2k+3)}{2(k+1)(k+2)(k+3)} - 1 \right) > 0 \end{aligned}$$

и неравенство (8) (а, следовательно, и (7)) доказано.

Отсюда имеем

$$G_1'(1) = \frac{(\rho - 1)(4\rho - 1 - 2(8\rho^2 - 4\rho - 1)\sigma)}{9(2\rho - 1)(1 - 2(2\rho - 1)\sigma)} \geq 0,$$

что и требовалось.

Докажем вторую часть теоремы. Из свойств функций $K(m)$, $E(m)$ следует, что $\varkappa(\rho) \rightarrow 1$ при $\rho \rightarrow 1$. Если $|\lambda| + |\lambda - 1|/2 > 1$, то найдется $\rho_0 > 1$ такое, что

$$(4\varkappa(\rho_0) - 2)|1 - \lambda| + 4|\lambda|\varkappa(\rho_0) > 4\varkappa(\rho_0). \quad (9)$$

Подберем вещественное α , для которого

$$(4\varkappa(\rho_0) - 2)|1 - \lambda| + 4|\lambda|\varkappa(\rho_0) = |(4\varkappa(\rho_0) - 2)(1 - \lambda) + 4\lambda e^{i\alpha}\varkappa(\rho_0)|. \quad (10)$$

Оценка (3) характеризует область значений функционала $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$ на классе Σ ($\zeta \in E^-$ фиксированное). Поэтому найдутся $f_0 \in \Sigma$ и $\zeta'_0 \in E^-$ такие, что

$$\frac{\zeta'_0 f''_0(\zeta'_0)}{f'_0(\zeta'_0)} = \frac{2 - 4\kappa(\rho_0) + 4\kappa(\rho_0)e^{i\alpha}}{\rho_0 - 1}, \quad |\zeta'_0|^2 = \rho_0. \quad (11)$$

Теперь если $F_0 = P_\lambda[f_0]$, то в силу (2) и (9)–(11) будем иметь

$$\left| \frac{\zeta_0 F''_0(\zeta_0)}{F'_0(\zeta_0)} + \frac{4\kappa(\rho_0) - 2}{\rho_0 - 1} \right| > \frac{4\kappa(\rho_0)}{\rho_0 - 1},$$

откуда $F_0 \notin \Sigma$.

Теорема 1 уточняет результат из [4], согласно которому

$$\left\{ \lambda : |\lambda| \leq \frac{1}{6} \right\} \subset \Lambda(\Sigma, \Sigma) \subset \{ \lambda : |\lambda| \leq 1 \}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место включение*

$$\{ \lambda = \mu e^{i\nu} : |\lambda| \leq \mu_0(\nu) \} \subset \Lambda(\Sigma^0, \Sigma),$$

где $\mu_0(\nu) = (3 + \cos \nu)/4$ при $\nu_0 \leq |\nu| \leq \pi$ и $\mu_0(\nu) = (1 + |\sin \nu|)^{-1}$ при $0 \leq |\nu| \leq \nu_0$. Здесь $\nu_0 = \arccos t_0 = 0.9633 \dots$, а $t_0 = 0.5707 \dots$ – единственный корень уравнения $47 - 52t - 46t^2 - 12t^3 - t^4 = 0$ в интервале $0 < t < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $\lambda \in \Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$ при $|\lambda| = \mu = \mu_0(\nu)$. Действительно, множество $\Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$ звездообразно относительно точки $\lambda = 0$, т.е. из $\lambda \in \Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$ следует, что $t\lambda \in \Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$ при любом $0 \leq t \leq 1$.

Пусть

$$\mu = |\lambda| = \frac{3 + \cos \nu}{4}, \quad \nu_0 \leq |\nu| \leq \pi. \quad (12)$$

Тогда, полагая

$$c = 1 - 2\mu e^{i\theta}, \quad \theta = 2 \arctg(\sin \nu (3 + \cos \nu)^{-1}), \quad (13)$$

находим

$$c = \frac{-(1 + \cos \nu)(2 + 5 \cos \nu + \cos^2 \nu) - i \sin \nu (3 + \cos \nu)^2}{2(5 + 3 \cos \nu)}.$$

Нетрудно видеть, что $|c| \leq 1$ тогда и только тогда, когда $\mu \leq \cos \theta$, а последнее неравенство всегда выполнено в силу (12) и (13).

Если $f \in \Sigma^0$, то из условия выпуклости (см. [4]) получим

$$\left| \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2}{\rho^2 - 1} \right| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - 1}, \quad \rho = |\zeta|^2 > 1.$$

Отсюда и из (2) для $F = P_\lambda[f]$, $\zeta \in E^-$, имеем

$$\left| \frac{\zeta F''(\zeta)}{F'(\zeta)} + \frac{c(1 - c)}{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - c)} \right| \leq \frac{2\mu\rho}{\rho^2 - 1} + \frac{1}{\rho - 1} \left| \frac{2\lambda}{\rho + 1} + \frac{c(1 - c)}{\rho - c} \right|. \quad (14)$$

В силу (13), (14) и леммы 1 функция $F(\zeta)$ будет однолистной, если

$$|(\rho - c)e^{i(\nu - \theta)} + c(\rho + 1)| \leq \rho(\rho + 1 - |\rho - c|), \quad \rho > 1. \quad (15)$$

Поскольку $|c| \leq 1$, то правая часть в (15) неотрицательна и возведение в квадрат этого неравенства будет равносильным преобразованием. Следовательно, достаточно доказать, что

$$\rho^2|\rho - c| \leq \rho^3 - \rho^2 \operatorname{Re} c + \rho \operatorname{Re}(\bar{c}(1 - e^{i(\nu - \theta)})) - |c|^2(1 - \cos(\nu - \theta)). \quad (16)$$

При $\rho > 1$ непосредственно получаем

$$\begin{aligned} \rho^3 - \rho^2 \operatorname{Re} c &\geq \rho^2(1 - \operatorname{Re} c) \geq 0; \\ \rho^3 - \rho^2 \operatorname{Re} c + \rho \operatorname{Re}(\bar{c}(1 - e^{i(\nu - \theta)})) &\geq \rho(1 - \operatorname{Re}(\bar{c}(1 - e^{i(\nu - \theta)}))) \geq 0; \\ \rho^3 - \rho^2 \operatorname{Re} c + \rho \operatorname{Re}(\bar{c}(1 - e^{i(\nu - \theta)})) - |c|^2(1 - \cos(\nu - \theta)) \\ &\geq 1 - |c|^2 - \operatorname{Re}(\bar{c}(1 - c)e^{i(\nu - \theta)}) = 1 + \mu^2 - |\lambda + c|^2 = 0, \end{aligned}$$

поэтому неравенство (16) тоже можно возвести в квадрат.

Полагая для краткости $x = \cos \nu$, после обширных, но элементарных выкладок запишем

$$a_3\rho^3 + a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0 \geq 0, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} a_3 &= (5 + 3x)^2(47 - 52x - 46x^2 - 12x^3 - x^4), \\ a_2 &= 115 + 974x + 1653x^2 + 1036x^3 + 277x^4 + 38x^5 + 3x^6, \\ a_1 &= 799 + 476x - 761x^2 - 504x^3 - 43x^4 + 28x^5 + 5x^6, \\ a_0 &= -289 + 323x^2 - 35x^4 + x^6. \end{aligned}$$

Очевидно, что при $-1 \leq x \leq 0$ имеем $a_3 > 0$, а на отрезке $0 \leq x \leq 1$ этот многочлен имеет единственный корень $x = t_0 = 0.5707 \dots$. Отсюда при $-1 \leq x \leq t_0$ в силу цепочки неравенств

$$\begin{aligned} a_3 &\geq 0, \\ a_3 + a_2 &= 2(5 + 3x)(1 - x)(3 + x)(43 + 39x + 13x^2 + x^3) \geq 0, \\ a_3 + a_2 + a_1 &= (1 - x)(2089 + 3649x + 2254x^2 + 638x^3 + 73x^4 + x^5) \geq 0, \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 8(1 - x)(15 + 14x + 3x^2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

закключаем, что оценка (17) выполнена при $\nu_0 \leq |\nu| \leq \pi$.

Заметим, что в этом случае нельзя улучшить оценку для $|\lambda|$, используя лишь лемму 1. Во второй части теоремы результат допускает уточнение, однако получить аналитическое выражение для оптимального μ при $|\nu| \leq \nu_0$ не представляется возможным.

Доказательство второй части теоремы проведем аналогично. Сначала заметим, что для однолистности функции $F = P_\lambda[f]$ в силу неравенства (5) и леммы 1 достаточно выполнения условия

$$H(\rho, \lambda, c) \equiv 2|\lambda||\rho - c| + \rho^{-1}|2\lambda(\rho - c) + c(1 - c)(\rho + 1)| \leq |1 - c|(\rho + 1)$$

при $\rho > 1$. Подставляя сюда $c = -a$, $0 \leq a \leq 1$, и $\lambda = a \pm i(1 - a^2)/2$, запишем это неравенство в виде

$$|a(\rho - 1) + (1 + a)(\rho + a)i| \leq \rho(a\rho + 1 + a + a^2), \quad \rho > 1.$$

После элементарных преобразований получим

$$a^2\rho^3 + a(2 + 3a + 2a^2)\rho^2 + a^2(2 + 4a + a^2)\rho - a^4 \geq 0, \quad \rho > 1,$$

что легко проверяется.

В статье [4] с помощью принципа площадей было доказано, что если $|\lambda| > 1$, то $\lambda \notin \Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$, однако, как будет видно из доказательства следующего утверждения, принцип площадей не дает здесь точной характеристики однолистности.

ТЕОРЕМА 3. *Пересечение множества $\Lambda(\Sigma^0, \Sigma)$ с вещественной осью совпадает с отрезком $[-1/2, 1]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом теоремы 2 и предыдущего замечания достаточно показать, что при $\lambda < -1/2$ имеем $P_\lambda[\Sigma^0] \not\subset \Sigma$. Известно, что $f_0(\zeta) = \zeta + 1/\zeta \in \Sigma^0$, откуда

$$\begin{aligned} F(\zeta, \lambda) &= P_\lambda[f_0](\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} (1 - t^{-2})^\lambda dt \\ &= \zeta + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(1 - \lambda)(2 - \lambda) \cdots (k - 1 - \lambda)}{k!(2k - 1)\zeta^{2k-1}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Вместо $F(\zeta, \lambda)$ удобнее рассматривать функцию $\tilde{F}(\zeta, \lambda) = F(\zeta, \lambda) - C$, которая является нечетной и удовлетворяет условию

$$\overline{\tilde{F}(\zeta, \lambda)} = \tilde{F}(\bar{\zeta}, \lambda), \quad \zeta \in D^-.$$

Отсюда следует, что отображение $\tilde{F}(\zeta, \lambda)$ сохраняет симметрию относительно мнимой оси.

Нетрудно показать, что $w = \tilde{F}(\zeta, -1/2) = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ отображает область E^- на внешность лемнискаты

$$\left\{ w = \tau e^{i\chi} : \tau \geq \sqrt{-2 \cos 2\chi}, \left| \chi \pm \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

причем $\tilde{F}(\pm 1, -1/2) = 0$. Из представления (18) следует, что при любом $\lambda < -1/2$ имеем $\tilde{F}(1, \lambda) < \tilde{F}(1, -1/2) = 0$, откуда найдется $r_0 > 1$ такое, что $\tilde{F}(r_0, \lambda) < 0$.

С другой стороны, поскольку $\operatorname{Re} \tilde{F}(e^{i\pi/3}, -1/2) = 3^{1/4} \cos(5\pi/12) > 0$, то при некоторых $\lambda < -1/2$ и $r_0 > 1$ будем иметь $\operatorname{Re} \tilde{F}(r_0 e^{i\pi/3}, \lambda) > 0$.

Следовательно, дуга $w = \tilde{F}(e^{i\chi}), 0 \leq \chi \leq \pi/3$, пересекает мнимую ось, а в силу отмеченной симметричности рассматриваемой функции и дугу $w = \tilde{F}(e^{i\chi}), 2\pi/3 \leq \chi \leq \pi$. Отсюда функция $\tilde{F}(\zeta, \lambda)$ неоднолистка в E^- .

С помощью теоремы 2 можно улучшить оценку разделяющей постоянной в достаточном условии однолистной разрешимости внешней основной обратной краевой задачи (см. [1, с. 62]). Это решение определяется формулой

$$f(\zeta) = e^{i\beta} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \frac{e^{i\theta} + t}{e^{i\theta} - t} d\theta\right) dt + C, \quad \zeta \in E^-, \quad (19)$$

где β , C – постоянные, а $p(\theta) = \ln(ds/d\theta)$ – заданная функция, причем

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) e^{i\theta} d\theta = 0. \quad (20)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если 2π -периодическая дифференцируемая функция $p(\theta)$ удовлетворяет условию разрешимости (20) и, кроме того,

$$p'(\theta) \geq -0.75 \quad (\text{или} \quad p'(\theta) \leq 0.75), \quad (21)$$

то функция (19) однолистка. При замене в условии (21) постоянной 0.75 на 0.893... найдутся неоднолистные решения обратной краевой задачи, удовлетворяющие ему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность условия (21) следует из теоремы 2 при $\nu = \pm\pi/2$, поскольку $p'(\theta) = \operatorname{Re} i e^{i\theta} f''(e^{i\theta})/f'(e^{i\theta})$. С другой стороны, согласно теореме площадей функция $F(\zeta, \lambda)$, заданная формулой (18), заведомо неоднолистка, если только

$$H_0(\lambda) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^2 |\lambda - 1|^2 \cdots |\lambda - k + 1|^2}{(k!)^2 (2k - 1)} > 1. \quad (22)$$

При фиксированном натуральном N имеем

$$\begin{aligned} H_0(i\mu) &\geq \sum_{k=1}^N \frac{\mu^2(\mu^2 + 1) \cdots [\mu^2 + (k - 1)^2]}{(k!)^2 (2k - 1)} \\ &\quad + \frac{\mu^2(\mu^2 + 1) \cdots (\mu^2 + N^2)}{(N!)^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2 (2k - 1)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} (2k - 1)^{-1} = 4 \ln 2 - \pi^2/6 = 1.1276 \dots$, а функция в правой части монотонно возрастает по μ , заметим, что оценка для μ , следующая из неравенств (22), (23), убывает с увеличением N . В частности, при $N = 8$ получим, что $F(\zeta, i\mu)$ неоднолистка при $\mu > 0.8935 \dots$.

Тем самым улучшаются как верхняя, так и нижняя оценка разделяющей постоянной для достаточного условия однолистности $p'(\theta) \geq -0.5$, полученного в [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М. Достаточные условия конечности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 25. М.: ВИНТИ, 1987. С. 3–121.
- [2] Pfaltzgraff J. A. Univalence of the integral $(f'(z))^\alpha$ // Bull. London Math. Soc. 1975. V. 7. № 3. P. 254–256.
- [3] Royster W. C. On the univalence of a certain integral // Michigan Math. J. 1965. V. 12. P. 385–387.
- [4] Аксентьев Л. А., Нежметдинов И. Р. Достаточные условия однолиственности некоторых интегральных представлений // Труды семин. по краевым задачам. Вып. 18. Казань: Изд-во КГУ, 1982. С. 3–11.
- [5] Becker J. Conformal mappings with quasiconformal extensions // Aspects of Contemporary Complex Analysis. London: Academic Press, 1980. P. 37–72.
- [6] Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [7] Авхадиев Ф. Г. Об условиях однолиственности аналитических функций // Изв. вузов. Матем. 1970. № 11. С. 3–13.
- [8] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Казанский государственный университет
E-mail: nezha@ksu.ru

Поступило
20.09.1999