Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Прохоров, Неравенство Харди с мерами, случай $0 < p < 1$, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 870–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4887>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 07:21:02

Неравенство Харди с мерами, случай $0 < p < 1$

Д. В. Прохоров

В работе получены критерии выполнения неравенства Харди с тремя счетно-конечными мерами на числовой прямой для случая $0 < p < 1$.

Библиография: 10 названий.

1. Постановка задачи. Для единообразия записи для произвольных $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \leq b$, положим

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad [a, b) := [a, b] \setminus \{b\}, \quad (a, b] := [a, b] \setminus \{a\}.$$

Таким образом, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и под топологией на $[a, b]$ понимаем топологию, индуцированную евклидовой топологией $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}([a, b])$ σ -алгебру борелевских подмножеств множества $[a, b]$. Символ $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}([a, b])$ обозначает σ -алгебру подмножеств множества $[a, b]$, содержащую $\mathfrak{B}$. Через $\{\mathfrak{M}\}^+$ обозначим класс всех определенных на $[a, b]$ $\mathfrak{M}$ -измеримых функций $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Фраза “ μ есть мера на $[a, b]$ ” означает, что существует σ -алгебра $\mathfrak{M}$ такая, что μ есть счетно-аддитивная функция, заданная на $\mathfrak{M}$, со значениями в расширенной полупрямой $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, при этом предполагаем, что существует хотя бы одно $E \in \mathfrak{M}$, на котором $\mu(E) < +\infty$. Для выделения той σ -алгебры, на которой задана мера λ , будем использовать запись $\mathfrak{M}_\lambda$.

В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения неравенства Харди вида

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) u(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{[a,b]} f^p w d\nu \right)^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \quad (1.1)$$

где $0 < p < 1$, $0 < q < +\infty$; λ, μ, ν суть σ -конечные меры на $[a, b]$, λ, ν определены на одной σ -алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; функция k определена на $[a, b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$ -измерима и удовлетворяет следующему условию: существуют константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ такие, что $k(x, y_1) \geq \alpha_1 k(x, y_2)$ для $y_1 < y_2$, $k(x_1, y) \leq \alpha_2 k(x_2, y)$ для $x_1 < x_2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00054-а) и ДВО РАН (гранты №№ 06-III-A-01-003, 06-III-B-01-018).

При $p \geq 1$ и $k \equiv 1$ данное неравенство (неравенство Харди) для мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега, а также для последовательностей изучалось в работах многих авторов (см. [1], [2] и [3]). В работах Ойнарова [4], Блума и Кермана [5], Степанова [6], Прохорова [7] рассмотрено данное неравенство для ядер, удовлетворяющих условию Ойнарова: существует константа D такая, что

$$D^{-1}(k(x, z) + k(z, y)) \leq k(x, y) \leq D(k(x, z) + k(z, y)) \quad \text{при } x \geq z \geq y. \quad (1.2)$$

Случай $0 < p < 1$ для мер, абсолютно непрерывных относительно меры Лебега, не представлял большого интереса, ибо в такой ситуации неравенство (1.1) выполнено, лишь когда левая часть (1.1) равна нулю. Неравенства Харди для последовательностей характеризованы в работах Беннетта [8] и Гольдмана [9].

В частности, в работе [9] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < q < p < 1$, $1/r = 1/q - 1/p$, $a_n > 0$, $w_n > 0$, $u_n > 0$. Для выполнения неравенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\sum_{m=1}^n u_m a_m \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \right)^{1/p} \quad \text{для любой } \{a_n\}_1^{\infty} \quad (1.3)$$

необходимо и достаточно, чтобы $F < +\infty$, где

$$F := \left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^r (W_n^r - W_{n+1}^r) \right)^{1/r}, \quad U_n := \sup_{1 \leq m \leq n} u_m, \quad W_n := \left(\sum_{m=n}^{\infty} w_m \right)^{1/q}.$$

При этом $F \approx C$.

Для полноты изложения ввиду труднодоступности работы [9], приведем доказательство (принадлежащее Гольдману) необходимости данного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ расходится, то для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $U_n = 0$ и, следовательно, $F = 0$.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходится. Тогда $W_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Положим

$$\begin{aligned} N_1 &:= \{n \in \mathbb{N} : W_{n+1} > 0.75W_n\}, & N_2 &:= \{n \in \mathbb{N} : W_{n+1} \leq 0.75W_n\}, \\ N(l) &:= \{n \in \mathbb{N} : W_n \in [2^{-(l+1)}, 2^{-l}]\}, & L &:= \{l \in \mathbb{Z} : N(l) \neq \emptyset\}, \\ n_1(l) &:= \min\{n : n \in N(l)\}, & n_2(l) &:= \max\{n : n \in N(l)\}, \quad l \in L. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $l \in L$ число $n_1(l)$, очевидно, существует, а $n_2(l)$ существует в силу $W_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Разложим множество L на три непересекающихся множества: $L = \bigcup_{i=0}^2 L_i$, где

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{l \in L : W_{n_1(l)} < 1.5 \cdot 2^{-(l+1)}, n_2(l) \in N_1\}, \\ L_1 &:= \{l \in L : W_{n_1(l)} \geq 1.5 \cdot 2^{-(l+1)}, n_2(l) \in N_1\}, \\ L_2 &:= \{l \in L : n_2(l) \in N_2\}. \end{aligned}$$

Заметим, что для $l \in L_0 \cup L_1$ выполнено $n_2(l) \in N_1$, откуда

$$W_{n_2(l)+1} > 0.75W_{n_2(l)} \geq 0.75 \cdot 2^{-(l+1)} = 3 \cdot 2^{-(l+3)} = 1.5 \cdot 2^{-(l+2)} > 2^{-(l+2)}.$$

Кроме того, $n_2(l) + 1 \notin N(l)$ и, следовательно, $W_{n_2(l)+1} < 2^{-(l+1)}$. Таким образом, $n_2(l) + 1 \in N(l+1)$, $l+1 \in L$, $n_1(l+1) = n_2(l) + 1$, $W_{n_1(l+1)} > 3 \cdot 2^{-(l+3)} = 1.5 \cdot 2^{-((l+1)+1)}$, и $l+1 \in L_1 \cup L_2$.

Также для $i \in \{1, 2\}$ и $l \in L_i$ положим

$$l' = \max\{k \in L_i : k < l\}, \quad \Delta_l^{(i)} := \{1, \dots, n_i(l)\} \setminus \{1, \dots, n_i(l')\}.$$

Фиксируем произвольное $K \in \mathbb{N}$. Положим $\tilde{u}_m := u_m$ при $m \leq K$ и $\tilde{u}_m := 0$ при $m > K$. Тогда, заменив в (1.3) u_m на $\tilde{u}_m$, получим верное неравенство.

Построим тестовые последовательности $\{a_n^{(i)}\}$, $i \in \{1, 2\}$, следующим образом. Пусть $l \in L_i$. Так как $\Delta_l^{(i)}$ конечное множество, то существует $m_l \in \Delta_l^{(i)}$ такое, что $\tilde{u}_{m_l} = \sup_{m \in \Delta_l^{(i)}} \tilde{u}_m$. Положим $a_{m_l}^{(i)} = [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^{r/p}$, а при $m \in \Delta_l^{(i)}$, $m \neq m_l$, положим $a_{m_l}^{(i)} = 0$.

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(i)}]^p = \sum_{l \in L_i} [a_{m_l}^{(i)}]^p = \sum_{l \in L_i} [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^r.$$

С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m a_m^{(i)} \right)^q \geq \sum_{l \in L_i} \sum_{n \in N(l)} w_n \left(\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m a_m^{(i)} \right)^q.$$

При $i = 2$ получим

$$\sum_{l \in L_2} \sum_{n \in N(l)} w_n \left[\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m a_m^{(2)} \right]^q \geq \sum_{l \in L_2} w_{n_2(l)} \left[\sum_{m=1}^{n_2(l)} \tilde{u}_m a_m^{(2)} \right]^q \approx \sum_{l \in L_2} \left[2^{-l} \sum_{m=1}^{n_2(l)} \tilde{u}_m a_m^{(2)} \right]^q,$$

ибо для $l \in L_2$ выполнено $n_2(l) \in N_2$ и, следовательно,

$$W_{n_2(l)}^q \geq w_{n_2(l)} = W_{n_2(l)}^q - W_{n_2(l)+1}^q \geq W_{n_2(l)}^q - [0.75 W_{n_2(l)}]^q \approx W_{n_2(l)}^q \approx 2^{-lq}.$$

При $i = 1$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{l \in L_1} \sum_{n \in N(l)} w_n \left[\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m a_m^{(1)} \right]^q &\geq \sum_{l \in L_1} \left[\sum_{m=1}^{n_1(l)} \tilde{u}_m a_m^{(1)} \right]^q [W_{n_1(l)}^q - W_{n_2(l)+1}^q] \\ &\gtrsim \sum_{l \in L_1} \left[2^{-l} \sum_{m=1}^{n_1(l)} \tilde{u}_m a_m^{(1)} \right]^q, \end{aligned}$$

ибо для $l \in L_1$ выполнено $W_{n_1(l)} \geq 1.5 \cdot 2^{-(l+1)}$, $n_2(l) + 1 = n_1(l+1)$ и, следовательно,

$$W_{n_1(l)}^q - W_{n_2(l)+1}^q = W_{n_1(l)}^q - W_{n_1(l+1)}^q \geq [1.5 \cdot 2^{-(l+1)}]^q - 2^{-(l+1)q} \approx 2^{-lq}.$$

Таким образом, для $i \in \{1, 2\}$ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} w_n \left(\sum_{m=1}^n \tilde{u}_m a_m^{(i)} \right)^q &\gtrsim \sum_{l \in L_i} \left[2^{-l} \sum_{m=1}^{n_i(l)} \tilde{u}_m a_m^{(i)} \right]^q \\ &\geq \sum_{l \in L_i} \left[2^{-l} \sum_{m \in \Delta_l^{(i)}} \tilde{u}_m a_m^{(i)} \right]^q = \sum_{l \in L_i} [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^r. \end{aligned}$$

Так как суммы $\sum_{l \in L_i} [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^r$ конечные, то заключаем, что

$$C \gtrsim \left(\sum_{l \in L_1} [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{l \in L_2} [2^{-l} \tilde{u}_{m_l}]^r \right)^{1/r}.$$

В виду произвольности выбора K имеем

$$\begin{aligned} C &\gtrsim \left(\sum_{l \in L_1} [2^{-l} u_{m_l}]^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{l \in L_2} [2^{-l} u_{m_l}]^r \right)^{1/r} \\ &= \left(\sum_{l \in L_1} \left[2^{-l} \sup_{m \in \Delta_l^{(1)}} u_m \right]^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{l \in L_2} \left[2^{-l} \sup_{m \in \Delta_l^{(2)}} u_m \right]^r \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

Запишем L_1 в виде возрастающей последовательности $\{l_j\}_{j \in I}$, где I – связное подмножество множества $\mathbb{Z}$. Тогда при $l = l_j$

$$\Delta_l^{(1)} = \Delta_{l_j}^{(1)} = \{1, \dots, n_1(l_j)\} \setminus \{1, \dots, n_1(l_{j-1})\}.$$

Положим $\delta_k := \sup_{m \in \Delta_{l_k}^{(1)}} u_m$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{l \in L_1} \left[2^{-l} \sup_{1 \leq m \leq n_1(l)} u_m \right]^r &= \sum_{j \in I} \left[2^{-l_j} \sup_{1 \leq m \leq n_1(l_j)} u_m \right]^r = \sum_{j \in I} \left[2^{-l_j} \sup_{k \in I, k \leq j} \delta_k \right]^r \\ &\leq \sum_{j \in I} \left[2^{-l_j} \sum_{k \in I, k \leq j} \delta_k \right]^r \lesssim \sum_{k \in I} [2^{-l_k} \delta_k]^r = \sum_{l \in L_1} \left[2^{-l} \sup_{m \in \Delta_l^{(1)}} u_m \right]^r. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения справедливы для L_2 . Таким образом,

$$\sum_{l \in L_i} \left[2^{-l} \sup_{m \in \Delta_l^{(i)}} u_m \right]^r \gtrsim \sum_{l \in L_i} \left[2^{-l} \sup_{1 \leq m \leq n_i(l)} u_m \right]^r$$

и

$$C \gtrsim \left[\sum_{l \in L_1} [2^{-l} U_{n_1(l)}]^r \right]^{1/r} + \left[\sum_{l \in L_2} [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r \right]^{1/r}.$$

Далее,

$$F^r = \sum_{i=0}^2 \sum_{l \in L_i} \sum_{n \in N(l)} U_n^r (W_n^r - W_{n+1}^r).$$

При $l \in L_2$

$$\sum_{n \in N(l)} U_n^r (W_n^r - W_{n+1}^r) \leq U_{n_2(l)}^r (W_{n_1(l)}^r - W_{n_2(l)+1}^r) \leq U_{n_2(l)}^r W_{n_1(l)}^r \leq [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r.$$

При $l \in L_0 \cup L_1$

$$\sum_{n \in N(l)} U_n^r (W_n^r - W_{n+1}^r) \leq [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r \leq [2^{-l} U_{n_2(l)+1}]^r = 2^r [2^{-(l+1)} U_{n_1(l+1)}]^r.$$

Откуда

$$\begin{aligned}
 F &\leq \left[\sum_{i=0}^1 \sum_{l \in L_i} 2^r [2^{-(l+1)} U_{n_1(l+1)}]^r + \sum_{l \in L_2} [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r \right]^{1/r} \\
 &\leq \left[2^{r+1} \left(\sum_{l \in L_1} [2^{-l} U_{n_1(l)}]^r + \sum_{l \in L_2} [2^{-l} U_{n_1(l)}]^r \right) + \sum_{l \in L_2} [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r \right]^{1/r} \\
 &\leq \left[2^{r+1} \sum_{l \in L_1} [2^{-l} U_{n_1(l)}]^r + (2^{r+1} + 1) \sum_{l \in L_2} [2^{-l} U_{n_2(l)}]^r \right]^{1/r} \lesssim C.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

На расширенной полупрямой $[0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ введены следующие аксиомы:

$$\begin{aligned}
 0 + (+\infty) &= a + (+\infty) = a \cdot (+\infty) = +\infty && \text{при } a \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\}, \\
 0 \cdot (+\infty) &= 0, \\
 (+\infty)^\alpha &= 0^{-\alpha} = +\infty, \quad (+\infty)^{-\alpha} = 0^\alpha = 0 && \text{при } \alpha \in (0, +\infty).
 \end{aligned}$$

Соотношения $A \lesssim B$ и $B \gtrsim A$ означают $A \leq cB$ с константой c , зависящей только от p и q , $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. Символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ обозначают соответственно множество всех натуральных чисел, целых чисел и действительных чисел; χ_E – характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset \mathbb{R}$. Мы используем значки $:=$ и $=$: для определения новых величин.

2. Основные результаты. Пусть λ – мера на $[a, b]$. Тогда

- (а) мера λ называется *непрерывной*, если $\lambda(\{x\}) = 0$ для любого $x \in [a, b]$;
- (б) мера λ называется *дискретной*, если существует не более чем счетное множество E_λ такое, что $\lambda([a, b] \setminus E_\lambda) = 0$ и для любого $x \in E_\lambda$ выполнено $\lambda(\{x\}) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть λ – σ -конечная мера на $[a, b]$. Тогда

- (а) множество $G := \{x \in [a, b] \mid \lambda(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетное;
- (б) существуют меры λ_c, λ_d , определенные на $\mathfrak{M}_\lambda$, такие, что λ_c непрерывная, λ_d дискретная и $\lambda = \lambda_c + \lambda_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) В силу σ -конечности меры λ существует последовательность $\{E_n\} \subset \mathfrak{M}_\lambda$ такая, что $\lambda(E_n) < +\infty$ и $[a, b] = \bigcup_n E_n$. Определим меру λ_n , положив для любого $E \in \mathfrak{M}_\lambda$

$$\lambda_n(E) = \lambda(E \cap E_n),$$

и через F_n обозначим функцию распределения меры λ_n :

$$F_n(x) = \lambda_n([a, x]), \quad x \in [a, b].$$

Так как F_n – ограниченная монотонная функция, то множество ее точек разрыва не более чем счетное. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in G$. Тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $x_0 \in E_{n_0}$. При этом $\lambda_{n_0}(\{x_0\}) > 0$. Тогда x_0 – точка разрыва функции F_{n_0} . Таким образом, множество G содержится в объединении множеств точек разрыва функций F_n , которое представляет собой не более чем счетное множество.

(b) Для любого $E \in \mathfrak{M}_\lambda$ положим $\lambda_d(E) := \lambda(G \cap E)$, где множество G из пункта (a), и определим λ_c равенством $\lambda_c = \lambda - \lambda_d$. Тогда не более чем счетное множество G есть носитель меры λ_d , причем для любого $x \in G$ выполнено $\lambda_d(\{x\}) > 0$, т.е. λ_d – дискретная мера. Также из определения G вытекает непрерывность меры λ_c . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < p < 1, 0 < q < +\infty$; λ и μ суть σ -конечные меры на $[a, b]$, λ непрерывная; k определена на $[a, b]^2$, неотрицательна и $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$ -измерима.

Обозначим

$$E = \left\{ x \in [a, b] \mid \int_{[a, b]} k(x, y) d\lambda(y) \neq 0 \right\}.$$

Для справедливости неравенства

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a, b]} \left(\int_{[a, b]} k(x, y) f(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq C \left(\int_{[a, b]} f^p d\lambda \right)^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \end{aligned} \quad (2.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(E) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность очевидна.

Необходимость. Сначала предположим, что мера μ конечная. Так как λ есть σ -конечная мера, то $[a, b] = \bigcup_1^\infty E'_j$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda(E'_j) < +\infty$. Положим

$$E''_j := \left(\bigcup_{i=1}^j E'_i \right) \cap [-j, j], \quad j \in \mathbb{N};$$

$s := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda(E''_i) > 0\} - 1$ и $E_j := E''_{s+j}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $[a, b] = \bigcup_1^\infty E_j$ и для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено $0 < \lambda(E_j) < +\infty$, E_j ограничено.

Фиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через I_j отрезок, содержащий E_j . Существует такое $m_j \in \mathbb{N}$, что, разбив отрезок I_j на 2^{m_j} равных отрезков $I^1_j, \dots, I^{2^{m_j}}_j$, получим $\lambda(E_j \cap I^s_j) < n^{p/(p-1)}$ для любого $s \in \{1, \dots, 2^{m_j}\}$. В противном случае можно было построить последовательность вложенных отрезков $\{J_k\}$, длины которых стремятся к 0 и таких, что $\lambda(E_j \cap J_k) \geq n^{p/(p-1)}$, $k \in \mathbb{N}$. При этом $\bigcap_{k=1}^\infty (E_j \cap J_k)$ есть либо $\emptyset$, либо одноточечное множество. Но так как $\lambda(E_j) < +\infty$, то

$$\lambda \left(\bigcap_{k=1}^\infty (E_j \cap J_k) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_j \cap J_k) \geq n^{p/(p-1)} > 0,$$

что противоречит непрерывности меры λ .

Положим

$$N^0(n) := \bigcup_{j \in \mathbb{N}, s \in \{1, \dots, 2^{m_j}\} : \lambda(E_j \cap I^s_j) = 0} E_j \cap I^s_j,$$

а все $E_j \cap I^s_j$ такие, что $\lambda(E_j \cap I^s_j) \neq 0$, занумеруем одним индексом, обозначив через F_i , $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $[a, b] \setminus N^0(n) = \bigcup_1^\infty F_i$, причем $0 < \lambda(F_i) < n^{p/(p-1)}$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$ и произвольное $\mathfrak{M}_\lambda$ -измеримое $F \subset F_i$ такое, что $\lambda(F) > 0$. Обозначим

$$\gamma := \min\{q, 1\} \quad \text{и} \quad f := \chi_F \lambda(F)^{-1/p}.$$

Имеем $\int_{[a,b]} f^p d\lambda = 1$. При $q \leq 1$ в силу неравенства Минковского левая часть (2.1) оценивается снизу следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) f(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &= \lambda(F)^{-1/p} \left(\int_{[a,b]} \left(\int_F k(x,y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\geq \lambda(F)^{-1/p} \int_F \left(\int_{[a,b]} k(x,y)^q d\mu(x) \right)^{1/q} d\lambda(y). \end{aligned}$$

При $q > 1$, применяя неравенство Гёльдера с показателями $1/q$ и $1/(1-q)$, находим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) f(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &= \lambda(F)^{-1/p} \left(\int_{[a,b]} \left(\int_F k(x,y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\geq \lambda(F)^{-1/p} \mu([a,b])^{1/q-1} \int_{[a,b]} \left(\int_F k(x,y) d\lambda(y) \right) d\mu(x) \\ &= \lambda(F)^{-1/p} \mu([a,b])^{1/q-1} \int_F \left(\int_{[a,b]} k(x,y) d\mu(x) \right) d\lambda(y). \end{aligned}$$

В обоих случаях

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) f(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\geq \frac{nC_1}{\lambda(F)} \int_F \left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma d\mu(x) \right)^{1/\gamma} d\lambda(y), \end{aligned}$$

где $C_1 := \min\{1, \mu([a,b])^{1/q-1}\}$.

Следовательно, подставляя f в неравенство (2.1), получим

$$\frac{1}{\lambda(F)} \int_F \left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma d\mu(x) \right)^{1/\gamma} d\lambda(y) \leq \frac{C_2}{n},$$

где $C_2 = C \cdot C_1^{-1}$. Так как F – произвольное $\mathfrak{M}_\lambda$ -измеримое подмножество F_i такое, что $\lambda(F) > 0$, то (см. [10; теорема 1.40]) существует множество $N_i \subset F_i$ такое, что $\lambda(N_i) = 0$ и для любого $y \in F_i \setminus N_i$ выполнено

$$\left(\int_{[a,b]} k(x,y)^\gamma d\mu(x) \right)^{1/\gamma} \leq \frac{C_2}{n}. \quad (2.2)$$

Пусть $N^n := \bigcup_{i=1}^\infty N_i$. Тогда, $\lambda(N^n) = 0$ и для любого $y \in [a,b] \setminus (N^0(n) \cup N^n)$ выполнено (2.2). Пусть $N := \bigcup_{n=1}^\infty (N^0(n) \cup N^n)$. Тогда, $\lambda(N) = 0$ и для любого $y \in [a,b] \setminus N$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено (2.2). Следовательно, для любого $y \in [a,b] \setminus N$ имеет место

$$\int_{[a,b]} k(x,y) d\mu(x) = 0.$$

Откуда

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) d\lambda(y) \right) d\mu(x) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} k(x,y) d\mu(x) \right) d\lambda(y) = 0$$

т.е. $\mu(E) = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай. Так как мера μ σ -конечная на $[a, b]$, то существует последовательность $\{G_n\}$ $\mathfrak{M}_\mu$ -измеримых множеств такая, что $G_n \subset G_{n+1}$, $\mu(G_n) < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n = [a, b]$. Для любого $\mathfrak{M}_\mu$ -измеримого G положим

$$\mu_n(G) = \mu(G \cap G_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из (2.1) следует справедливость неравенства аналогичного (2.1), в котором стоит μ_n вместо μ . По доказанному, $\mu(E \cap G_n) = \mu_n(E) = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\mu(E) = 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $0 < p \leq 1$, $p \leq q < +\infty$; λ и μ суть σ -конечные меры на $[a, b]$, λ – дискретная мера и ее носитель – счетное множество точек $\{c_n\}_1^\infty \subset [a, b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; k определена на $[a, b]^2$, неотрицательна ($\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda$)-измерима и удовлетворяет следующему условию: существует константа $\alpha > 0$ такая, что $k(x, y_1) \geq \alpha k(x, y_2)$ для $y_1 < y_2$. Неравенство

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) u(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq C \left(\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right)^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \end{aligned} \quad (2.3)$$

выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} < +\infty$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \sup_{t \in [a,b]} \left(\int_{[t,b]} v(x) k(x,t)^q d\mu(x) \right)^{1/q} H(t), \\ H(x) &:= \sup_{n: c_n \in [a,x]} u(c_n) \lambda(\{c_n\})^{1/p'}, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (2.3) справедливо $\alpha \mathcal{F} \leq C \leq \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Фиксируем произвольную функцию f , принадлежащую $\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Имеем в силу неравенства Йенсена

$$\begin{aligned} \int_{[a,x]} k(x,y) f(y) u(y) d\lambda(y) &= \sum_{n: c_n \in [a,x]} k(x, c_n) f(c_n) u(c_n) \lambda(\{c_n\}) \\ &\leq \sum_{n: c_n \in [a,x]} k(x, c_n) f(c_n) \lambda(\{c_n\})^{1/p} H(c_n) \\ &\leq \left(\sum_{n: c_n \in [a,x]} k(x, c_n)^p f(c_n)^p \lambda(\{c_n\}) H(c_n)^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{[a,x]} k(x,y)^p f(y)^p H(y)^p d\lambda(y) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Минковского, находим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left[\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) u(y) d\lambda(y) \right]^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\int_{[a,b]} v(x) \left[\int_{[a,x]} k(x,y)^p f(y)^p H(y)^p d\lambda(y) \right]^{q/p} d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq \left(\int_{[a,b]} f(y)^p H(y)^p \left[\int_{[y,b]} v(x) k(x,y)^q d\mu(x) \right]^{p/q} d\lambda(y) \right)^{1/p} \\ & \leq \mathcal{F} \left[\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Необходимость. Пусть выполнено неравенство (2.3). Фиксируем произвольное $t \in [a, b]$ и натуральное число n такое, что $c_n \in [a, t]$. Полагая $f = \lambda(\{c_n\})^{-1/p} \chi_{\{c_n\}}$ в (2.3), получим

$$\alpha u(c_n) \lambda(\{c_n\})^{1/p'} \left(\int_{[t,b]} v(x) k(x,t)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C.$$

Откуда следует требуемая оценка. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < q < p \leq 1$, $1/r = 1/q - 1/p$; λ и μ суть σ -конечные меры на $[a, b]$, λ – дискретная мера и ее носитель – счетное множество точек $\{c_n\}_1^\infty \subset [a, b]$; $u \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$, $k \equiv 1$. Неравенство (2.3) выполнено тогда и только тогда, когда $\mathcal{G} < +\infty$, где

$$\mathcal{G} := \left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[x,b]} v d\mu \right)^{r/p} H(x)^r d\mu(x) \right)^{1/r}.$$

Более того, для наименьшей константы C в неравенстве (2.3) справедливо $C \approx \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Фиксируем произвольную функцию f , принадлежащую $\{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, такую, что правая часть неравенства (2.3) конечна. Для произвольного $t \in [a, b]$ положим

$$h(t)^{r/q} := \int_{[0, H(b)]} s^{r-1} \chi_{[0, H(t)]}(s) \left[\int_{[a,b]} v(x) \chi_{[0, H(x)]}(s) d\mu(x) \right]^{r/p} ds.$$

Заметим, что функция H не убывает на $[a, b]$. В частности, H борелевская функция и ядро $\chi_{[0, H(t)]}(s)$, $t \in [a, b]$, $s \in [0, H(b)]$, есть $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B})$ -измеримая функция на декартовом произведении $[a, b] \times [0, H(b)]$.

Во-первых, для любого $t \in [a, b]$ выполнено

$$\begin{aligned} & H(t) \left[\int_{[t,b]} v h^{-p/q} d\mu \right]^{1/p} \\ & \leq H(t) \left[\int_{[t,b]} v d\mu \right]^{1/p} h(t)^{-1/q} \\ & \leq H(t) \left[\int_{[t,b]} v d\mu \right]^{1/p} \left[\int_{[t,b]} v d\mu \right]^{-1/p} \left[\int_{[0, H(b)]} s^{r-1} \chi_{[0, H(t)]}(s) ds \right]^{-1/r} \approx 1, \end{aligned}$$

ибо при $\chi_{[t,b]}(x) = 1$ и $s \in [0, H(t)]$ выполнено $s \in [0, H(x)]$, а значит, $\chi_{[0, H(x)]}(s) = 1$.

Доказанное соотношение в силу теоремы 4 влечет оценку

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) h(x)^{-p/q} \left(\int_{[a,x]} f u d\lambda \right)^p d\mu(x) \right)^{1/q} \lesssim \left(\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

В частности, из данной оценки следует, что

$$\int_{\{x \in [a,b] | h(x)=0\}} v(x) \left(\int_{[a,x]} f u d\lambda \right)^q d\mu(x) = 0.$$

Во-вторых, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{[a,b]} v(x) h(x)^{r/q} d\mu(x) \\ &= \int_{[0, H(b)]} s^{r-1} \left(\int_{[a,b]} v(x) \chi_{[0, H(x)]}(s) d\mu(x) \right)^{r/q} ds \\ &\approx \int_{[0, H(b)]} s^{r-1} \int_{[a,b]} v(x) \chi_{[0, H(x)]}(s) \left[\int_{[x,b]} v(x) \chi_{[0, H(t)]}(s) d\mu(t) \right]^{r/p} d\mu(x) ds \\ &= \int_{[a,b]} v(x) \int_{[0, H(b)]} \chi_{[0, H(x)]}(s) \left[\int_{[x,b]} v(x) \chi_{[0, H(t)]}(s) d\mu(t) \right]^{r/p} s^{r-1} ds d\mu(x) \\ &\leq \int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[x,b]} v d\mu \right)^{r/p} \left[\int_{[0, H(b)]} s^{r-1} \chi_{[0, H(x)]}(s) ds \right] d\mu(x) \approx \mathcal{G}^r. \end{aligned}$$

В частности, из данной оценки следует, что

$$\int_{\{x \in [a,b] | h(x)=+\infty\}} v d\mu = 0.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями r/q и p/q и объединяя обе оценки, получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} f u d\lambda \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_{[a,b]} v(x) h(x) h(x)^{-1} \left[\int_{[a,x]} f u d\lambda \right]^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\leq \left[\int_{[a,b]} v h^{r/q} d\mu \right]^{1/r} \left(\int_{[a,b]} v(x) h(x)^{-p/q} \left[\int_{[a,x]} f u d\lambda \right]^p d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\lesssim \mathcal{G} \left(\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Необходимость. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ -измеримого множества E положим

$$\lambda_k(E) = \lambda(E \cap \{c_1, \dots, c_k\}).$$

Тогда неравенство (2.3) влечет

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} g u d\lambda_k \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{[a,b]} g^p d\lambda_k \right)^{1/p} \quad \text{для всех } g \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \quad (2.4)$$

Пусть $\{c'_i\}_{i=1}^k$ – возрастающая перестановка набора точек $\{c_i\}_{i=1}^k$ и

$$\Delta_0 := [a, c'_1), \quad \Delta_k := [c'_k, b], \quad \Delta_j := [c'_j, c'_{j+1}), \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Фиксируем произвольный набор $\{d_j\}_{j=1}^k$ неотрицательных вещественных чисел и положим

$$g := \sum_{j=1}^k d_j \lambda(\{c'_j\})^{-1/p} \chi_{\Delta_j}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} g u d\lambda_k \right)^q d\mu(x) &= \sum_{n=0}^k \int_{\Delta_n} v(x) \left(\int_{[a,x]} g u d\lambda_k \right)^q d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^k \int_{\Delta_n} v d\mu \left(\sum_{j=1}^n g(c'_j) u(c'_j) \lambda(\{c'_j\}) \right)^q \\ &= \sum_{n=1}^k w_n \left(\sum_{j=1}^n d_j \varphi_j \right)^q, \end{aligned}$$

где

$$w_n := \int_{\Delta_n} v d\mu, \quad \varphi_j := u(c'_j) \lambda(\{c'_j\})^{1/p'}.$$

Кроме того,

$$\int_{[a,b]} g^p d\lambda_k = \sum_{n=0}^k \int_{\Delta_n} g^p d\lambda_k = \sum_{n=1}^k d_n^p.$$

Таким образом, неравенство (2.4) влечет

$$\left(\sum_{n=1}^k w_n \left(\sum_{j=1}^n d_j \varphi_j \right)^q \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{n=1}^k d_n^p \right)^{1/p}$$

для всех наборов $\{d_j\}_{j=1}^k$ неотрицательных чисел. Применяя теорему 1, получим оценку

$$\begin{aligned} C^r &\gtrsim \sum_{n=1}^k \left(\sup_{1 \leq m \leq n} \varphi_m \right)^r \left[\left(\sum_{j=n}^k w_j \right)^{r/q} - \left(\sum_{j=n+1}^k w_j \right)^{r/q} \right] \\ &= \sum_{n=1}^k \left(\sup_{1 \leq m \leq n} \varphi_m \right)^r \left[\left(\int_{[c_n, b]} v d\mu \right)^{r/q} - \left(\int_{[c_{n+1}, b]} v d\mu \right)^{r/q} \right]. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} C^r &\gtrsim \sum_{n=1}^k \left(\sup_{1 \leq m \leq n} \varphi_m \right)^r \int_{\Delta_n} v d\mu \left(\int_{[c_n, b]} v d\mu \right)^{r/p} \\ &\geq \sum_{n=1}^k \int_{\Delta_n} v(x) \left(\int_{[x, b]} v d\mu \right)^{r/p} H_k(x)^r d\mu(x) \end{aligned}$$

$$= \int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[x,b]} v d\mu \right)^{r/p} H_k(x)^r d\mu(x),$$

где

$$H_k(x) := \sup_{n: 1 \leq n \leq k, c_n \in [a,x]} u(c_n) \lambda(\{c_n\})^{1/p'}, \quad x \in [a, b].$$

Так как для любого фиксированного $x \in [a, b]$ последовательность таких функций $\{H_k(x)\}_k$, возрастая, сходится к $H(x)$ при $k \rightarrow \infty$, то теорема о монотонной сходимости влечет оценку $C \gtrsim \mathcal{G}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $0 < p < 1$, $0 < q < +\infty$, $1/r = 1/q - 1/p$; μ , λ и ν суть σ -конечные меры на $[a, b]$, λ , ν определены на одной σ -алгебре $\mathfrak{M}_\lambda$, $\lambda = \lambda_c + \lambda_d$, где λ_c – непрерывная, а λ_d – дискретная составляющие λ ; $u, w \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$, $v \in \{\mathfrak{M}_\mu\}^+$; (ν_a, ν_s) – разложение Лебега меры ν относительно λ , т.е.

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_a \ll \lambda, \quad \nu_s \perp \lambda,$$

$d\nu_a/d\lambda$ – производная Радона–Никодима ν_a относительно λ ; k определена на $[a, b]^2$, неотрицательна, $(\mathfrak{M}_\mu \times \mathfrak{M}_\lambda)$ -измерима и удовлетворяет условию: существуют константы $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ такие, что

$$k(x, y_1) \geq \alpha_1 k(x, y_2) \quad \text{для } y_1 < y_2, \quad k(x_1, y) \leq \alpha_2 k(x_2, y) \quad \text{для } x_1 < x_2.$$

Положим

$$\begin{aligned} \omega(x) &:= u(x) \left(w(x) \frac{d\nu_a}{d\lambda}(x) \right)^{-1/p}, \quad x \in [a, b], \\ E &= \left\{ x \in [a, b] \mid v(x) \int_{[a,x]} k(x, y) \omega(y) d\lambda_c(y) \neq 0 \right\}, \\ \mathcal{H}(x) &:= \sup_{t \in [a,x], \lambda_d(\{t\}) \neq 0} \omega(t) \lambda_d(\{t\})^{1/p'}, \quad x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Если $p \leq q$, то для выполнения неравенства

$$\begin{aligned} &\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x, y) f(y) u(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\int_{[a,b]} f^p w d\nu \right)^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+ \end{aligned} \quad (2.5)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu(E) = 0$ и $\mathcal{F} < +\infty$, где

$$\mathcal{F} := \sup_{x \in [a,b]} \left(\int_{[x,b]} v(t) k(t, x)^q d\mu(t) \right)^{1/q} \mathcal{H}(x).$$

Если $q < p$ и $k \equiv 1$, то для выполнения неравенства (2.5) необходимо и достаточно, чтобы $\mu(E) = 0$ и $\mathcal{F} < +\infty$, где

$$\mathcal{F} := \left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[x,b]} v d\mu \right)^{r/p} \mathcal{H}(x)^r d\mu(x) \right)^{1/r}.$$

Более того, при $p \leq q$ наименьшая константа C в неравенстве (2.5) удовлетворяет оценке $\alpha_1 \mathcal{F} \leq C \leq \mathcal{F}$, а при $q < p$ выполнено $C \approx \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.5) (см. [8; леммы 7 и 8] эквивалентно неравенству

$$\left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right)^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+.$$

Полученное неравенство влечет справедливость пары неравенств (с такой же константой C):

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left[\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda_c(y) \right]^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq C \left[\int_{[a,b]} f^p d\lambda_c \right]^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+, \\ & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left[\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda_d(y) \right]^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & \leq C \left[\int_{[a,b]} f^p d\lambda_d \right]^{1/p} \quad \text{для всех } f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3 к первому неравенству и теоремы 4, 5 ко второму, докажем необходимость требуемого утверждения.

Пусть, теперь, $\mu(E) = 0$ и $\mathcal{F} < +\infty$. Фиксируем произвольную функцию $f \in \{\mathfrak{M}_\lambda\}^+$. Так как $\mu(E) = 0$, то

$$\begin{aligned} & \left(\int_{[a,b]} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & = \left(\int_{[a,b] \setminus E} v(x) \left(\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda(y) \right)^q d\mu(x) \right)^{1/q} \\ & = \left[\int_{[a,b]} v(x) \left[\int_{[a,x]} k(x,y) f(y) \omega(y) d\lambda_d(y) \right]^q d\mu(x) \right]^{1/q} \\ & \lesssim \mathcal{F} \left[\int_{[a,b]} f^p d\lambda_d \right]^{1/p} \leq \mathcal{F} \left[\int_{[a,b]} f^p d\lambda \right]^{1/p}. \end{aligned}$$

Что доказывает достаточность требуемого утверждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Opic, A. Kufner, *Hardy-Type Inequalities*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **219**, Longman Sci. & Tech., Harlow, 1990.
- [2] A. Kufner, L.-E. Persson, *Weighted Inequalities of Hardy Type*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.
- [3] Д. В. Прохоров, “Неравенство Харди с тремя мерами”, *Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ*, Сборник статей, Тр. МИАН, **255**, Наука, М., 2006, 233–245.

- [4] Р. Ойнаров, “Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 16*, Тр. МИАН, **204**, Наука, М., 1993, 240–250.
- [5] S. Bloom, R. Kerman, “Weighted norm inequalities for operators of Hardy type”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113**:1 (1991), 135–141.
- [6] V. D. Stepanov, “Weighted norm inequalities of Hardy type for a class of integral operators”, *J. London Math. Soc.* (2), **50**:1 (1994), 105–120.
- [7] D. V. Prokhorov, “Inequalities of Hardy type for a class of integral operators with measures”, *Anal. Math.*, **33**:3 (2007), 199–225.
- [8] G. Bennett, “Some elementary inequalities. III”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **42**:166 (1991), 149–174.
- [9] M. L. Goldman, *Hardy Type Inequalities on the Cone of Quasimonotone Functions*, Research Report № 98/31, Computing Centre FEB RAS, Khabarovsk, 1998, 69 p.
- [10] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Д. В. Прохоров

Вычислительный центр ДВО РАН

E-mail: prohorov@as.khb.ru

Поступило

28.03.2008