Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Ширшова, Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 122–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:22:10

УДК 512.545

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И ГРУППАХ РИССА

Е. Е. Ширшова

Рассматривается один из способов обобщения понятия ортогональности на произвольные частично упорядоченные группы. В данной статье исследуются свойства почти ортогональных элементов в группах Рисса. Получен ряд результатов о выпуклых направленных подгруппах, ассоциированных с парой почти ортогональных элементов группы Рисса. Некоторые теоремы о гомоморфизмах доказываются для этих подгрупп.

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Пусть G – частично упорядоченная группа, e – единица группы G , $G^+ = \{x \in G \mid e \leq x\}$ – положительный конус группы G . Напомним, что элементы $a, b \in G^+$ называются *ортогональными* в решеточно упорядоченной группе G , если их точная нижняя грань $a \wedge b = e$.

В работе используется обычная терминология (см., например, [1]).

Понятие ортогональности элементов служит одним из основных технических средств исследования решеточно упорядоченных групп (l -групп) (см., например, [2]). Желание получить аналог утверждений, верных для l -групп, в более широких классах частично упорядоченных групп явилось причиной, побуждавшей распространить понятие ортогональности на произвольные частично упорядоченные группы. Понятие ортогональности в произвольной частично упорядоченной группе определялось, например, Жаффаром [3], Кутыевым [4], Фуксом [5], Якубиком [6], Рахунеком [7], [8].

Перечисленные понятия в l -группах превращаются в понятие ортогональности элементов положительного конуса. При этом понятия Кутыева, Фукса и Рахунека совпадают на положительных элементах произвольных частично упорядоченных групп, а определения Жаффара, Фукса и Якубика эквивалентны в группах Рисса.

Напомним, что направленная группа G называется *группой Рисса*, если она обладает следующим интерполяционным свойством: для любых элементов a_1, a_2, b_1, b_2 группы G из справедливости неравенств $a_i \leq b_j$ (для всех $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$) следует существование в группе G элемента c , для которого имеют место неравенства $a_i \leq c \leq b_j$ ($i = 1, 2, j = 1, 2$). Группами Рисса такие группы впервые назвал Фукс (см. [1] или [5]).

Учитывая вышесказанное, будем использовать в работе следующее определение обобщенной ортогональности, введенное Фуксом [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элементы a и b из G^+ называются *ортогональными* в частично упорядоченной группе G , если $L(a, b) \subseteq L(e)$, где $L(a, b, \dots)$ – множество нижних граней множества $\{a, b, \dots\}$.

Впервые введенное Конрадом [9] в классе абелевых частично упорядоченных групп понятие p -ортогональности стоит несколько обособлено в ряду обобщений понятия ортогональности. С помощью понятия p -ортогональности строится класс pl -групп, являющийся подклассом в классе групп Рисса и включающий в себя решеточно упорядоченные группы, сохраняя многие свойства последних (см. [10] или [11]).

При доказательстве ряда утверждений о p -ортогональных элементах в pl -группах очень полезным оказалось их свойство: вместе с каждой своей нижней гранью превосходить все ее целые положительные степени. Это наблюдение позволило автору определить новое понятие обобщенной ортогональности, которое будем называть почти ортогональностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть G – частично упорядоченная группа. Назовем элементы $a, b \in G^+$ *почти ортогональными*, если из $c \leq a, b$ следует $c^n \leq a, b$ для всех элементов $c \in G$ и всех целых чисел $n > 0$.

Из определений 1 и 2 следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ А. *Ортогональные элементы являются почти ортогональными в любой частично упорядоченной группе.*

Из [10, лемма 2.1] следует, что p -ортогональные элементы образуют пары почти ортогональных элементов в pl -группе.

В п. 2 приведены примеры, показывающие, что понятие почти ортогональности отлочно от понятий слабой ортогональности Жаффара и p -ортогональности.

В решеточно упорядоченных группах справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *В решеточно упорядоченной группе положительные элементы почти ортогональны тогда и только тогда, когда они ортогональны.*

Каждое обобщение понятия ортогональности выделяет некоторый “удобный” для данного понятия подкласс частично упорядоченных групп. Таким подклассом для понятия почти ортогональности оказались группы Рисса.

Основные результаты данной статьи описывают свойства отношения почти ортогональности в группах Рисса. Прежде всего заметим, что требование определения 2 в группе Рисса можно ослабить, если воспользоваться теоремой 2.

ТЕОРЕМА 2. *В группе Рисса G для положительных элементов a и b следующие условия являются эквивалентными:*

- 1) *элементы a и b почти ортогональны;*
- 2) *из неравенств $c \leq a, b$ следует верность неравенств $c^2 \leq a, b$ для любого элемента $c \in G$.*

В частично упорядоченной группе G для каждого элемента $a \in G^+$ ($a \neq e$) существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, положительный конус которой состоит из элементов $x \in G$, удовлетворяющих условию $e \leq x \leq a^m$ для некоторого целого числа $m > 0$ (подробнее см. [9] или [11]).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – группа Рисса. Если элементы $a, b \in G^+$ являются почти ортогональными в группе G , то верны следующие утверждения:*

- 1) $[a] \cap [b]$ – o -идеал в группе $[a]$ и в группе $[b]$;
- 2) $[a][b] = [b][a]$ – выпуклая направленная подгруппа в группе G ;

3) $[a]$ и $[b]$ – o -идеалы в группе $[a][b]$.

Напомним, что o -идеал – выпуклая направленная нормальная подгруппа частично упорядоченной группы.

Для доказательства теоремы 3 следует переформулировать соответствующие утверждения статьи [12], применив лемму 6 настоящей статьи.

Для доказательства леммы 6 нам понадобится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – группа Рисса. Если элементы $a, b \in G^+$ являются почти ортогональными в группе G , то почти ортогональны любые их целые положительные степени.

Следующая теорема показывает, что в группе Рисса каждой паре почти ортогональных элементов можно сопоставить выпуклую направленную подгруппу. Определение такой подгруппы в группе Рисса согласуется с понятием подгруппы, ассоциированной с парой p -ортогональных элементов в pl -группе (подробнее см. [13]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть элементы a и b являются почти ортогональными в группе Рисса G и пусть

$$S = \{x \in G^+ \mid x \leq a \text{ и } x \leq b\}.$$

Если

$$H(a, b) = \{g \in G \mid g = xy^{-1}, x, y \in S\},$$

то $H(a, b)$ – выпуклая направленная подгруппа группы G .

Следствием теоремы 5 является критерий ортогональности положительных элементов в группе Рисса.

ТЕОРЕМА 6. Для элементов $a, b \in G^+$ группы Рисса G следующие условия являются эквивалентными:

- 1) элементы a и b ортогональны;
- 2) элементы a и b почти ортогональны и $H(a, b) = \{e\}$.

Теорема 7 описывает местоположение подгруппы $H(a, b)$, соответствующей некоторой паре почти ортогональных элементов, в решетке подгрупп группы Рисса.

ТЕОРЕМА 7. Если элементы a и b являются почти ортогональными в группе Рисса G , то подгруппа $H(a, b)$ совпадает с пересечением подгрупп $[a]$ и $[b]$.

Следующие два утверждения являются основными результатами статьи.

ТЕОРЕМА 8. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G , то верны следующие утверждения:

- 1) существует o -гомоморфизм группы Рисса $[a]$ на группу Рисса $[a][b]/[b]$ с ядром $H(a, b)$;
- 2) факторгруппа $[a]/H(a, b)$ o -изоморфна факторгруппе $[a][b]/[b]$.

Напомним, что o -гомоморфизм – гомоморфизм, сохраняющий порядок.

В работе Якубиковой [14] показано, что пересечение направленных подгрупп группы Рисса не обязано быть направленной подгруппой, поэтому подгруппа, порожденная в

группе Рисса некоторым множеством направленных подгрупп, также не всегда является направленной подгруппой данной группы.

Обозначим буквой K теоретико-множественное объединение подгрупп $H(a_i, b_i)$ для всех пар почти ортогональных элементов a_i и b_i группы Рисса G и буквой H подгруппу, порожденную множеством K в группе G . Тогда справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9. *Если G – группа Рисса, то подгруппа H является o -идеалом группы G .*

Выпуклая подгруппа частично упорядоченной группы называется *спрямляющей*, если множество правых смежных классов по этой подгруппе линейно упорядочено (см. [2]).

Из теоремы 9 следует утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если направленная подгруппа M группы Рисса G является спрямляющей, то $H \subseteq M$.*

2. Примеры и простейшие свойства почти ортогональности. Начнем с примеров.

ПРИМЕР 1. Единица e частично упорядоченной группы G почти ортогональна любому положительному элементу $a \in G$.

Пусть $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, а $\mathbb{R}$ – аддитивная группа вещественных чисел с естественной упорядоченностью.

ПРИМЕР 2. Пусть $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ – прямое произведение групп, где пара $(a, b) \in F^+$ в том и только том случае, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a = b = 0$. $G = F \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}$ – лексикографическое произведение групп. Тогда элементы $x = ((2, 1), 0)$ и $y = ((1, 2), 0)$ являются почти ортогональными в G .

Заметим, что элементы x и y архимедово эквивалентны, т.е. не являются p -ортогональными (см. [11, теорема 2.6]).

Рассмотрев пример из [3, гл. II, § 1], покажем, что почти ортогональность отличается от слабой ортогональности Жаффара в классе произвольных частично упорядоченных групп.

ПРИМЕР 3. Пусть $A = \mathbb{Z} \overrightarrow{\times} \mathbb{Z}$ – лексикографическое произведение o -групп, $B = A \times \mathbb{R}$ – прямое произведение l -группы и o -группы. Жаффаром доказано, что элементы $f = ((1, 0), 1)$ и $g = ((0, 1), \sqrt{2})$ являются слабо ортогональными в подгруппе G группы B , состоящей из элементов вида $\alpha f + \beta g$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Но элементы f и g не являются почти ортогональными в этой группе. Действительно, элемент $s = g - f \leq f, g$, но элемент $3s \parallel f$.

Из определения отношения почти ортогональности непосредственно следует предложение.

ЛЕММА 1. *Если положительные элементы a и b частично упорядоченной группы G почти ортогональны, то почти ортогональными являются элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ для всех элементов $x \in G$. Обратное утверждение также имеет место.*

ЛЕММА 2. *Пусть G – частично упорядоченная группа. Тогда $x^{-1}[a]x = [x^{-1}ax]$ для всех элементов $x \in G$ и $a \in G^+$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если положительный элемент $u \in [x^{-1}ax]$, то

$$u \leq (x^{-1}ax)^m = x^{-1}a^m x \quad \text{для целого числа } m > 0.$$

Откуда следует, что элемент $v = xux^{-1} \leq a^m$, т.е. $v \in [a]$ и $u = x^{-1}vx$, что влечет $u \in x^{-1}[a]x$. Так как подгруппа $[x^{-1}ax]$ порождается своим положительным конусом, то $[x^{-1}ax] \subseteq x^{-1}[a]x$.

Обратно, если $e \leq u \in x^{-1}[a]x$, то $u = x^{-1}vx$, где $v \in [a]^+$, т.е. $v \leq a^n$ для целого числа $n > 0$. Отсюда

$$u \leq x^{-1}a^n x = (x^{-1}ax)^n, \quad u \in [x^{-1}ax].$$

Тогда для произвольного $g \in x^{-1}[a]x$ имеем $g = x^{-1}zx$, где $z = st^{-1}$ для некоторых $s, t \in [a]^+$. Таким образом,

$$g = (x^{-1}sx)(x^{-1}tx)^{-1}, \quad \text{где } x^{-1}sx, x^{-1}tx \in [x^{-1}ax],$$

по доказанному выше.

ЛЕММА 3. Если элементы a и b почти ортогональны в частично упорядоченной группе G , то имеет место равенство подгрупп

$$[a] = [b^{-1}ab] = [bab^{-1}]$$

и равенство подгрупп

$$[b] = [a^{-1}ba] = [aba^{-1}].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $[a] = [v]$, где $v = b^{-1}ab$. Остальные равенства доказываются аналогично.

Рассмотрим элемент

$$c = b^{-1}a^{-1}ba = b^{-1}u = v^{-1}a, \quad \text{где } u = a^{-1}ba.$$

Тогда $c \leq a, u$ и по лемме 1 элементы a и u почти ортогональны. Откуда следует, что $c^2 \leq a$, т.е. $(v^{-1}a)^2 \leq a$. Отсюда следует, что справедливо неравенство $v^{-1}av^{-1} \leq e$, откуда $a \leq v^2$. Это влечет $a \in [v]$ и в силу выпуклости подгруппы $[v]$ выполняется включение $[a]^+ \subseteq [v]$. Значит, $[a] \subseteq [v]$, так как $[a]$ порождается своим положительным конусом.

С другой стороны, $c^{-1} = a^{-1}v = u^{-1}b$ и элементы b и v почти ортогональны. Отсюда следует, что $(a^{-1}v)^2 \leq v$, что влечет неравенство $v \leq a^2$ и включение $[v] \subseteq [a]$. Следовательно, $[a] = [v]$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если элементы a и b почти ортогональны в частично упорядоченной группе G , то $b^{-1}[a]b = [a]$ и $a^{-1}[b]a = [b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, справедливость равенства $b^{-1}[a]b = [b^{-1}ab]$. Отсюда по лемме 3 получаем равенство $b^{-1}[a]b = [a]$.

ЛЕММА 4. В частично упорядоченной группе G для почти ортогональных элементов a и b справедливы следующие утверждения:

- 1) если элементы a и b отличны от единицы, то они не сравнимы между собой;
- 2) если $g = ab^{-1}$ и $g \geq e$, то $b = e$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a \leq b$. Тогда из очевидного неравенства $a \leq a$ выводим неравенство $a^2 \leq a$, откуда следует, что $a \leq e$. Но элемент a по условию положителен, отсюда заключаем, что $a = e$.

2) Если $g \geq e$ и $b \neq e$, то $b \leq a$, что противоречит утверждению 1) данного предложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть элементы $a, b \in G^+$ являются почти ортогональными в решеточно упорядоченной группе G и элемент $c = a \wedge b$. Очевидно, элемент $c \geq e$. Но из неравенств $c \leq a, b$ и почти ортогональности элементов a и b заключаем, что $c^2 \leq a, b$. Откуда $c^2 \leq c$, что влечет $c \leq e$, а поэтому $c = e$.

Справедливость обратного утверждения следует из предложения А.

3. Почти ортогональность в группах Рисса. Начнем с одного известного утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ В [5]. Для направленной группы G следующие условия являются эквивалентными:

- 1) G – группа Рисса;
- 2) для любых целых чисел $m > 0, n > 0$ из справедливости неравенств $a_i \leq b_j$ (для всех индексов $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$ элементов $a_i, b_j \in G$) следует существование элемента $z \in G$, для которого имеют место соотношения $a_i \leq z \leq b_j$;
- 3) если элемент $a \in G^+$ удовлетворяет неравенству $a \leq b_1 b_2 \cdots b_n$, где элементы $b_i \in G^+$, то в группе G существуют элементы $c_i \in G^+$ такие, что $a = c_1 c_2 \cdots c_n$ и $c_i \leq b_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть далее до конца статьи группа G является группой Рисса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Второе условие из первого следует тривиально. Пусть далее выполняется условие 2) и элемент $c \leq a, b$.

Для положительного элемента c выполняется соотношение $c^3 \leq c^4$, где $c^4 \leq a, b$ по условию 2), примененному к элементу c^2 . Отсюда заключаем, что $c^3 \leq a, b$. Применяя условие 2) к элементам c^3 и c^4 , выводим соотношения $c^6 \leq a, b$ и $c^8 \leq a, b$. Но верны неравенства $c^5 \leq c^6$ и $c^7 \leq c^8$, откуда по свойству транзитивности неравенств следует, что $c^5, c^7 \leq a, b$.

Пусть для всех целых положительных чисел k , меньших некоторого числа n , верны неравенства $c^k \leq a, b$. Если число $n = 2m$, то, применяя условие 2) к элементу c^m , получим нужное соотношение для элемента c^n . Если же число $n = 2m + 1$, применим условие 2) к элементу c^{m+1} и получим верное неравенство $c^{2(m+1)} \leq a, b$. Но для положительного элемента c выполняется соотношение $c^{2m+1} \leq c^{2(m+1)}$. Далее опять используем свойство транзитивности неравенств. Следовательно, $c^n \leq a, b$.

Если элемент $c \parallel e$, то в группе Рисса G по интерполяционному свойству существует элемент z , для которого справедливы неравенства $c, c^2 \leq z \leq a, b$. Из последних заключаем, что $c^3 \leq z^2$ и в силу условия 2) $z^2 \leq a, b$. По свойству транзитивности неравенств $c^3 \leq a, b$.

Далее, если для некоторого целого положительного числа n справедливы неравенства $c^n \leq a, b$, то в группе G найдется элемент t , для которого имеют место соотношения $c, c^n \leq t \leq a, b$. Из этих неравенств и условия 2) заключаем, что $c^{n+1} \leq t^2 \leq a, b$. Таким образом, неравенства $c^n \leq a, b$ справедливы для всех целых положительных чисел n .

ЛЕММА 5. Если положительные элементы a и b почти ортогональны в группе G , то соотношения $c \leq a^m, b^n$ влекут верность неравенств $c \leq a, b$ для всех целых чисел $m > 0, n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $c \in G$ и $c \leq a^m, b^n$ для некоторых целых чисел $m > 0, n > 0$.

- 1) Если $c \leq e$, то утверждение очевидно.
- 2) Если $e \leq c$, то по условию 3) предложения В имеем

$$c = u_1 u_2 \cdots u_m, \quad \text{где } e \leq u_i \leq a, i = 1, 2, \dots, m.$$

С другой стороны, по условию 2) предложения В из верных неравенств $u_i \leq a, b^n$ следует существование элемента $d \in G$, для которого

$$u_i \leq d \leq a, b^n \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, m.$$

Так как элемент d принадлежит G^+ , то по условию 3) предложения В в группе G существуют элементы v_j , удовлетворяющие условиям

$$d = v_1 v_2 \cdots v_n, \quad \text{где } e \leq v_j \leq b, j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда следует верность неравенств $v_j \leq a, b$, что по условию 2) предложения В влечет наличие элемента $z \in G$, для которого

$$v_j \leq z \leq a, b \quad \text{для всех } j = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда с учетом почти ортогональности элементов a и b следует, что $d \leq z^n \leq a, b$, но тогда $c \leq d^m \leq a, b$.

3) Если же $c \parallel e$, то по интерполяционному свойству в группе G существует элемент x , удовлетворяющий неравенствам $c, e \leq x \leq a^m, b^n$. Отсюда по доказанному выше следует, что $x \leq a, b$, т.е. $c \leq a, b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть элемент $x \in G$ и $x \leq a^m, b^n$ для целых положительных чисел $m > 0, n > 0$. Тогда по лемме 5 элемент $x \leq a, b$. Отсюда по условию теоремы для всякого целого положительного числа k имеют место неравенства $x^k \leq a, b$, откуда по свойству транзитивности неравенств следует, что $x^k \leq a^m, b^n$. Следовательно, элементы a^m и b^n являются почти ортогональными.

Обозначим символом $N(M)$ нормализатор подгруппы M в группе G .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если элементы a и b являются почти ортогональными в группе G , то по следствию 2 заключаем, что $a \in N([b])$ и $b \in N([a])$.

ЛЕММА 6. Пусть элементы a и b почти ортогональны в группе G . Тогда $[a] \subseteq N([b])$ и $[b] \subseteq N([a])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем справедливость первого включения. Пусть элемент $x \in [a]$ и $x \geq e$. Тогда по определению подгруппы $[a]$ элемент $x \leq a^n$ для некоторого целого числа $n > 0$. Рассмотрим элемент

$$c = bxb^{-1}x^{-1} = b(xbx^{-1})^{-1} = (bxb^{-1})x^{-1}.$$

Отсюда следует, что $c \leq b, bxb^{-1}$, где

$$bxb^{-1} \leq ba^n b^{-1} = (bab^{-1})^n.$$

Так как по лемме 1 элементы bab^{-1} и b почти ортогональны, то по теореме 4 элементы $(bab^{-1})^n$ и b также почти ортогональны, поэтому $c^2 \leq b$, т.е.

$$xb^{-1}x^{-1}bxb^{-1}x^{-1} \leq e,$$

откуда $x^{-1}bx \leq b^2$.

И так как элемент $x^{-1}bx \in G^+$, то $x^{-1}bx \in [b]$.

Если теперь элемент $u \in [b]^+$, то $u \leq b^k$ для некоторого целого числа $k > 0$, откуда

$$x^{-1}ux \leq x^{-1}b^k x = (x^{-1}bx)^k,$$

т.е. $x^{-1}ux \in [b]$.

Пусть далее элемент $g \in [b]$. Тогда $g = uv^{-1}$, где элементы u и v содержатся в $[b]^+$. Отсюда

$$x^{-1}gx = (x^{-1}ux)(x^{-1}vx)^{-1},$$

где по доказанному выше $x^{-1}ux, x^{-1}vx \in [b]$, т.е. $x^{-1}[b]x \subseteq [b]$.

Рассмотрим теперь элемент $d = x^{-1}b^{-1}xb$. Рассуждая аналогично предыдущему, получим верное неравенство $xbx^{-1} \leq b^2$. Это влечет соотношение $b \leq (x^{-1}bx)^2$. Значит, $b \in [x^{-1}bx]$. Отсюда следует верность включения $[b] \subseteq [x^{-1}bx]$, так как подгруппа $[x^{-1}bx]$ выпукла, а подгруппа $[b]$ является направленной. Откуда по лемме 2 $[b] \subseteq x^{-1}[b]x$. Следовательно, $x^{-1}[b]x = [b]$.

Таким образом, элемент $x \in N([b])$, что влечет верность включения $[a]^+ \subseteq N([b])$. Но направленная подгруппа $[a]$ порождается своим положительным конусом. Следовательно, $[a] \subseteq N([b])$. Второе утверждение доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 10. Для положительных элементов группы G следующие условия являются эквивалентными:

- 1) элементы a и b почти ортогональны;
- 2) для всякого элемента $x \in [a] \cap [b]$ справедливы неравенства $x \leq a, b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементы a и b почти ортогональны и элемент $x \in [a] \cap [b]$. Тогда по определению подгрупп $[a]$ и $[b]$ найдутся такие целые числа $m > 0$, $n > 0$, для которых верны неравенства $x \leq a^m, b^n$. Отсюда по лемме 5 следует, что $x \leq a, b$.

Обратно, пусть для элементов a и b имеет место условие 2) и $u \leq a, b$ для $u \in G$. Тогда по интерполяционному свойству в группе G найдется элемент x , удовлетворяющий соотношениям $e, u \leq x \leq a, b$. Так как элемент x содержится в $[a] \cap [b]$, то $x^2 \leq a, b$ по условию 2). Отсюда следует, что $u^2 \leq x^2 \leq a, b$. Остается применить теорему 2.

4. Подгруппа, определенная почти ортогональной парой элементов.

ЛЕММА 7. Пусть элементы a и b являются почти ортогональными в группе G и множество $S = \{x \in G^+ \mid x \leq a, x \leq b\}$. Тогда S – выпуклая подполугруппа в G^+ , содержащая e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элементы x и y принадлежат множеству S . Тогда $x \leq a, b$ и $y \leq a, b$. Следовательно, в группе Рисса G найдется элемент z , для которого верны неравенства $x, y \leq z \leq a, b$. Отсюда $xy \leq z^2 \leq a, b$, т.е. $xy \in S$ и S – полугруппа. Остальное тривиально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $g_1, g_2 \in H(a, b)$. Тогда $g_1 = xy^{-1}$ и $g_2 = uv^{-1}$, где элементы $x, y, u, v \in S$. Рассмотрим элемент $g_1 g_2^{-1}$. Он равен произведению

$$xy^{-1}(uv^{-1})^{-1} = xy^{-1}vu^{-1} = xv(v^{-1}yv)^{-1}u^{-1}.$$

Здесь произведение xv является элементом полугруппы S . Для элемента $t = v^{-1}yv$ верны соотношения $e \leq t \leq yv$, но $yv \in S$ и полугруппа S выпукла, т.е. $t \in S$. Таким образом, элемент $g_1 g_2^{-1} \in H(a, b)$ и $H(a, b)$ – подгруппа. Она выпукла, так как выпукла полугруппа S , и направлена, так как порождается своим положительным конусом. Действительно, если $h \in H(a, b)$ и $e \leq h$, то $h = uv^{-1}$, где $u, v \in S$ и $h \leq u$, откуда $h \in S$. Следовательно, S – положительный конус подгруппы $H(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть элементы a и b являются ортогональными, тогда по предложению А они и почти ортогональны. Рассмотрим элемент $x \in H(a, b)$ и $x \geq e$. Определение подгруппы $H(a, b)$ влечет верность неравенств $x \leq a, b$, откуда $x \in L(a, b)$, и из включения $L(a, b) \subseteq L(e)$ заключаем, что $x \leq e$. Отсюда $x = e$, т.е. $H(a, b)^+ = \{e\}$. Но подгруппа $H(a, b)$ порождается своим положительным конусом, т.е. $H(a, b) = \{e\}$.

Обратно, пусть имеет место условие 2). Рассмотрим элемент $x \in L(a, b)$. Из верности неравенств $e, x \leq a, b$ по интерполяционному свойству следует существование элемента c в группе G , для которого верны соотношения $e, x \leq c \leq a, b$, т.е. $c \in H(a, b)$. Отсюда следует, что $c = e$, значит $x \leq e$ и $L(a, b) \subseteq L(e)$. Следовательно, элементы a и b являются ортогональными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть $M = [a] \cap [b]$. Тогда по теореме 3 подгруппа M является выпуклой направленной подгруппой группы G . Пусть далее элемент $c \in H(a, b)^+$. Тогда $c \leq a, b$, откуда в силу выпуклости подгрупп $[a]$ и $[b]$ следует, что $c \in M$. Таким образом, $H(a, b)^+ \subseteq M$, но направленная подгруппа $H(a, b)$ порождается своим положительным конусом, т.е. $H(a, b) \subseteq M$.

Обратно, пусть $x \in M^+$. Тогда по теореме 10 верны неравенства $x \leq a, b$, т.е. по теореме 5 элемент x содержится в подгруппе $H(a, b)$. Последнее влечет верность включения $M \subseteq H(a, b)$, так как подгруппа M является направленной.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если положительные элементы a и b группы G почти ортогональны, то $H(x^{-1}ax, x^{-1}bx) = x^{-1}H(a, b)x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ почти ортогональны в группе G .

Если элемент $u \in x^{-1}H(a, b)x$, то $u = x^{-1}vx$, где по теореме 7 $v \in [a] \cap [b]$. Тогда по лемме 2 элемент u содержится в пересечении $[x^{-1}ax] \cap [x^{-1}bx]$. Отсюда по теореме 7 элемент $u \in H(x^{-1}ax, x^{-1}bx)$.

Обратно, если $e \leq u \in H(x^{-1}ax, x^{-1}bx)$, то по теореме 7 и лемме 2 элемент u содержится в пересечении подгрупп $x^{-1}[a]x$ и $x^{-1}[b]x$, т.е. $xux^{-1} \in [a] \cap [b]$. Откуда по теореме 7 элемент $u \in x^{-1}H(a, b)x$. Но направленная подгруппа порождается своим положительным конусом. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если элементы $a, b \in G^+$ почти ортогональны в группе G , то имеет место равенство $H(a, b) = H(a^m, b^n)$ для всех целых чисел $m > 0, n > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия по теореме 4 следует, что элементы a^m и b^n являются почти ортогональными в группе G . В силу теоремы 7 подгруппа $H(a^m, b^n) = [a^m] \cap [b^n]$. По следствию 3 теоремы 2.6 из [11] имеют место равенства подгрупп $[a^m] = [a]$ и $[b^n] = [b]$. Остается применить теорему 7.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для каждого элемента $x \in H(a, b)$ справедливы неравенства $x \leq a, b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства следует применить теорему 10 и теорему 7.

Для доказательства теоремы 8 нам понадобится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ С [12]. Пусть G – группа Рисса, A и B – выпуклые направленные подгруппы группы G и A содержится в нормализаторе подгруппы B . Тогда

- 1) существует сюръективный o -гомоморфизм группы Рисса A на группу Рисса AB/B с ядром $A \cap B$;
- 2) факторгруппа $A/A \cap B$ o -изоморфна группе AB/B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Рассмотрим выпуклые направленные подгруппы $[a]$ и $[b]$ в группе G . Из леммы 6 следует, что подгруппа $[a]$ содержится в нормализаторе подгруппы $[b]$, поэтому мы находимся в условиях предложения С. Применение теоремы 7 завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Начнем с доказательства направленности подгруппы H . Пусть $h \in H$. Тогда $h = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}$, где $x_i \in H(a_i, b_i)$ для $i = 1, 2, \dots, s$. В группе G по следствию 5 имеют место неравенства $e, x_i^{k_i} \leq a_i, b_i$ для каждого индекса i . По интерполяционному свойству найдутся элементы $z_i \in G$, для которых верны неравенства $e, x_i^{k_i} \leq z_i \leq a_i, b_i$. Отсюда следует, что $z_i \in H(a_i, b_i)$ и $e, h \leq z_1 z_2 \cdots z_s$, где $z_1 z_2 \cdots z_s \in H$. Таким образом, H – направленная подгруппа.

Обоснуем выпуклость подгруппы H . Пусть $u \leq g \leq v$, где $u, v \in H$ и $g \in G$. Тогда $e \leq gu^{-1} \leq vu^{-1}$, где $vu^{-1} = c_1 c_2 \cdots c_t$ и без потери общности можно считать, что $c_i \in H(a_i, b_i)^+$. Отсюда по условию 3) предложения В следует существование в группе G таких элементов x_i , для которых верны соотношения $gu^{-1} = x_1 x_2 \cdots x_t$ и

$e \leq x_i \leq c_i$ для $i = 1, 2, \dots, t$. Откуда следует, что $x_i \in H(a_i, b_i)$ и $gu^{-1} \in H$. Но тогда и элемент $g \in H$, т.е. H – выпуклая подгруппа.

В силу следствия 3 подгруппа H является нормальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G , то в условиях леммы один из них содержится в подгруппе M . Действительно, если это не так и $Ma \leq Mb$, то $ta \leq b$ для некоторого $t \in M$. Можно считать, что $t \leq e$, т.е. $ta \leq a$. В силу почти ортогональности элементов a и b заключаем, что $(ta)^2 \leq a$, откуда $a \leq (t^{-1})^2$. Следовательно, $a \in M$, так как подгруппа M выпукла.

Применяя теорему 10, теорему 7 и направленность подгруппы M , заключаем, что $H(a, b) \subseteq M$ для всех пар почти ортогональных элементов a и b . Следовательно, $H \subseteq M$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
- [2] Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
- [3] Jaffard P. Contribution a l'étude des groupes ordonnés // J. Math. Pures Appl. 1953. V. 32. P. 203–280.
- [4] Кутыев К. М. О регулярных структурно упорядоченных группах // УМН. 1956. Т. 11. № 1. С. 256.
- [5] Fuchs L. Riesz groups // Ann. Math. della Scuola Norm. Super di Pisa. Ser. III. 1965. V. 19. P. 1–34.
- [6] Jakubík J. Partially ordered groups with two disjoint elements // Colloq. Math. 1970. V. 21. P. 39–44.
- [7] Rachunek J. Prime subgroups of ordered groups // Czechosl. Math. J. 1974. V. 25 (99). P. 541–551.
- [8] Rachunek J. Z-subgroups of ordered groups // Math. Slovaca. 1979. V. 29. № 1. P. 39–41.
- [9] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. 1966. V. 116. P. 199–221.
- [10] Shirshova E. E. On extensions of *po*-groups // Contemporary Math. 1992. V. 131 (Part I). P. 345–353.
- [11] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах *pl*-групп // Фундаментальная и прикладная математика. 1997. Т. 3. № 1. С. 303–314.
- [12] Ширшова Е. Е. Свойства гомоморфизмов групп Рисса // УМН. 1991. Т. 46. № 5 (281). С. 157–158.
- [13] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдорешеточно упорядоченных групп // Алгебраические системы. Сб. тр. Ив. гос. ун-та. Иваново, 1991. С. 78–85.
- [14] Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen // Matematický časopis. 1971. V. 21. № 1. P. 3–8.