Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Щетинин, О рангах гомотопических групп однородных пространств, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 912–924

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4891>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:49:59

О рангах гомотопических групп однородных пространств

А. Н. Щетинин

Для однородных пространств вида $M = G/H$, где G – компактная связная группа Ли, H – ее связная регулярная подгруппа или подгруппа максимального ранга, указан простой способ вычисления рангов гомотопических групп $\pi_j(M)$. Получена классификация пространств, ранг которых в смысле Оничика равен 3. Описаны также транзитивные действия на произведениях однородных пространств вида G/H , где G и H просты, H – подгруппа коранга 1 в G и дефект пространства G/H равен 1.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть G – компактная связная группа Ли, H – ее связная подгруппа Ли, $M = G/H$. Рассмотрим гомотопические группы $\pi_j(M)$ многообразия M и его ранг в смысле Оничика (см. [1])

$$\text{rk } M = \sum_{i=0}^{\infty} \text{rk } \pi_{2i+1}(M).$$

Мы указываем простой способ вычисления ранга, а также рангов гомотопических групп компактного однородного пространства M положительной эйлеровой характеристики. Доказательство основано на вычислениях, значительная часть которых была проведена в [2]. Однако в работе [2] рассматривались только факторпространства простых особых групп Ли по их подгруппам коранга 1. Аналогичные рассуждения применимы и в случае произвольных факторпространств по регулярным подгруппам и для пространств положительной эйлеровой характеристики. Полученные результаты применяются для описания однородных пространств ранга 3, а также для классификации транзитивных действий на некоторых однородных пространствах.

2. Системы корней и группы Вейля. Пусть G – полупростая компактная связная группа Ли, T – ее максимальный тор. Обозначим через V_T касательное пространство в единице к тору T , и пусть $R \subset V_T^*$ – система корней группы G , $W(R) = W_G$ – группа Вейля системы корней R , $m_1, \dots, m_n$ – показатели группы W_G . Обозначим через $h(G)$ наибольший из показателей.

Пусть $U \subset R$ – подсистема, т.е. $(U + U) \cap R \subset U$, $-U = U$. Классификация всех пар вида (R, U) , где R – неприводимая система корней, U – ее подсистема, получена в [3]. Если L – связная подгруппа максимального ранга в G , то ей отвечает

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00230).

подсистема U . Для односвязной группы однородное пространство G/L однозначно с точностью до подобия определяется парой (R, U) .

Рассмотрим системы корней типов E_7 и E_8 . Система типа E_7 содержит подсистему

$$\pm(\mu_i - \mu_j), \quad 0 \leq i < j \leq 7, \quad \text{где} \quad \mu_0 + \dots + \mu_7 = 0,$$

типа A_7 . Система типа E_8 содержит подсистему

$$\pm(\nu_i - \nu_j), \quad 0 \leq i < j \leq 8, \quad \text{где} \quad \nu_0 + \dots + \nu_8 = 0,$$

типа A_8 . Корни вида

$$\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \quad 1 \leq i < j \leq 8, \quad \text{где} \quad \varepsilon_i = \nu_i + \frac{\nu_0}{2}, \quad i = 1, \dots, 8,$$

образуют подсистему типа D_8 в E_8 .

Пусть $S = S(V_T^*)$ – симметрическая алгебра. На ней действует группа W_G . Обозначим через S_G алгебру W_G -инвариантов.

В [4] найдены минимальные системы образующих алгебр S_G

$$I_{2s} = (16 - 2^{2s})p_{2s} + \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s}^i p_i p_{2s-i}, \quad s = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, \quad (1)$$

где $p_i = \mu_0^i + \dots + \mu_7^i$ для системы типа E_7 ,

$$J_{2s} = 18(5 + 3^{2s-3} - 2^{2s-1})p_{2s} + \sum_{i=1}^{2s-1} C_{2s}^i p_{2s-i} \left\{ (9 + (-1)^i - 2^i)p_i + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{i-1} C_i^j p_{i-j} p_j \right\},$$

$$s = 1, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, \quad (2)$$

где $p_i = \nu_0^i + \dots + \nu_8^i$ для системы типа E_8 . При этом $v_{2i} = \varepsilon_1^{2i} + \dots + \varepsilon_8^{2i}$, $i = 1, \dots, 7$, $v'_8 = \varepsilon_1 \dots \varepsilon_8$ служат образующими алгебры $W(D_8)$ -инвариантов. Как нетрудно вычислить, имеем

$$J_8 = 30(-672v'_8 - 12v_8 + 7v_4^2), \quad (3)$$

$$2J_{14} = 165(1920v_{14} - 1092v_8v_6 + 637v_6v_4^2 - 1456v_{10}v_4 - 2912v'_8v_6) \quad (4)$$

по модулю идеала, порожденного элементом v_2 .

Будем далее считать градуировку алгебр S и S_G удвоенной по сравнению с обычной: $S = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^{2i}$.

3. Когомологии однородных пространств и ранги гомотопических групп.

Мы имеем дело с топологическими инвариантами однородного пространства $M = G/H$, где H – связная подгруппа Ли в G . Для наших целей достаточно рассматривать только полупростые подгруппы. Напомним вкратце необходимые сведения (см. [1]). Алгебра вещественных когомологий $H(G, \mathbb{R})$ группы Ли G изоморфна внешней алгебре ΛP_G , где пространство P_G градуировано степенями $2m_1 + 1, \dots, 2m_n + 1$. Пусть $i: H \rightarrow G$ – вложение, S_G и S_H – алгебры инвариантов, $j^*: S_G \rightarrow S_H$ – отображение ограничения, $(S_G)_+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_G^{2i}$, $I_{G,H}$ – идеал в S_H , порожденный множеством $j^*((S_G)_+)$.

Определен повышающий степени на 1 изоморфизм τ_G пространства P_G на подпространство в $(S_G)_+$, дополнительное к идеалу $((S_G)_+)^2$ разложимых элементов. Рассмотрим градуированное пространство $E(S_G) = (S_G)_+ / ((S_G)_+)^2$ и гомоморфизм $E(j^*) : E(S_G) \rightarrow E(S_H)$, индуцированный отображением j^* . Изоморфизм τ_G индуцирует изоморфизм $\tau'_G : P_G \rightarrow E(S_G)$. Существует гомоморфизм $i^\# : P_G \rightarrow P_H$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P_G & \xrightarrow{i^\#} & P_H \\ \downarrow \tau'_G & & \downarrow \tau'_H \\ E(S_G) & \xrightarrow{E(j^*)} & E(S_H) \end{array}$$

коммутативной. Положим $C = \Lambda P_G \otimes S_H$ и определим дифференциал формулами

$$d(p \otimes 1) = 1 \otimes j^*(\tau_G(p)), \quad p \in P_G, \quad d(1 \otimes u) = 0, \quad u \in S_H.$$

Дифференциальная градуированная алгебра (C, d) называется *алгеброй Картана* однородного пространства M . Ее алгебра когомологий изоморфна алгебре вещественных когомологий $H(M, \mathbb{R})$ пространства M .

Алгебра C снабжается внешней градуировкой,

$$C = \bigoplus_{p \geq 0} {}_p C, \quad \text{где } {}_p C = \Lambda^p P_G \otimes S_H.$$

Эта градуировка переносится на алгебру $H(M, \mathbb{R})$:

$$H(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} {}_p H(M, \mathbb{R}).$$

Градуированная подалгебра ${}_0 H(M, \mathbb{R})$ называется *характеристической подалгеброй*. Имеем

$${}_0 H(M, \mathbb{R}) \cong S_H / I_{G, H}.$$

Пусть

$$Q(M) = \{x \in P_G \mid j^*(\tau_G(x)) \in (S_H)_+ I_{G, H}\}$$

– *подпространство Самельсона*. Положим $\chi_\pi(M) = \text{rk } H - \text{rk } G$, и пусть $\text{df } M = -\chi_\pi(M) - \dim Q(M)$ – *дефект* пространства M . Тогда $0 \leq \text{df } M \leq -\chi_\pi(M)$. Нас будут интересовать в основном пространства, у которых $\text{df } M = -\chi_\pi(M)$, т.е. $Q(M) = 0$.

Пусть $P_G^0 = \ker i^\#$, P_H^0 – дополнительное к $i^\#(P_G)$ градуированное подпространство. Положим

$$r_{2i+1}(M) = \dim(P_G^0)^{2i+1}, \quad r_{2i+2}(M) = \dim(P_H^0)^{2i+1}, \quad i \geq 0.$$

Тогда $r_j(M) = \text{rk } \pi_j(M)$, $j \geq 1$. Суммы

$$\text{rk } M = \sum_{i \geq 0} r_{2i+1}(M), \quad \text{cor } M = \sum_{i \geq 0} r_{2i+2}(M)$$

называются соответственно *рангом* и *корангом* пространства M .

Рассмотрим многочлен

$$q(M, t) = P(P_G, t) - P(P_H, t) = \lambda_1(M)t + \lambda_3(M)t^3 + \dots,$$

где $P(P_G, t)$ и $P(P_H, t)$ – многочлены Пуанкаре. Положим

$$\lambda_{2i+1}^{\pm}(M) = \max(\pm \lambda_{2i+1}(M), 0), \quad r^{\pm}(M) = \lambda_1^{\pm}(M) + \lambda_3^{\pm}(M) + \dots$$

Все это также топологические инварианты.

Имеем $r_{2i+1}(M) \geq \lambda_{2i+1}^+(M)$ для всех $i \geq 0$, поэтому $\text{rk } M = r^+(M)$ тогда и только тогда, когда $r_{2i+1}(M) = \lambda_{2i+1}^+(M)$ для всех $i \geq 0$. Аналогично, $r_{2i+2}(M) \geq \lambda_{2i+1}^-(M)$ и $\text{cor } M = r^-(M)$ тогда и только тогда, когда $r_{2i+2}(M) = \lambda_{2i+1}^-(M)$ для всех $i \geq 0$.

Пусть L – связная подгруппа максимального ранга в G , $L' = (L, L)$ – ее коммутант. Такие подгруппы L' будем называть *регулярными*. Если пространство G/L определено парой (R, U) , то L' – полупростая подгруппа с системой корней U .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $M = G/H$, где G – простая неабелева компактная связная группа Ли, H – такая ее связная подгруппа Ли, что $(L, L) \subseteq H \subseteq L$. Тогда

$$r_{2i+1}(M) = \lambda_{2i+1}^+(M), \quad r_{2i+2}(M) = \lambda_{2i+1}^-(M)$$

для всех $i \geq 0$, $\text{rk } M = r^+(M)$, $\text{cor } M = r^-(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорему достаточно доказать для $H = (L, L)$. Пусть пространство G/L определено парой (R, U) , где R – неприводимая система корней, U – ее подсистема. Для классических систем корней R утверждение проверяется элементарно. Рассмотрим исключительные системы. Пусть l – наименьший показатель группы $W(R)$, отличный от 1, и k – наибольший показатель группы $W(U)$. Утверждение теоремы заведомо верно, если $k < l$. Пусть $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, где U_i неприводимы, и пусть k_i – наибольший показатель группы $W(U_i)$, $i = 1, \dots, m$, $k_1 \geq \dots \geq k_m$. Как следует из классификации подсистем, если $k_1 \geq l$, то $k_2 < l$. Поэтому можно ограничиться неприводимыми подсистемами U . Ниже перечислены все возможные системы R и их неприводимые подсистемы U , для которых $k \geq l$:

$$\begin{aligned} E_8: & \quad A_8, \quad D_8, \quad D_7, \quad E_7, \quad A'_7, \quad A''_7, \quad D_6, \quad E_6, \quad D_5; \\ E_7: & \quad A_7, \quad E_6, \quad A_6, \quad D_6, \quad D_5, \quad A'_5, \quad A''_5, \quad D_4; \\ E_6: & \quad A_5, \quad D_5, \quad A_4, \quad D_4; \\ F_4: & \quad B_4, \quad D_4, \quad B_3, \quad C_3. \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначены подсистемы, содержащиеся в подсистеме A_7 системы E_7 и в подсистеме A_8 системы E_8 , двумя штрихами – не содержащиеся в этих подсистемах.

Имеют место следующие включения:

$$\begin{aligned} E_8 \supset E_7 \supset D_6, & \quad E_8 \supset A_8 \supset A'_7, & \quad E_8 \supset E_7 \supset A''_7, \\ E_7 \supset A_7 \supset A_6 \supset A'_5, & \quad E_7 \supset E_6 \supset A''_5 \supset A_4, & \quad E_7 \supset E_6 \supset D_5 \supset D_4, \\ F_4 \supset B_4 \supset B_3, & \quad F_4 \supset B_4 \supset D_4. \end{aligned}$$

Пусть $i_1: H \rightarrow K$, $i_2: K \rightarrow G$ – вложения, тогда $i^{\#} = i_1^{\#} \circ i_2^{\#}$. Отсюда следует, что достаточно рассмотреть только случай пары (R, U) , для которой U – подсистема коранга, не большего 1. Случай подсистемы коранга 1 рассмотрен в [2]. Отметим, что эта работа ошибочно не указана в списке литературы из [5]. Случай (F_4, B_4) хорошо

известен. Для пар (E_7, A_7) и (E_8, A_8) результат немедленно следует из формул (1) и (2) соответственно. Оставшийся случай пары (E_8, D_8) , $m = 7, 11$ сводится к уже рассмотренным (E_8, D_7) и (D_8, D_7) , а для $m = 13$ результат следует из формулы (4).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $M = M_1 \times \cdots \times M_s$, где $M_j = G_j/H_j$, G_j просты, H_j – такие же подгруппы в G_j , как в формулировке теоремы. Тогда

$$\operatorname{rk} \pi_{2i+1}(M) = \sum_{j=1}^s \lambda_{2i+1}^+(M_j), \quad \operatorname{rk} \pi_{2i+2}(M) = \sum_{j=1}^s \lambda_{2i+1}^-(M_j).$$

Утверждение теоремы, вообще говоря, неверно, если H – произвольная связная подгруппа Ли в G (см. [6], пример в конце статьи).

4. Пространства ранга 3. В [1] описаны однородные пространства рангов 1 и 2. Мы аналогичным образом рассмотрим пространства ранга 3. Рассуждения практически дословно повторяют те, которые были использованы в [1] при классификации пространств ранга 2. Поэтому большинство доказательств мы опустим. Не умаляя общности, можно рассматривать только пространства G/H с полупростой подгруппой H .

Пусть сначала группа G проста. Отметим сразу, что $\operatorname{rk} G/H = 3$, если $\operatorname{rk} G = 4$, H – группа типа A_1 . Опишем такие нерегулярные подгруппы. Обозначения $\mathbf{A}_1^k$ и аналогичные показывают, что индекс в смысле Дынкина этой подгруппы равен k (см. [1; п. 3.10]). Подгруппы $\mathbf{A}_1^5 \subset \mathbf{SU}_5$ и $\mathbf{A}_1^{20} \subset \mathbf{SU}_5$ задаются соответственно представлениями $\rho(2\pi_1) + \rho_1$ и $\rho(4\pi_1)$ в обозначениях книги [1]. Остальные подгруппы типа A_1 лежат в $\mathbf{SU}_4$. Они указаны в таблице 11 из [1]. Подгруппы $\mathbf{A}_1^k \subset \mathbf{SO}_9$, $k = 6, 11$ и 60 , задаются соответственно представлениями $3\rho(2\pi_1)$, $\rho(4\pi_1) + 2\rho_1$ и $\rho(8\pi_1)$. Остальные подгруппы типа A_1 лежат в $\mathbf{SO}_8$. Подгруппы $\mathbf{A}_1^k \subset \mathbf{SO}_8$, $k = 2, 10$ и 12 , задаются соответственно представлениями $4\rho_1$, $2\rho(3\pi_1)$ и $\rho(4\pi_1) + \rho(2\pi_1)$. Остальные подгруппы типа A_1 лежат в $\mathbf{SO}_7$ и указаны в таблице 11 из [1]. Подгруппы $\mathbf{A}_1^k \subset \mathbf{Sp}_4$, $k = 4, 9, 12, 20, 36$ и 84 , задаются представлениями $4\rho_1$, $2\rho(2\pi_1) + \rho_1$, $\rho(3\pi_1) + 2\rho_1$, $2\rho(3\pi_1)$, $\rho(5\pi_1) + \rho_1$ и $\rho(7\pi_1)$ соответственно. Остальные подгруппы типа A_1 лежат в $\mathbf{Sp}_3$ и указаны в таблице 11 из [1]. Подгруппы $\mathbf{A}_1^k \subset \mathbf{F}_4$ перечислены в [3; таблица 17].

Отметим, что существуют вложения $\operatorname{Spin}_7 \subset \mathbf{SO}_8 \subset \mathbf{SO}_9 \subset \cdots$, из которых первое определяется спинорным представлением. Соответствующее однородное пространство обозначим через $\mathbf{SO}_n/\operatorname{Spin}_7$. Через $\mathbf{E}_7$ и $\mathbf{E}_6$ обозначаются односвязные группы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – связная простая компактная группа Ли, H – ее связная полупростая подгруппа Ли, причем $\operatorname{rk} G/H = 3$, а $\operatorname{rk} H \geq 2$. Тогда существует такое локально прямое разложение $H = H_0 H_1$, что H_0 и H_1 – связные нормальные подгруппы Ли в H , H_0 проста, $\operatorname{rk} G/H_0 = 3$, а $\operatorname{rk} H_1 \leq 3$. Каждое пространство G/H , где H проста, локально подобно одному из следующих:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{SU}_n/\mathbf{SU}_{n-3}, & n \geq 6, & \mathbf{SU}_8/\mathbf{Sp}_4, & \mathbf{SU}_7/\mathbf{SO}_7, \\ \mathbf{SU}_7/\mathbf{Sp}_3, & \mathbf{SU}_7/\mathbf{SO}_6, & \mathbf{SU}_6/\mathbf{A}_2^2, & \mathbf{SU}_6/\mathbf{A}_2^5, \\ \mathbf{SU}_6/\mathbf{SO}_5, & \mathbf{SU}_6/\mathbf{Sp}_2, & \mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SO}_{2n-5}, & n \geq 5, \\ \mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SO}_{2n-4}, & n \geq 5, & \mathbf{SO}_{13}/\mathbf{SU}_6, & \mathbf{SO}_{13}/\operatorname{Spin}_7, \\ \mathbf{SO}_{13}/\mathbf{Sp}_3, & \mathbf{SO}_{11}/\mathbf{SU}_5, & \mathbf{SO}_{11}/\mathbf{SU}_4, & \mathbf{SO}_{11}/\mathbf{B}_2^2, \end{array}$$

$\mathrm{SO}_{11}/\mathrm{B}_2^3$,	$\mathrm{SO}_{11}/\mathrm{Sp}_2$,	$\mathrm{SO}_{11}/\mathrm{G}_2$,	$\mathrm{SO}_9/\mathrm{SU}_3$,
$\mathrm{SO}_9/\mathrm{A}_2^3$,	$\mathrm{Sp}_n/\mathrm{Sp}_{n-3}$,	$n \geq 5$,	$\mathrm{Sp}_6/\mathrm{SU}_6$,
$\mathrm{Sp}_6/\mathrm{C}_3^2$,	$\mathrm{Sp}_5/\mathrm{SU}_5$,	$\mathrm{Sp}_5/\mathrm{SU}_4$,	$\mathrm{Sp}_5/\mathrm{SO}_5$,
$\mathrm{Sp}_5/\mathrm{C}_2^2$,	$\mathrm{Sp}_4/\mathrm{SU}_3$,	$\mathrm{SO}_{2n}/\mathrm{SO}_{2n-4}$,	$n \geq 5$,
$\mathrm{SO}_{2n}/\mathrm{SO}_{2n-5}$,	$n \geq 5$,	$\mathrm{SO}_{14}/\mathrm{SU}_7$,	$\mathrm{SO}_{12}/\mathrm{SU}_6$,
$\mathrm{SO}_{12}/\mathrm{Spin}_7$,	$\mathrm{SO}_{12}/\mathrm{Sp}_3$,	$\mathrm{SO}_{10}/\mathrm{SU}_4$,	$\mathrm{SO}_{10}/\mathrm{B}_2^2$,
$\mathrm{SO}_{10}/\mathrm{B}_2^3$,	$\mathrm{SO}_{10}/\mathrm{Sp}_2$,	$\mathrm{SO}_{10}/\mathrm{G}_2$,	$\mathrm{SO}_8/\mathrm{SU}_3$,
$\mathrm{SO}_8/\mathrm{A}_2^3$,	$\mathrm{E}_8/\mathrm{E}_7$,	$\mathrm{E}_7/\mathrm{SO}_{12}$,	$\mathrm{E}_7/\mathrm{SO}_{11}$,
$\mathrm{E}_7/\mathrm{E}_6$,	$\mathrm{E}_7/\mathrm{F}_4$,	$\mathrm{E}_6/\mathrm{SU}_6$,	$\mathrm{E}_6/\mathrm{SO}_9$,
$\mathrm{E}_6/\mathrm{C}_4 (\mathrm{C}_4 \cong \mathrm{Sp}_4/\{\pm 1\})$,		$\mathrm{F}_4/\mathrm{SU}_4$,	$\mathrm{F}_4/\mathrm{SU}_3$,
$\mathrm{F}_4/\mathrm{Sp}_2$.			

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что все пространства, указанные в формулировке теоремы, имеют ранг 3. Единственный затруднительный случай – пространство $\mathrm{E}_6/\mathrm{C}_4$. Здесь имеются включения $\mathrm{C}_4 \subset \mathrm{E}_6 \subset \mathrm{E}_7$ и $\mathrm{C}_4 \subset \mathrm{A}_7 \subset \mathrm{E}_7$, где $\mathrm{A}_7 \cong \mathrm{SU}_8/\{\pm 1\}$ (см. [3]). Отсюда уже видно, что действительно $\mathrm{rk} \mathrm{E}_6/\mathrm{C}_4 = 3$ (строение подгруппы C_4 и других вычисляется при помощи результатов работы [7]).

Пусть H не проста. Тогда имеет место локально прямое разложение $H = H_0 H_1$, где H_0 проста и $h(H_0) \geq h(H_1)$. Рассмотрим случай группы G типа A_n . Тогда $h(H_0) \geq n - 3$, так как в противном случае $\mathrm{rk} M > 3$. Используя известные факты о размерностях неприводимых представлений простых алгебр Ли, нетрудно установить, что H_0 не может быть особой группой. Поэтому H_0 – группа типа либо A_m , $m \geq n - 3$, либо B_m , $2m + 2 \geq n$, либо C_m , $2m + 2 \geq n$, либо D_m , $2m \geq n$. Кроме того, ясно, что $n \leq 7$ для B_m , C_m и $n \leq 9$ для D_m , а если H_0 типа A_m , то или $m = n - 3$ и подгруппа регулярна, или $n = 4, 5, 6$. Отсюда видно, что могут быть только случаи, указанные в формулировке теоремы. Для групп G других типов доказательство аналогично.

Пусть теперь $G = G_1 \times G_2$. Обозначим через H_i компоненту единицы группы $H \cap G_i$, $i = 1, 2$. Рассматриваем только неразложимый случай, т.е. считаем, что $G/H \neq G_1/H_1 \times G_2/H_2$. Существует такая связная нормальная подгруппа H_{12} , что $H = (H_1 \times H_2)H_{12}$ (локально прямое произведение). Проекции $p_i: G \rightarrow G_i$ индуцируют гомоморфизмы $H_{12} \rightarrow G_i$ с дискретными ядрами. Мы допускаем, что группы G_1 и G_2 не обязаны быть простыми.

Напомним, что транзитивное действие компактной группы Ли G на многообразии M называется *неприводимым*, если никакая собственная нормальная подгруппа группы G не транзитивна на M .

ТЕОРЕМА 3. Пусть G_1 и G_2 – связные односвязные компактные группы Ли, $G = G_1 \times G_2$, H – связная полупростая подгруппа Ли в G , причем $H_{12} \neq \{e\}$, $\mathrm{rk} G/H = 3$ и G действует на G/H неприводимо. Тогда пара (G, H) локально изоморфна (с точностью до перенумерации G_1 и G_2) паре одного из следующих типов:

- 1) $\mathrm{rk} G_1/H_1 = 2$, $\mathrm{rk} G_2/H_2 = 1$, $H_1, H_2 \neq \{e\}$, H_{12} – группа типа A_1 ;
- 2) $\mathrm{rk} G_1/H_1 = 2$, $H_1 \neq \{e\}$, $\mathrm{rk} G_2 = 2$, G_2 проста, H_{12} – группа типа A_1 , $H_2 = \{e\}$;
- 3) $\mathrm{rk} G_1/H_1 = 1$, $\mathrm{rk} G_2 = 3$, G_2 проста, H_{12} – группа типа A_1 , $H_2 = \{e\}$;
- 4) $\mathrm{rk} G_1 = \mathrm{rk} G_2 = 2$, G_1 и G_2 просты, H_{12} – группа типа A_1 , $H_1 \cong H_2 = \{e\}$;

- 5) $\operatorname{rk} G_1/H_1 = 2$, $\operatorname{rk} G_1 \geq 3$, $\operatorname{rk} G_2 = 2$, G_2 проста, H_{12} локально изоморфна $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$;
- 6) $\operatorname{rk} G_1 = 3$, $\operatorname{rk} G_2 = 2$, G_1 и G_2 просты, $H = H_{12}$ локально изоморфна $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$, кроме случая $H \subset G' = G'_1 \times G_2 \subset G_1 \times G_2$, $\operatorname{rk} G'/H = 3$;
- 7) $G = \mathbf{Sp}_2 \times \mathbf{Sp}_2$, $H = H_{12}$ локально изоморфна $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$;
- 8) $G = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_2$, $H = H_{12}$ локально изоморфна $\mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2$, причем H_{12} образ такого гомоморфизма $\varphi: \mathbf{SU}_2 \times \mathbf{SU}_2 \rightarrow G$, что $p_1 \circ \varphi = \varphi \circ p_2$;
- 9) $\operatorname{rk} G_1/H_1 = 2$, $\operatorname{rk} G_2 = 3$, H_{12} локально изоморфна $\mathbf{Sp}_2$;
- 10) $G = \mathbf{SU}_4 \times \mathbf{G}_2$, $H = H_{12}$ локально изоморфна $\mathbf{SU}_3$;
- 11) $G = \mathbf{SU}_5 \times \mathbf{G}_2$, $H_1 \cong \mathbf{SU}_2$, H_{12} локально изоморфна $\mathbf{SU}_3$;
- 12) $G = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_2$, $H = H_{12}$ локально изоморфна $\mathbf{SU}_3$.

5. Когомологии некоторых однородных пространств с нулевым подпространством Самельсона. Рассмотрим однородное пространство $M = G/H$, где G – простая компактная связная группа Ли, H – ее связная простая неабелева подгруппа коранга 1. Такая подгруппа всегда замкнута. Локальная классификация пространств G/H получена в [8]. Пространства рангов 1 и 2 указаны в таблицах 10 и 11 книги [1]. Пространства

$$\mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SU}_n \quad \text{и} \quad \mathbf{Sp}_n/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 5,$$

имеют ранг $[(n+1)/2]$, пространства

$$\mathbf{SO}_{2n}/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 6,$$

– ранг $[n/2]$. Ранги пространств

$$\mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{SO}_{12}, \quad \mathbf{F}_4/\mathbf{SU}_4$$

равны 3. Наконец,

$$\operatorname{rk} \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15} = 4, \quad \operatorname{rk} \mathbf{E}_7/\mathbf{SU}_7 = \operatorname{rk} \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14} = 5, \quad \operatorname{rk} \mathbf{E}_8/\mathbf{SU}_8 = \operatorname{rk} \mathbf{E}_8/\mathbf{A}_7 = 6.$$

Здесь $\mathbf{SU}_8 \subset \mathbf{SO}_{16} \subset \mathbf{E}_8$, $\mathbf{A}_7 \subset \mathbf{E}_7 \subset \mathbf{E}_8$.

Изучим когомологии пространства M . Это пространство может иметь дефект 0 или 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Выполнено $\operatorname{df} M = 1$ в точности в указанных случаях для M :*

$$\begin{aligned} &\mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 5, \quad \mathbf{Sp}_n/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 5, \quad \mathbf{SO}_{2n}/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 6, \\ &\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}, \quad \mathbf{E}_8/\mathbf{SU}_8, \quad \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{SU}_7, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространства ранга 1 и 2 имеют нулевой дефект (см. [1], следствие из предложения 13.1). Рассмотрим однородное пространство $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7$. Из теоремы 1 следует, что алгебра $H(M, \mathbb{R})$ изоморфна алгебре когомологий дифференциальной градуированной алгебры (C, d) , где $C = \Lambda(u_{39}, u_{47}, u_{59}) \otimes \mathbb{R}[v_{12}, v_{20}]$ и дифференцирование (по соображениям размерности) таково:

$$du_{39} = av_{20}^2, \quad du_{47} = bv_{12}^4, \quad du_{59} = cv_{20}^3 + dv_{12}^5, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Здесь и далее индексы обозначают размерности. Вычисляя многочлен Пуанкаре на основании предложения 13.3 из [1], видим, что $H^{2i+1}(M, \mathbb{R}) = 0$ при $i = 19, 23$. Значит, $ab \neq 0$ и

$$H(\mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7, \mathbb{R}) \cong \Lambda(x_{59}) \otimes \mathbb{R}[y_{12}]/(y_{12}^4) \otimes \mathbb{R}[y_{20}]/(y_{20}^2).$$

Аналогично вычисляется, что

$$\begin{aligned} H(\mathbf{E}_7/\mathbf{SO}_{12}, \mathbb{R}) &\cong \Lambda(x_{35}) \otimes \mathbb{R}[y_8, y_{12}]/(y_{12}^2 + y_8^3, y_8^2 y_{12}), \\ H(\mathbf{E}_6/\mathbf{SU}_6, \mathbb{R}) &\cong \Lambda(x_{23}) \otimes \mathbb{R}[y_6]/(y_6^3) \otimes \mathbb{R}[y_8]/(y_8^2), \\ H(\mathbf{F}_4/\mathbf{SU}_4, \mathbb{R}) &\cong \Lambda(x_{23}) \otimes \mathbb{R}[y_6]/(y_6^2) \otimes \mathbb{R}[y_8]/(y_8^2). \end{aligned}$$

Дефекты пространств

$$\begin{aligned} \mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 5, \quad \mathbf{Sp}_n/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 5, \quad \mathbf{SO}_{2n}/\mathbf{SU}_n, \quad n \geq 6, \\ \mathbf{E}_8/\mathbf{SU}_8, \quad \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{SU}_7, \quad \mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6 \end{aligned}$$

равны 1 (см. [9; теорема 4]). Дефекты пространств $\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}$ и $\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}$ равны. Наконец, $\text{df } \mathbf{E}_8/\mathbf{A}_7 = 0$, так как $\mathbf{A}_7 \subset \mathbf{E}_7$, а $\text{df } \mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7 = 0$.

Напомним, что градуированная алгебра H называется *разложимой*, если $H = A \otimes B$, где A и B – нетривиальные градуированные подалгебры. Как мы видели, характеристические подалгебры ${}_0H(M, \mathbb{R})$ для $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_6/\mathbf{SU}_6$ и $\mathbf{F}_4/\mathbf{SU}_4$ разложимы. Таким образом, гипотеза, высказанная в [1; с. 331], оказалась неверна. Тем не менее, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Алгебры $H(M, \mathbb{R})$ и ${}_0H(M, \mathbb{R})$ для пространств M , перечисленных в формулировке предложения 1, неразложимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неразложимость алгебры ${}_0H(M, \mathbb{R})$.

1) *Случай $M = \mathbf{Sp}_n/\mathbf{SU}_n$.* Пусть для определенности $n = 4m$. Как нетрудно вычислить, в алгебре ${}_0H(M, \mathbb{R})$ можно выбрать такую систему образующих $y_6, y_{10}, \dots, y_{8m-2}$, что соотношение минимальной степени примет вид

$$y_{8m-2}y_6 + y_{8m-6}y_{10} + \dots + y_{4m+2}^2 + \dots = 0, \quad (5)$$

(слагаемые, представляющие собой произведение более чем двух образующих, опущены). Предположим, что ${}_0H(M, \mathbb{R}) = A \otimes B$, где подалгебра A нетривиальна и неразложима. Можно считать, что $y_6 = a_6 \otimes 1$. Если подалгебра B содержит образующую b_{8m-2} , то из (5) получаем $a_6 \otimes b_{8m-2} = 0$. Значит, подалгебра A содержит образующую степени $8m-2$. Аналогичное рассуждение показывает, что A содержит по одной образующей каждой из степеней $6, 10, \dots, 8m-2$. Поэтому подалгебра B тривиальна и ${}_0H(M, \mathbb{R})$ неразложима.

2) *Случай $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}$ и $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}$.* Многочлен Пуанкаре пространства $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}$ вычисляется на основании предложения 13.3 из [1]. Он имеет вид

$$P(M, t) = P_0(M, t) + t^{157}P_0(M, t^{-1}),$$

где

$$\begin{aligned} P_0(M, t) = (1 + t^{14})(1 + t^8 + t^{12} + t^{16} + 2t^{20} + 2t^{24} + 2t^{28} + 3t^{32} \\ + 2t^{36} + 3t^{40} + 3t^{44} + 2t^{48} + 3t^{52} + 2t^{56} + t^{60} + 2t^{64}). \end{aligned}$$

Рассмотрим расслоение

$$\mathbf{S}^{14} \rightarrow \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14} \rightarrow \mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}.$$

Его спектральная последовательность тривиальна по соображениям размерности; поэтому

$$P(\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}, t) = (1 + t^{14})P(\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}, t).$$

Поскольку $P_0(\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}, 1) = 62 = 2 \cdot 31$, а 31 – простое число, алгебра ${}_0H(\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}, \mathbb{R})$ неразложима. Чтобы доказать неразложимость алгебры ${}_0H(\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{14}, \mathbb{R})$ остается только проверить, что $y_{14}^2 \neq 0$, если $y_{14} \neq 0$. Но это легко следует из (3) и (4).

3) Случай $M = \mathbf{E}_8/\mathbf{SU}_8$. Из формулы (2), выражая степенные суммы через элементарные симметрические многочлены, видим, что можно так выбрать образующие $y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}$, чтобы соотношения между ними приняли вид

$$y_{14}y_{10} + y_{12}^2 + \dots = 0, \quad y_{10}^2y_8 + \dots = 0, \quad y_{10}^3y_6 + \dots = 0.$$

Отсюда легко выводится неразложимость.

4) Случай $M = \mathbf{E}_7/\mathbf{E}_6$. Характеристическая подалгебра порождена элементами y_{10}, y_{18} , между которыми есть соотношение $y_{18}y_{10} = 0$. Отсюда следует неразложимость.

5) Случай $M = \mathbf{E}_7/\mathbf{SU}_7$. Из формулы (1), выражая степенные суммы через элементарные симметрические многочлены, получаем соотношения между образующими y_6, y_8, y_{10}, y_{14} :

$$y_{10}y_6 + y_8^2 + \dots = 0, \quad y_{14}y_6 + y_{10}^2 + \dots = 0,$$

откуда и следует неразложимость.

Докажем неразложимость алгебры $H(M, \mathbb{R})$. Если $H(M, \mathbb{R}) = A \otimes B$, где подалгебра A нетривиальна и неразложима, то предыдущее рассуждение показывает, что можно считать все четномерные образующие лежащими в A . Рассмотрим теперь нечетномерные образующие. Их степени больше половины размерности, и есть хотя бы две такие образующие. В самом деле, пусть M отлично от $\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}$. Тогда его многочлен Пуанкаре вычисляется на основании предложения 13.3 из [1]. Если есть только одна образующая z_{2i+1} нечетной размерности, то, как легко видеть,

$$H(M, \mathbb{R}) \cong {}_0H(M, \mathbb{R}) \otimes \Lambda(z_{2i+1}) \quad \text{и} \quad \text{df } M = 0.$$

Для пространства $\mathbf{E}_8/\mathbf{SO}_{15}$ все сказанное также, очевидно, справедливо. Если z_{2i+1} и t_{2j+1} – две образующие нечетных степеней, то $z_{2i+1}t_{2j+1} = 0$ по соображениям размерности. Поэтому все нечетномерные образующие алгебры $H(M, \mathbb{R})$ лежат либо в A , либо в B . Во втором случае ввиду двойственности Пуанкаре найдется элемент $a_{2m} \otimes 1$ со свойством $a_{2m} \otimes z_{2i+1} = 0$, что неверно. Значит, B тривиальна и $H(M, \mathbb{R})$ неразложима, как и требовалось.

6. О транзитивных действиях на некоторых однородных пространствах с нулевым подпространством Самельсона. После сделанных приготовлений мы можем классифицировать транзитивные действия на произведении однородных пространств, указанных в формулировке предложения 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$M = G_1/H_1 \times \cdots \times G_s/H_s,$$

где G_i – простые компактные связные односвязные группы Ли, H_i – простые связные подгруппы Ли коранга 1, причем

$$\mathrm{df} G_i/H_i = 1, \quad i = 1, \dots, s.$$

Пусть $M' = G'/H'$, где G' – компактная связная односвязная группа Ли, H' – ее связная подгруппа Ли, не содержащая нетривиальных связных нормальных подгрупп группы G' , и $H(M, \mathbb{R}) \cong H(M', \mathbb{R})$. Тогда

$$G' = G'_1 \times \cdots \times G'_s, \quad H' = H'_1 \times \cdots \times H'_s,$$

G'_j и H'_j просты, $H'_j \subset G'_j$, $j = 1, \dots, s$, и

$$H(G_i/H_i, \mathbb{R}) \cong H(G'_i/H'_i, \mathbb{R}), \quad i = 1, \dots, s,$$

после подходящей перенумерации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Топологические инварианты $r_j(M)$ однозначно определяются алгеброй $H(M, \mathbb{R})$ и $r_j(M) = r_j(M')$ при всех $j \geq 1$. Для каждого из $M_i = G_i/H_i$ числа $r_j(M_i)$ вычисляются на основании теоремы 1. Инвариант $\chi_\pi(M)$ также зависит только от $H(M, \mathbb{R})$.

Пусть $G' = G'_1 \times \cdots \times G'_r$, $H' = H'_1 \cdots H'_t$ (локально прямое произведение), G'_j и H'_l просты. Обозначим через p_i композицию вложения $H' \rightarrow G'$ и проекции $G' \rightarrow G'_i$. Так как $H^i(M, \mathbb{R}) = 0$ при $i = 3, 4$, то $t = r$ и для каждого $j = 1, \dots, r$ имеем $p_j(H'_j) \neq \{e\}$ после подходящей перенумерации групп H'_j . Обозначим $N'_j = G'_j/p_j(H'_j)$. Мы хотим доказать, что

$$G'/H' = M'_1 \times \cdots \times M'_s, \quad \text{где } M'_j = G'_j/H'_j.$$

Неразложимость алгебр $H(M_i, \mathbb{R})$ и единственность разложения в тензорное произведение неразложимых подалгебр (см. [1; теорема 6.1]) дадут тогда утверждение теоремы.

Покажем, что нет пар (G'_j, H'_j) с условием $h(G'_j) = h(H'_j)$. Можно считать, что $G'_j \neq H'_j$. Пространство N'_j с данным условием подобно одному из пространств:

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}_{2n}/\mathrm{Sp}_n, \quad n \geq 2, \quad \mathrm{SO}_7/\mathrm{G}_2, \quad \mathrm{SO}_{2n}/\mathrm{SO}_{2n-1}, \quad n \geq 4, \\ \mathrm{SO}_8/\mathrm{G}_2, \quad \mathrm{E}_6/\mathrm{F}_4 \end{aligned}$$

(см. [1; таблица 7]). При этом $Q(N'_j) \neq 0$. Так как $p_j(H'_t) = \{e\}$ при $t \neq j$, то и $Q(M') \neq 0$, что неверно.

Заметим, что среди G'_i нет групп типа A_n . Пусть, напротив, G'_j типа A_{2m} . Тогда $h(H'_j) < 2m$ и $r_{4m+1}(M') \neq 0$, но $r_{4m+1}(M) = 0$. Если G'_j типа A_{2m-1} , $h(H'_j) < 2m-2$, то $r_{4m-3}(M') \neq 0$, что невозможно. Если же $h(H'_j) = 2m-2$, то H'_j – регулярная подгруппа типа A_{2m-2} и $Q(M') \neq 0$.

Можно считать, что $h(G_1) \geq \cdots \geq h(G_s)$. Пусть $H(M_1, \mathbb{R})$ изоморфна алгебре $H(\mathrm{Sp}_n/\mathrm{SU}_n, \mathbb{R})$, $n \geq 15$. Пусть $n = 2m$, случай $n = 2m-1$ проще. Имеем

$r_{8m-1}(M) \neq 0$, $r_{2i+1}(M) = 0$ при $i \geq 4m$ и $r_{4m-2}(M) \neq 0$, $r_{2i+2}(M) = 0$ при $i \geq 2m-1$. Значит, среди H'_j есть группа либо типа A_l , $l \geq 2m-2$, либо типа D_{2m-1} . Пара (G'_j, H'_j) может иметь тип

$$\begin{array}{lll} (B_{2m}, A_{2m-1}), & (B_{2m}, A_{2m-2}), & (B_{2m-1}, A_{2m-2}), \\ (B_{2m}, D_{2m-1}), & (B_{2m-1}, D_{2m-1}), & (C_{2m}, A_{2m-1}), \\ (C_{2m}, A_{2m-2}), & (C_{2m-1}, A_{2m-2}), & (D_{2m+1}, A_{2m}), \\ (D_{2m}, A_{2m-1}), & (D_{2m}, A_{2m-2}), & (D_{2m}, D_{2m-1}). \end{array}$$

Пусть $p_i(H'_j) \neq \{e\}$ при $i \neq j$ для группы H'_j одного из указанных типов. Как легко вычислить, тогда $Q(M') \neq 0$, что неверно. Значит, $H'_j \subset G'_j$. Далее, имеем $p_j(H'_t) = \{e\}$ при $t \neq j$, кроме случаев

$$(B_{2m}, A_{2m-2}), \quad (B_{2m}, D_{2m-1}), \quad (C_{2m}, A_{2m-2}).$$

Если для этих пар $p_j(H'_t) \neq \{e\}$, то $\text{rk } H'_t = 1$. Поскольку $H^4(M', \mathbb{R}) = 0$, отсюда легко вывести, что $Q(M') \neq 0$. Так как $Q(M) = 0$, то всегда $p_j(H'_t) = \{e\}$. Но тогда и подавно $Q(M') \neq 0$. Значит, эти случаи в действительности невозможны. Точно так же невозможны и случаи пар

$$(B_{2m}, D_{2m-1}), \quad (D_{2m}, D_{2m-1}), \quad (D_{2m}, A_{2m-2}).$$

Итак, мы можем считать, что $j = 1$,

$$M' = M'_1 \times \widetilde{M}'_1, \quad \text{где} \quad \widetilde{M}'_1 = (G'_2 \times \cdots \times G'_r) / H'_2 \cdots H'_r.$$

Так как алгебра $H(M'_1, \mathbb{R})$ неразложима, имеем

$$H(M'_1, \mathbb{R}) \cong H(M_1, \mathbb{R}), \quad H(\widetilde{M}'_1, \mathbb{R}) \cong H(M_2 \times \cdots \times M_s, \mathbb{R})$$

(см. [1; теорема 6.1]).

Далее можно ограничиться случаем, когда $h(G_1) \leq 29$. Заметим, что для каждого из пространств M_i имеем $r_{10}(M_i) + r_{20}(M_i) = 1$. Поэтому $r_{10}(M) + r_{20}(M) = s$. Значит, и $r_{10}(M') + r_{20}(M') = s$. Если H'_j для некоторого j есть подгруппа типа A_m , $m \geq 9$, или D_{10} , то $p_j(H'_j)$ – регулярная подгруппа в G'_j , так как $\text{rk } G'_j \leq 15$. Из теоремы 1 вытекает, что $r_{20}(M')$ не превосходит суммы числа подгрупп H'_j типов

$$B_m, \quad m \geq 5, \quad C_m, \quad m \geq 5, \quad D_m, \quad m \geq 6, \quad E_7.$$

Число же $r_{10}(M')$ не превосходит суммы числа подгрупп H'_j типов

$$A_m, \quad m \geq 4, \quad D_5, \quad E_6.$$

Таким образом, $r \geq s$.

Пусть

$$\text{rk } H'_j = \text{rk } G'_j \quad \text{для некоторого } j.$$

Если $H'_j \subset G'_j$, то $H(M'_j, \mathbb{R}) \cong H(M_i, \mathbb{R})$ для некоторого i , что неверно. Значит, $p_t(H'_j) \neq \{e\}$ для некоторого $t \neq j$. Но тогда $-\chi_\pi(M') > s = -\chi_\pi(M)$. Следовательно, для всех j имеем $\text{rk } H'_j < \text{rk } G'_j$ и равенство $-\chi_\pi(M) = s$ возможно лишь в случае, когда H'_j – подгруппа коранга 1 в G'_j и

$$G'/H' = G'_1/H'_1 \times \cdots \times G'_s/H'_s,$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, $H(M, \mathbb{Z}_2) \cong H(M', \mathbb{Z}_2)$. Тогда

$$M' = G'_1/H'_1 \times \cdots \times G'_s/H'_s$$

и после подходящей перенумерации G_i/H_i диффеоморфно G'_i/H'_i , $i = 1, \dots, s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем по доказанному $M' = M'_1 \times \cdots \times M'_s$. Остается проверить, что если среди M_i есть пространства Q_n , определенные парами (C_n, A_{n-1}) , n принимает значения $m_1, m_2, \dots$, где $m_1 \leq m_2 \leq \dots$, и есть пространства R_n , определенные парами (B_n, A_{n-1}) , n принимает значения $n_1, n_2, \dots$, где $n_1 \leq n_2 \leq \dots$, и аналогично определены $m'_1, m'_2, \dots$ и $n'_1, n'_2, \dots$, то $m_1 = m'_1$, $n_1 = n'_1$ и т.д. Как нетрудно вычислить, используя результаты [10] и описание графов однородных пространств из [5], многочлены Пуанкаре с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ рассматриваемых пространств таковы:

$$P_2(Q_n, t) = (1 + t^3) \prod_{i=2}^n (1 + t^{2i}), \quad P_2(R_n, t) = P(R_n, t).$$

Многочлен $P(R_n, t)$ вычисляется на основании предложения 13.3 из [1]. Поэтому $n_1 = n'_1$, и далее по индукции.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $M = G_1/H_1 \times \cdots \times G_s/H_s$ такое же, как в формулировке теоремы 4, и пусть G' – компактная связная односвязная группа Ли, транзитивно и локально эффективно действующая на M . Тогда ограничение действия G' на G_i/H_i локально подобно действию G_i , либо же G_i/H_i локально диффеоморфно $\mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SU}_n$, а ограничение действия G' локально подобно действию $\mathbf{SO}_{2n+1}$ или $\mathbf{SO}_{2n+2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу же следует из того, что пространства $\mathbf{SO}_{2n+1}/\mathbf{SU}_n$ и $\mathbf{SO}_{2n+2}/\mathbf{SU}_{n+1}$ диффеоморфны (см. [1; таблица 8]).

Автор благодарен А.Л. Онищику за полезное обсуждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Физматлит, М., 1995.
- [2] В.Г. Мхитарян, “Некоторые однородные пространства особых групп Ли”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1985, 116–121.
- [3] Е.Б. Дынкин, “Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли”, *Матем. сб.*, **30:2** (1952), 349–462.
- [4] Доан Куинь, “Полиномы Пуанкаре компактных однородных римановых пространств с неприводимой стационарной группой”, *Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике*, Вып. 14, Изд-во МГУ, М., 1968, 33–93.
- [5] А.Н. Шетинин, “О факторпространствах компактных групп Ли по централизаторам торов”, *Матем. заметки*, **82:2** (2007), 293–304.
- [6] Е.Б. Дынкин, “Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли”, *Матем. сб.*, **35:1** (1954), 129–173.
- [7] Е.Б. Дынкин, А.Л. Онищик, “Компактные группы Ли в целом”, *УМН*, **10:4** (1955), 3–74.

- [8] В. Г. Мхитарян, “Подалгебры коранга 1 компактных алгебр Ли”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1982, 119–126.
- [9] А. Л. Онищик, “О топологии некоторых комплексных однородных пространств”, *Многомерный комплексный анализ*, Ин-т физики СО АН СССР, Красноярск, 1985, 109–121.
- [10] И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3 (1973), 3–26.

А. Н. Щетинин

Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана

E-mail: alex1621@bk.ru

Поступило

20.03.2008

Исправленный вариант

23.01.2009