Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Шур, Квазифеллеровские расширения марковских цепей и существование двойственных цепей, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 1, 133–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm490>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:30:38

УДК 519.217.2

КВАЗИФЕЛЛЕРОВСКИЕ РАСШИРЕНИЯ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЦЕПЕЙ

М. Г. Шур

Предложен исправленный и детализированный вариант теоремы автора о существовании феллеровских расширений марковских цепей, для чего использовано более широкое понятие квазифеллеровского расширения. Из этого результата выводится существование марковских цепей, двойственных цепям с борелевскими пространствами состояний. Наиболее подробно изучены расширения неприводимых в смысле Ори цепей. К примеру, показано, что для таких цепей квазифеллеровские расширения можно выбрать возвратными или лиувиллевыми, коль скоро таковыми являются исходные цепи.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. В теореме 1 работы [1] обсуждался вопрос о построении феллеровских расширений цепей Маркова, заданных в сепарабельных измеримых пространствах состояний. Доказательство указанной теоремы, будучи вполне корректным в важном случае борелевских пространств (определение см. в п. 2), в общем случае неудовлетворительно. Это побудило нас вернуться к той же проблематике, одновременно несколько изменив определение расширения цепи и включив в рассмотрение квазифеллеровские расширения.

В теореме 1 предлагаемой работы с помощью теоремы Стоуна–Вейерштрасса установлено существование таких расширений, что позволило легко доказать существование цепей, двойственных, в частности, цепям Маркова с борелевскими пространствами состояний (см. теорему 2 и замечание 3). Заключительная часть работы (шп. 5, 6) отведена расширениям неприводимых цепей. Несколько ограничив в этом случае свободу выбора расширений (см. условие (III)), мы обнаруживаем в теореме 4, что соответствующие расширения сохраняют неприводимость, а их параметры сходимости совпадают с таковыми для исходных цепей. Кроме того, соответствующие расширения наследуют свойства типа возвратности или лиувиллевости (теоремы 5 и 6). Попутно обсуждается связь между классами минорантных множеств в исходных и компактных множествах в расширенных пространствах состояний (см. теорему 3, прообразом которой служит теорема 2 из [1]).

В одной из ближайших работ автор намерен показать, как указанные результаты помогают получить новые предельные теоремы для отношений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-529.

2. Основные обозначения и терминология. Остановимся на обозначениях и терминологии основной части работы (пп. 1–4) (специфика случая неприводимых цепей отражена в добавлении (п. 6)).

На протяжении работы фиксируется измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$, удовлетворяющее условию

(I) σ -алгебра $\mathcal{B}$ является сепарабельной и содержит все одноточечные множества в E .

Важным примером такого пространства служит *борелевское* (в иной терминологии – *лузинское*) *пространство*, являющееся, по определению, изоморфным $(E_0, \mathcal{B}_0)$, где E_0 – борелевское множество в некотором полном сепарабельном метрическом пространстве M , а $\mathcal{B}_0$ – семейство всех борелевских подмножеств этого множества. Символ $\mathcal{B}$ будет обозначать также совокупность всех измеримых функций $f: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, а под $\mathcal{B}_+$ (соответственно $b\mathcal{B}$) будет пониматься ее часть, образованная неотрицательными (ограниченными) элементами. Иногда будет удобным обозначение $\mu(f) = \int f d\mu$, если указанный интеграл имеет смысл, где f – функция на E , а μ – мера на $\mathcal{B}$. Аналогичные соглашения действуют и в случае других измеримых пространств.

В $(E, \mathcal{B})$ задается (однородная) цепь Маркова $X = \{X_n; n \geq 0\}$ с субмарковской переходной вероятностью $p(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и переходным оператором P , действующим либо в $\mathcal{B}_+$, либо в $b\mathcal{B}$ (см. [2], [3]). Точку $x_0 \in E$ назовем *эфимерной*, если $p(x_0, E) = 0$ и $p(\cdot, \{x_0\}) \equiv 0$. При ее наличии разумно E заменить на $E' = E \setminus \{x_0\}$, $\mathcal{B}$ – на след $\mathcal{B}'$ σ -алгебры $\mathcal{B}$ в E' и вместо $p(\cdot, \cdot)$ рассмотреть соответствующее сужение на $(E', \mathcal{B}')$. Последнему отвечает цепь Маркова на $(E', \mathcal{B}')$, называемая *частью* X на E' .

Переходная вероятность цепи X за $n \geq 1$ шагов и порождаемый ею переходный оператор обозначаются $p_n(\cdot, \cdot)$ и P^n соответственно (таким образом, $p_1 \equiv p$). Считая впредь $\alpha \in (0, 1)$ фиксированным, определим для $f \in b\mathcal{B}$ (а также для $f \in \mathcal{B}_+$) оператор G^α :

$$G^\alpha f = f + \sum_{n \geq 1} \alpha^n P^n f. \quad (1)$$

Правая часть (1) с α , замененным на 1, определяет функцию Gf для $f \in \mathcal{B}_+$. Если $Gf \equiv \infty$ для всех $f \in \mathcal{B}_+$, цепь X называют *возвратной*. Она же ν -*неприводима* [2], [3] (ν – σ -конечная мера на $\mathcal{B}$), если $PG(1_A) > 0$ в E для любого A с $\nu(A) > 0$, где 1_A – индикатор множества A (при этом ν именуется мерой, определяющей неприводимость). Цепь X по определению *лиувиллева* (соответственно ν -*лиувиллева*, где снова ν – σ -конечная мера на E), если существует ненулевая σ -конечная инвариантная для X (и одновременно абсолютно непрерывная относительно ν) мера, которой пропорциональны остальные меры указанного вида. Наконец, допустив, что E является локально компактным пространством, а $\mathcal{B}$ – совокупностью его борелевских множеств, назовем цепь X *феллеровской* (*квазифеллеровской* в случае некомпактного E), если P отображает в себя совокупность $C(E)$ всех ограниченных непрерывных в E функций (соответственно всех $f \in C(E)$, стремящихся к 0 на бесконечности). Квазифеллеровская цепь X является феллеровской тогда и только тогда, когда функция $P1$ непрерывна.

Пусть имеется еще одна цепь Маркова $\bar{X}$, реализованная на измеримом пространстве состояний $(\bar{E}, \bar{\mathcal{B}})$, с переходной вероятностью $\bar{p}(\cdot, \cdot)$, и пусть существует измеримая инъекция $\varphi: (E, \mathcal{B}) \rightarrow (\bar{E}, \bar{\mathcal{B}})$. Назовем $\bar{X}$ расширением цепи X , отвечающим φ , если $\varphi(E)$ плотно в $\bar{E}$ и при любом $x \in E$ мера $\bar{p}(\varphi(x), \cdot)$ является образом меры $p(x, \cdot)$

(т.е. $\bar{p}(\varphi(x), A) = p(x, \varphi^{-1}(A))$ для $x \in E$ и $A \in \overline{\mathcal{B}}$). Это определение равносильно использованному в [1], если пространства $(E, \mathcal{B})$ и $(\overline{E}, \overline{\mathcal{B}})$ являются борелевскими.

3. Существование квазифеллеровских расширений. Конструкции феллеровских расширений цепей Маркова, основанные на идеях Стоуна–Чеха или теории банаховых алгебр, обычно приводят к чрезмерному разрастанию исходного пространства состояний [4]. В [1] была предложена более экономная конструкция, позволившая при условии (I) строить феллеровские расширения в метрических компактах. Возвращаясь к ней, мы приводим в этом пункте теорему 1 – исправленный и детализированный вариант теоремы 1 из [1], используя при доказательстве ту же идею Ф. Найта [5], что и прежде.

Будем говорить, что функции $h_n \in b\mathcal{B}$, $n \geq 1$, образуют *допустимый набор*, если они, во-первых, разделяют точки в E (т.е. если для любых $x, y \in E$ ($x \neq y$) найдется $n \geq 1$, при котором $h_n(x) \neq h_n(y)$), и во-вторых, порождают $\mathcal{B}$. Например, индикаторы $u_n = 1_{A_n}$ множеств A_n , $n \geq 1$, порождающих $\mathcal{B}$ (см. условие (I)), образуют требуемый набор. В самом деле, пусть $u_n(x) = u_n(y)$ при $n \geq 1$ и некоторых фиксированных $x, y \in E$ ($x \neq y$). Ясно, что σ -алгебра $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$, составленная из всех $A \in \mathcal{B}$, содержащих или нет сразу обе выбранные точки, включает в себя любое множество вида $\{z \in E : u_n(z) < d\}$, $n \geq 1$, $d \in \mathbb{R}$, а потому функции u_n измеримы относительно $\mathcal{B}_0$. Так как они порождают $\mathcal{B}$, то $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$, вопреки тому, что одноточечное множество $\{x\}$ входит в $\mathcal{B}$, но не в $\mathcal{B}_0$. Это противоречие и свидетельствует о допустимости указанного набора.

Фиксируем до конца пункта допустимый набор $H_0 = \{h_n; n \geq 1\}$.

ЛЕММА 1. *Существует алгебра функций $\mathfrak{A} \subset b\mathcal{B}$, инвариантная относительно P , разделяющая точки в E и содержащая H_0 и некоторое не более чем счетное плотное в ней (в топологии равномерной сходимости) подмножество. Более того, $\mathfrak{A}$ можно считать наименьшей среди всех алгебр в $b\mathcal{B}$, обладающих указанными свойствами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого семейства $H \subset b\mathcal{B}$ образуем наименьшую алгебру (над полем $\mathbb{R}$) $\mathfrak{A}H \subset b\mathcal{B}$, содержащую H . Алгебры H_n , $n \geq 1$, определим последовательно, полагая $H_n = \mathfrak{A}(H_{n-1} \cup PH_{n-1})$, где PH_{n-1} – образ H_{n-1} при действии P . Легко проверяется (см. [1, с. 498]), что алгебра $\mathfrak{A} = \bigcup_{n \geq 0} H_n$ является искомой.

Для дальнейшего существенно, что каждая функция вида $G^\alpha h_n$, $n \geq 1$, лежит в равномерном замыкании алгебры $\mathfrak{A}$.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют метрический компакт $\overline{E} \supset E$ и измеримое отображение $\varphi: (E, \mathcal{B}) \rightarrow (\overline{E}, \overline{\mathcal{B}})$, где $\overline{\mathcal{B}}$ – борелевская σ -алгебра в $\overline{E}$, со следующими свойствами:*

- а) множество $E = \varphi(E)$ плотно в $\overline{E}$ и любая функция f , входящая в равномерное замыкание алгебры $\mathfrak{A}$ (см. лемму 1), допускает единственное продолжение $\bar{f} \in C(\overline{E})$; при этом в $\overline{E}$ имеется не более одной такой точки Δ , что $\overline{G^\alpha h_n}(\Delta) = 0$ при всех $n \geq 1$;
- б) в $(\overline{E}, \overline{\mathcal{B}})$ задано расширение $\overline{X}$ исходной цепи Маркова X , причем справедлива альтернатива: либо указанная точка Δ не существует и тогда $\overline{X}$ является феллеровской цепью Маркова, либо эта точка существует и

тогда она служит эфемерным состоянием для $\overline{X}$, а часть $\hat{X}$ цепи $\overline{X}$ на множестве $\hat{E} = \overline{E} \setminus \{\Delta\}$ является квазифеллеровской цепью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{g_n \in \mathfrak{A}; n \geq 1\}$ образует плотное в $\mathfrak{A}$ множество (см. лемму 1). Наделив E метрикой $\rho(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} w[g_n(x) - g_n(y)]$, $x, y \in E$, где положено $w[t] = |t|/(1 + |t|)$ для $t \in \mathbb{R}$, рассмотрим компакт $\overline{E}$, являющийся пополнением полученного метрического пространства. Как и в [1], каждая из функций $f \in \mathfrak{A}$ (а стало быть, и каждая функция из равномерного замыкания алгебры $\mathfrak{A}$), будучи равномерно непрерывной в метрике ρ , обладает единственным продолжением $\bar{f} \in C(\overline{E})$. В частности, определено продолжение $\bar{g}_n \in C(\overline{E})$ для g_n .

Семейство $\{\bar{g}_n\}$ разделяет точки в $\overline{E}$: если $\bar{g}_m(x) = \bar{g}_m(y)$ при всех $m \geq 1$ и некоторых $x, y \in \overline{E}$, а $x_n, y_n \in E$ таковы, что $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$, то $g_m(x_n) - g_m(y_n) \rightarrow 0$ при любом $m \geq 1$, вследствие чего $x = y$. Таким образом, семейство $\overline{\mathfrak{A}} = \{\bar{f} : f \in \mathfrak{A}\}$ является алгеброй непрерывных функций в $\overline{E}$, разделяющей точки, и по теореме Стоуна–Вейерштрасса [6] равномерное замыкание этой алгебры совпадает либо с $C(\overline{E})$ (случай I), либо с $C_0(\overline{E}) = \{f \in C(\overline{E}) : f(x_0) = 0\}$, где x_0 – некоторая точка в $\overline{E}$ (случай II).

Пусть $\mathcal{B}_1$ – след σ -алгебры $\overline{\mathcal{B}}$ на E (таким образом, $\mathcal{B}_1$ состоит из всевозможных пересечений $A \cap E$, $A \in \overline{\mathcal{B}}$). Докажем, что

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}. \quad (2)$$

Сужение на E любой функции из $\overline{\mathfrak{A}}$ $\mathcal{B}$ -измеримо, и потому $\mathcal{B}$ -измеримы сужения на E всех $f \in C(\overline{E})$ (в случае II этот факт вытекает из его справедливости для $f \in C_0(\overline{E})$ и для f , сохраняющих постоянство). Ввиду известной версии теоремы о монотонных классах (см. [7, теорема 1.21]) то же относится и к сужениям любых $f \in b\mathcal{B}$, так что $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$. Обратное же включение очевидно, так как функции h_n , будучи $\mathcal{B}_1$ -измеримыми, порождают $\mathcal{B}$. Итак, (2) доказано, и тем самым установлена измеримость вложения $\varphi: E \rightarrow \overline{E}$, определяемого равенством $\varphi(x) = x$, $x \in E$.

Приступим к определению подходящей переходной вероятности в $(\overline{E}, \overline{\mathcal{B}})$. Пусть f_E обозначает сужение на E функции $f \in \overline{\mathcal{B}}$. Если $f \in \overline{\mathfrak{A}}$, то $P(f_E) \in \mathfrak{A}$ в силу инвариантности $\mathfrak{A}$ относительно P и, следовательно, существует единственное продолжение $\overline{P(f_E)}$ класса $C(\overline{E})$ в случае I или класса $C_0(\overline{E})$ в случае II, когда f берется из $C(\overline{E})$ или $C_0(\overline{E})$ соответственно. Кроме того, $\overline{P(f_E)}(x)$ при фиксированном $x \in \overline{E}$ является ограниченным линейным функционалом в $C(\overline{E})$ (случай I) или $C_0(\overline{E})$ (случай II). Следовательно, в случае I для каждого $x \in \overline{E}$ существует единственная мера $\bar{p}(x, \cdot)$ на $\overline{\mathcal{B}}$ такая, что

$$\overline{P(f_E)}(x) = \int f(y) \bar{p}(x, dy) \quad (3)$$

для $f \in C(\overline{E})$ и $x \in \overline{E}$ (см. [8, § 56, теорема 4]). Применив в случае II эту же теорему к $\hat{E} = \overline{E} \setminus \{x_0\}$, получим для $x \in \hat{E}$ аналогичную меру $\bar{p}(x, \cdot)$ на $\overline{\mathcal{B}}$, сосредоточенную в $\hat{E}$, и положим $\bar{p}(x_0, \cdot) = 0$. Заметим, что из непрерывности функций $\overline{P(f_E)}$ для f из соответствующего класса $C(\overline{E})$ или $C_0(\overline{E})$ и из упоминавшейся версии теоремы о монотонных классах следует $\overline{\mathcal{B}}$ -измеримость функций вида $\bar{p}(\cdot, A)$, $A \in \overline{\mathcal{B}}$.

Переходной вероятности $\bar{p}$ отвечает некоторая цепь Маркова $\bar{X}$ на $(\bar{E}, \bar{\mathcal{B}})$ с переходным оператором $\bar{P}$, являющаяся расширением исходной цепи. Действительно, с учетом (3) для $x \in E$ и $f \in C(\bar{E})$ находим в случае I, что

$$\begin{aligned}\bar{P}f(x) &= \int f(y)\bar{p}(x, dy) = \overline{P(f_E)}(x) = \int f_E(y)p(x, dy) \\ &= \int f(\varphi(y))p(x, dy) = \int f(y)\tilde{p}(x, dy),\end{aligned}\quad (4)$$

где $\tilde{p}(x, \cdot)$ – образ меры $p(x, \cdot)$ при введенном выше отображении φ . Равенство первого и последнего интегралов в (4) остается в силе для всех $f \in b\bar{\mathcal{B}}$ и, следовательно, $\bar{p}(x, \cdot) \equiv \tilde{p}(x, \cdot)$. Оно же сохраняет силу и в случае II, но при дополнительном условии, что $f = 0$ вне некоторой окрестности точки x_0 . Это условие легко ослабляется до требования, чтобы $f(x_0) = 0$, но и новое требование излишне, так как $\bar{p}(x, \{x_0\}) = 0$. Итак, опять $\bar{p}(x, \cdot) \equiv \tilde{p}(x, \cdot)$ для $x \in E$ и $\bar{X}$ является расширением цепи X .

Теперь заметим, что лемма 1.1 из [1], по существу, утверждает, что если существует точка $\Delta \in \bar{E}$, в которой $\overline{G^\alpha h_n}(\Delta) = 0$, $n \geq 1$, то $\bar{f}(\Delta) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{A}$ (следует лишь учесть, что теперь (1.2) из [1] выполняется с $d = 0$). Иными словами, такая точка существует лишь в случае II и совпадает с x_0 . Поэтому утверждение теоремы о феллеровости или квазифеллеровости $\bar{X}$ или $\hat{X}$ вытекает из обсуждения, предшествующего (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В процессе доказательства теоремы 1 было установлено, что соответствующая цепь $\bar{X}$ обладает свойствами: а) σ -алгебра $\bar{\mathcal{B}}$ совпадает со следом $\bar{\mathcal{B}}$ на E (см. (2)), и б) для всех $f \in b\bar{\mathcal{B}}$ и $x \in E$

$$\bar{P}f(x) = P(f_E)(x), \quad (5)$$

где снова f_E – сужение f на E . Аналогичными свойствами обладает и цепь $\hat{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если исходная цепь X не обрывается (иными словами, имеет марковскую переходную вероятность), то за счет добавления к допустимому набору $\{h_n\}$ функции $h_0 \equiv 1$ можно гарантировать отсутствие обрыва $\bar{X}$ и тем самым феллеровское свойство для $\bar{X}$, поскольку в этом случае $\bar{\mathfrak{A}}$ и $C(\bar{E})$ содержат константу 1 и $P1 \equiv 1$. К сожалению, упомянутое добавление функции h_0 не всегда приемлемо (см. далее условие (III)).

В дальнейшем за символами f_E , $\bar{X}$, $\bar{E}$ и т.п. будет сохранен их смысл, указанный в теореме 1 и замечании 1 (в частности, будет предполагаться, что $\bar{X}$ обладает свойствами а) и б) из замечания 1). *Смысл же обозначений $\hat{E}$ и $\hat{X}$ будет расширен*: как и прежде, продолжаем считать $\hat{E} = \bar{E} \setminus \{\Delta\}$ и за $\hat{X}$ принимаем часть $\bar{X}$ на $\hat{E}$, если существует точка $\Delta \in \bar{E}$ (см. теорему 1), и полагаем $\hat{E} = \bar{E}$ и $\hat{X} = \bar{X}$ в противном случае. Обозначения $\hat{\mathcal{B}}$, $\hat{P}$ и т.п. введем по аналогии с $\bar{\mathcal{B}}$, $\bar{P}$ и т.п. Наконец, *естественные вложения $\varphi : E \rightarrow \bar{E}$ или $\varphi : E \rightarrow \hat{E}$ определим одним и тем же равенством $\varphi(x) = x$, $x \in E$ (в доказательстве теоремы 1 участвовало первое из них).*

4. Существование двойственных цепей. Понятие двойственной (или обращенной) цепи играет существенную роль в теории счетных цепей Маркова [9]. Это же понятие используется и в теории цепей Маркова с измеримыми пространствами состояний,

однако в общем случае в теорему существования двойственных цепей приходится включать требование регулярности меры, определяющей двойственность, относительно того или иного компактного класса множеств [10].

В этом пункте показано (см. теорему 2, а также замечание 3), что теорема 1 позволяет избавиться от подобных предположений, если выполнено достаточно общее условие

(II) *измеримое пространство $(E, \mathcal{B})$ является борелевским.*

ЛЕММА 2. *Условие (II) реализуется тогда и только тогда, когда каждое множество из $\mathcal{B}$ является борелевским в пространстве $\hat{E}$, т.е. когда $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{B}}$ (по поводу символов $\hat{E}$, $\hat{\mathcal{B}}$ и т.п. см. конец п. 3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{B}}$ вытекает (II), причем в качестве метрического пространства M из определения борелевского пространства (см. п. 2) можно взять $\bar{E}$. Пусть теперь отображение $\psi: E_0 \rightarrow E$ устанавливает изоморфизм между $(E_0, \mathcal{B}_0)$ и $(E, \mathcal{B})$, где $(E_0, \mathcal{B}_0)$ – измеримое пространство из того же определения. Рассматривая ψ как инъекцию E_0 и $\hat{E}$, получим измеримое отображение $(E_0, \mathcal{B}_0)$ в $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$, поскольку $\psi^{-1}(A) = \psi^{-1}(A \cap E) \in \mathcal{B}_0$ для $A \in \hat{\mathcal{B}}$. Отсюда следует (см. теорему Суслина–Лузина в [6], а также [10]), что каждое множество вида $\psi(B)$, $B \in \mathcal{B}_0$, является борелевским в $\hat{E}$, а именно из множеств такого вида и состоит $\mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнено условие (II), и пусть μ – σ -конечная субинвариантная мера для цепи X . Тогда в $(E, \mathcal{B})$ существует цепь Маркова, двойственная к X относительно μ (т.е. цепь с переходным оператором P^* , для которого $\mu(gPf) = \mu(fP^*g)$ при всех $f, g \in \mathcal{B}_+$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тривиальный случай $\mu \equiv 0$ исключим из рассмотрения. Пусть имеются допустимый набор функций $\{h_n\}$ и множества $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ с $\bigcup_n E_n = E$ и $\mu(E_n) < \infty$, $n \geq 1$. Тогда элементы нового допустимого набора, составленного из всевозможных произведений $h_n 1_{E_m}$, $m, n \geq 1$, суммируемы по μ . Поэтому, не ограничивая общности, сразу предположим таковыми все элементы исходного набора.

Пусть мера $\hat{\mu}$ на $\hat{\mathcal{B}}$ служит образом μ при естественном вложении E в $\hat{E}$. Непрерывное продолжение $g_n = \overline{G^\alpha h_n}$ функции $G^\alpha h_n$, $n \geq 1$, суммируемо по $\hat{\mu}$, так как (см., например, [7, теорема 2.12]) $\hat{\mu}(g_n)$ совпадает с

$$\mu(G^\alpha h_n) = \sum_{m \geq 0} \alpha^m \mu(P^m h_n) \leq \mu(h_n) \sum_{m \geq 0} \alpha^m < \infty.$$

При этом из-за отсутствия в $\hat{E}$ точки Δ для любого $x \in \hat{E}$ найдется номер n , при котором $g_n(x) > 0$, вследствие чего в некоторой окрестности U этой точки $g_n > \varepsilon$ при каком-либо $\varepsilon > 0$ и $\hat{\mu}(U) < \infty$, что гарантирует внутреннюю регулярность $\hat{\mu}$ [8, гл. 10].

К тому же мера $\hat{\mu}$ субинвариантна для $\hat{X}$:

$$\hat{\mu}(\hat{P}f) = \mu(P(f_E)) \leq \mu(f_E) = \hat{\mu}(f), \quad f \in \mathcal{B}_+$$

(ср. (4)). Отмеченные свойства $\hat{\mu}$ позволяют по теореме 4.9 из [10] определить на $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ цепь Маркова с переходной вероятностью $q(\cdot, \cdot)$, двойственную цепи $\hat{X}$ относительно $\hat{\mu}$.

Воспользовавшись леммой 2, введем сужение $p^*(x, A) = q(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и получим

$$\int_A p(\cdot, C) d\mu = \int_A \hat{p}(\cdot, C) d\hat{\mu} = \int_C q(\cdot, A) d\hat{\mu} = \int_C p^*(\cdot, A) d\mu \quad (6)$$

для $A, C \in \mathcal{B}$, где второе равенство вытекает из определения двойственной цепи. Равенство крайних интегралов в (6) означает двойственность цепи X и цепи с переходной вероятностью $p^*(\cdot, \cdot)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 2 мы ограничились, по-видимому, наиболее важной ситуацией. Однако можно было бы охватить среди некоторых других и случай, когда E оказывается универсально измеримым в $\hat{E}$ (по поводу терминологии см. [7], [11]). Именно, потребуем лишь, чтобы мера μ была σ -конечна и субинвариантна для X и чтобы в $\hat{\mathcal{B}}$ нашлось $S \subset E$ с $\mu(E \setminus S) = 0$ (разумеется, $S \in \mathcal{B}$ в силу замечания 1 и соотношений $S \in \hat{\mathcal{B}}$ и $S \subset E$). Подобно прежнему выясняется, что равенство $\hat{\mu}(A) = \mu(A \cap S)$, $A \in \hat{\mathcal{B}}$, определяет σ -конечную меру на $\hat{\mathcal{B}}$, если функции h_n суммируемы по μ , и что в $(\hat{E}, \hat{\mathcal{B}})$ определена цепь Маркова с переходной вероятностью $q = q(\cdot, \cdot)$, двойственная $\hat{X}$ относительно $\hat{\mu}$. Введя переходную вероятность $p^*(x, A) = q(x, A \cap S)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$, и переписав (6) с новыми q и p^* (и заменив во втором и третьем интегралах A на $A \cap S$), вновь приходим к утверждению теоремы 2.

5. Расширения неприводимых цепей. В классе неприводимых цепей Маркова удастся провести более детальный анализ связей между различными свойствами исходной цепи X и ее расширения $\hat{X}$ (по поводу обозначений $\hat{E}$, $\hat{X}$ и т.п. см. конец п. 3). С этой целью в этом пункте фиксируется некоторая σ -конечная мера ν на $\mathcal{B}$ и постулируется условие

- (III) *цепь Маркова X ν -неприводима; при этом*
 а) *ν является максимальной мерой, определяющей неприводимость (ММОН), и*
 б) *все элементы допустимого набора $H_0 = \{h_n\}$, определяющего расширение $\bar{X}$ и $\hat{X}$, минорантны для X .*

(Разъяснения по поводу терминологии см. в п. 6.) Символом $\hat{\nu}$ будет обозначаться образ ν при естественном вложении E в $\hat{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположения а) и б) из условия (III) мало стеснительны, поскольку, допустив неприводимость X , можно, во-первых, как отмечено в п. 6, найти и ММОН, а, во-вторых, любой допустимый набор преобразовать в допустимый же набор минорантных функций (ср. с началом доказательства теоремы 2; при этом прежнее условие $\mu(E_n) < \infty$ заменяется требованием минорантности E_n).

Мы начнем с изучения связей между минорантными множествами в E и компактными множествами в $\hat{E}$ (см. теорему 3), а затем покажем, что расширение $\hat{X}$ цепи X наследует некоторые полезные свойства цепи X , коль скоро последняя обладает таковыми (см. теоремы 4–6).

ЛЕММА 3. Пусть функции s_1 и s_2 минорантны для X . Тогда $G^\alpha s_i \neq 0$, $i = 1, 2$, и $a \leq G^\alpha s_1 / G^\alpha s_2 \leq b$ в E при некоторых $a, b > 0$. Это же утверждение сохраняется силу с $G^\alpha s_i$ и E , замененными на $\overline{G^\alpha s_i}$ и $\hat{E}$ соответственно, если функции s_i принадлежат рассматриваемому допустимому набору H_0 .

Второе утверждение леммы вытекает из первого ввиду отсутствия в $\widehat{E}$ точки Δ . Доказательство первого см. в п. 6.

ЛЕММА 4. Пусть цепь X имеет период $d \geq 1$. Хотя бы одно из циклических для нее множеств (а с ним и любое из них) является минорантным для X тогда и только тогда, когда в $\overline{E}$ нет точки Δ , т.е. когда $\widehat{E} = \overline{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = 1$. Предположим сначала, что E минорантно (в нашем случае E является циклическим множеством по определению). Тогда $p_m(\cdot, A) \geq \xi(A)$ в E для всех $A \in \mathcal{B}$ при соответствующих $m \in \mathbb{N}$ и мере $\xi \neq 0$, так что $G^\alpha 1 \geq \alpha^m \xi(E) > 0$. Но по лемме 3 $G^\alpha h_1 \geq a G^\alpha 1$, $a > 0$, и, следовательно, $\overline{G^\alpha h_1} > 0$, т.е. в $\overline{E}$ нет точки Δ .

Наоборот, пусть известно, что в $\overline{E}$ нет точки Δ . Тогда $\inf\{G^\alpha h_1(x); x \in E\} > 0$. Условие $d = 1$ позволяет найти такие $a_n > 0$ и минорантное множество B , что $p_n(\cdot, B) > a_n$, $n \geq l$, на B , где $l \in \mathbb{N}$ (в роли B можно взять любое C -множество в смысле [3]). Разумеется, $p_k(x, A) \geq \eta(A)$ для $x \in B$, $A \in \mathcal{B}$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$ и мере $\eta \neq 0$ на $\mathcal{B}$. Далее, $G^\alpha 1_B = \sum_{m \geq 0} \alpha^m P^m 1_B$ по лемме 3 всюду в E превышает $b_1 G^\alpha h_1 \geq b_2$ (здесь и далее под b_i , $i \geq 1$, подразумеваются подходящие положительные числа). Равномерная сходимостъ вписанного ряда влечет в E оценку

$$\sum_{m=0}^N P^m 1_B \geq b_3$$

с некоторым $N \in \mathbb{N}$. Таким образом, при любом $x \in E$ выполняется неравенство $p_m(x, B) \geq b$ при некотором целом $m = m(x)$ из отрезка $[0, N]$, и поэтому всюду в E

$$\begin{aligned} p_{l+N}(x, B) &\geq \int_B p_m(x, dy) p_{l+N-m}(y, B) \geq b_4 a_{l+N-m} \geq b > 0, \\ p_{m_1}(x, A) &\geq \int_B p_{l+N}(x, dy) p_k(y, A) \geq b \eta(A), \end{aligned}$$

где $b = b_4 \min\{a_n; l \leq n \leq N\}$, $m_1 = l + k + N$, а $A \in \mathcal{B}$ произвольно, что и доказывает минорантность E .

Итак, случай $d = 1$ рассмотрен, а при $d > 1$ надо сослаться на уже доказанное и предложение 2.9 из [2].

В связи с теоремой 3 напомним, что апериодичность цепи X влечет замкнутость семейства минорантных множеств относительно конечных объединений [2, следствие 2.1].

ТЕОРЕМА 3. Каков бы ни был компакт $K \subset \widehat{E}$, множество $K \cap E$ покрывается объединением конечного числа множеств, минорантных для X . Напротив, каждое минорантное множество содержится в некотором компакте $K \subset \widehat{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма 4 делает теорему очевидной, если в $\overline{E}$ нет точки Δ , и этот случай далее исключается. Кроме того, мы вправе считать $d = 1$ (ср. конец предыдущего доказательства).

Снова выделим элемент h_1 из рассматриваемого допустимого набора и заметим, что $g \equiv \overline{G^\alpha h_1} \neq 0$ в $\widehat{E}$ в соответствии с леммой 3. Пусть K – некоторый компакт в $\widehat{E}$. Расширив его при необходимости, будем считать $\hat{\nu}(K) > 0$ (определение $\hat{\nu}$ см. в начале

пункта). Из непрерывности g в $\hat{E}$ выводится неравенство $g > a$ на K , а тем самым и на $K \cap E$ при некотором $a > 0$. Следовательно, $\sum_{n=1}^N P^n h_1$ превышает на $K \cap E$ некоторое положительное число, если $N \in \mathbb{N}$ достаточно велико (ср. с выбором N в предыдущем доказательстве). Отсюда с учетом соотношений $\hat{\nu}(K) = \nu(K \cap E) > 0$ вытекает минорантность множества $K \cap E$ (см. [2, предложение 2.11]), и первое утверждение теоремы доказано.

Фиксируем теперь минорантное $A \subset E$ и заметим, что оно содержится в $\{x : G^\alpha 1_A(x) > 1/2\} \subset \{x : g(x) > b\}$, где $b > 0$ достаточно мало и вновь использована лемма 3. Множество $K = \{x \in \hat{E} : g(x) \geq b\}$ компактно в $\hat{E}$, поскольку $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \Delta$ в топологии пространства $\bar{E}$, и оно, очевидно, содержит A .

ТЕОРЕМА 4. *Расширение $\hat{X}$ $\hat{\nu}$ -неприводимо. Более того, $\hat{\nu}$ является ММОН для $\hat{X}$, а параметры сходимости X и $\hat{X}$ совпадают друг с другом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим g так же, как и в доказательстве теоремы 3. Задав $A \in \hat{\mathcal{B}}$ с $\hat{\nu}(A) > 0$, подберем компактное в $\hat{E}$ множество $K \subset A$ с $\hat{\nu}(K) > 0$. В $K_1 = K \cap E$ содержится минорантное подмножество (см. п. 6), и применив лемму 3, получаем в E неравенство $G^\alpha 1_{K_1} \geq ag$ с некоторым $a > 0$. Пусть $f_n \in C(\bar{E}_n)$, причем $1 \geq f_n \geq 1_K$ и $f_n \rightarrow 1_K$ при $n \rightarrow \infty$. Из неравенства $G^\alpha[(f_n)_E] \geq ag_E$ выводим неравенство $\bar{G}^\alpha f_n \geq ag$, $n \geq 1$, а затем, переходя к пределу, и неравенство $\bar{G}^\alpha 1_K \geq ag$ (здесь $\bar{G}^\alpha$ – аналог G^α для $\bar{X}$). Тем более, $\bar{G}^\alpha 1_A > 0$ в $\hat{E}$ и $\hat{\nu}$ -неприводимость цепи $\hat{X}$ установлена.

Чтобы объяснить, почему $\hat{\nu}$ служит ММОН для $\hat{X}$, нужно для $A \in \hat{\mathcal{B}}$ с $\hat{\nu}(A) = 0$ доказать любое из равносильных равенств $\hat{\nu}(A_1) = 0$ или $\nu(A_1 \cap E) = 0$, где $A_1 = \{x \in \hat{E} : \hat{P}\hat{G}1_A > 0\}$. Однако второе из них очевидно, так как $A_1 \cap E = \{x \in E : PG1_{A \cap E} > 0\}$ и ν служит ММОН для X .

Остается удостовериться в осуществлении неравенств

$$R \geq \hat{R} \quad \text{и} \quad \hat{R} \geq R, \quad (7)$$

где R (соответственно $\hat{R}$) – параметр сходимости цепи X (цепи $\hat{X}$). Рассмотрим $A \in \hat{\mathcal{B}}$ с $\hat{\nu}(A) > 0$ и положим $S_A = \sum_{n \geq 0} r^n \hat{P}^n 1_A$, где $r > R$ произвольно. Всюду в E согласно условию (III) и определению параметра R (см. п. 6) имеем

$$S_A = \sum_{n \geq 0} r^n P^n 1_{A \cap E} = \infty,$$

поскольку $\nu(A \cap E) > 0$. Иными словами, $E \subset B = \{x \in \hat{E} : S_A(x) = \infty\}$ и потому $\hat{\nu}(\hat{E} \setminus B) = 0$. Итак, $S_A = \infty$ $\hat{\nu}$ -почти всюду, т.е. $r \geq \hat{R}$, что исключает случай $\hat{R} > R$ и доказывает первое из неравенств (7).

Наоборот, пусть $r > \hat{R}$, и пусть $A \in \mathcal{B}$ и $\nu(A) > 0$. По замечанию 1 найдется $B \in \hat{\mathcal{B}}$, для которого $B \cap E = A$, причем $S_B \equiv \infty$ в $\hat{E}$ ввиду равенства $\hat{\nu}(B) = \nu(A)$ и определения $\hat{R}$. Отсюда и $S_A \equiv \infty$ в E , так как $P^n 1_A = \hat{P}^n 1_B$ в E . Остается по аналогии с предыдущим вывести второе из неравенств в (7).

ТЕОРЕМА 5. *Если цепь X возвратна, то и $\hat{X}$ возвратна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \widehat{\mathcal{B}}_+$ и $\hat{\nu}(f) > 0$. Рассмотрим множество $A = \{x \in \widehat{E} : \widehat{G}f(x) = \infty\}$ и его дополнение $B = \widehat{E} \setminus A$. Ввиду возвратности исходной цепи $\widehat{G}f = G(f_E) = \infty$ на E , так как $\nu(f_E) = \hat{\nu}(f) > 0$. Таким образом, $A \supset E$ и $\hat{\nu}(B) = \nu(B \cap E) = 0$. Последнее было бы невозможно в случае непустого B , поскольку в этом случае субинвариантность $\widehat{G}f$ влекла бы неравенство $\hat{\nu}(B) > 0$ (см. [2, предложение 5.1]). Итак, B пусто для всех f указанного вида.

В связи со следующей теоремой напомним, что возвратность неразложимой цепи Маркова влечет ее лиувиллеовость (см. п. 6). Легко также проверить, что если все меры вида $p(x, \cdot)$ абсолютно непрерывны относительно ν , то свойства лиувиллеовости и ν -лиувиллеовости равносильны.

ТЕОРЕМА 6. *Если цепь X является ν -лиувиллеовой, то $\widehat{X}$ является $\hat{\nu}$ -лиувиллеовой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ -конечная мера $\mu \neq 0$ инвариантна для X и абсолютно непрерывна относительно ν , и пусть W – совокупность всех мер на $\widehat{\mathcal{B}}$, обладающих такими же свойствами по отношению к $\widehat{X}$ и $\hat{\nu}$. Возвращаясь ко второму абзацу доказательства теоремы 2, заключаем, что $\hat{\mu} \in W$, где $\hat{\mu}$ – образ μ при естественном вложении E в $\widehat{E}$. Далее, каждая мера $\eta \in W$ эквивалентна $\hat{\nu}$ (ведь равенства $\eta(A) = \eta(\widehat{P}1_A) = 0$ с $A \in \widehat{\mathcal{B}}$ влекут существование $x \in \widehat{E}$, при котором $\hat{p}(x, A) = 0$, а тем самым по теореме 4 и равенство $\hat{\nu}(A) = 0$). Таким образом, всякая мера $\eta \in W$ эквивалентна $\hat{\mu}$ и обладает производной Радона–Никодима $h = d\eta/d\mu$. Для $f \in \widehat{\mathcal{B}}_+$ получаем

$$\eta(f) = \eta(Pf) = \hat{\mu}(h\widehat{P}f) = \mu(h_E P(f_E))$$

и $\eta(f) = \hat{\mu}(hf) = \mu(h_E f_E)$. Отсюда следует инвариантность для X меры $\mu_1(A) = \mu(h_E 1_A)$, $A \in \mathcal{B}$, а стало быть, $\mu_1 = k\mu$ при некотором постоянном $k \geq 0$. Это означает, что $h_E = k$ μ -почти всюду и в силу последних цепочек равенств $\eta = k\hat{\mu}$.

6. Добавление. В этом пункте собраны некоторые сведения о неприводимых цепях Маркова.

Пусть на σ -алгебре $\mathcal{B}$ задана σ -конечная мера ν . Если исходная цепь X ν -неприводима и $G1_A = 0$ ν -почти всюду всякий раз, когда $\nu(A) = 0$, то ν называют *максимальной мерой, определяющей неприводимость* (ММОН). Требование неприводимости X относительно некоторой меры равносильно существованию ММОН [2], [3], и поэтому впредь упомянутую меру ν будем считать ММОН для X (ср. с условием (III)).

Функция $s: E \rightarrow [0, \infty)$ называется *минорантной* для X (соответствующий английский термин – a small function), если $\nu(s) > 0$ и существуют $b > 0$, натуральное m и мера ξ на $\mathcal{B}$ такие, что $\xi(E) > 0$ и $p_m(x, A) \geq bs(x)\xi(A)$ для всех $x \in E$, $A \in \mathcal{B}$ [2]. В этом же случае и мера ξ именуется минорантной. Множество $A \in \mathcal{B}$ по определению минорантно, если его индикатор минорантен.

Для любой функции $f \in \mathcal{B}_+$ с $\nu(f) > 0$ и любой минорантной функции s существуют $b > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, при которых

$$P^m f \geq bs \quad (8)$$

(см. [2, предложение 2.7]), что вместе с неравенством $G^\alpha f \geq \alpha^m G^\alpha P^m f$ влечет неравенство $G^\alpha f \geq \alpha G^\alpha s$ с некоторым $\alpha > 0$. Более того, отсюда следует первое утверждение леммы 3 из п. 5.

Для цепи X можно указать параметр сходимости R , т.е. такое число $R > 0$, что

- а) $G^\alpha s < \infty$ ν -почти всюду, если $0 \leq \alpha < R$, а функция s минорантна, и
- б) $G^\alpha f \equiv \infty$, если $\alpha > R$, а $f \in \mathcal{B}_+$ и $\nu(f) > 0$

(в отличие от предыдущего изложения здесь определение (1) используется при любом $\alpha \geq 0$). Если σ -конечная мера $\mu \neq 0$, заданная на $\mathcal{B}$, субинвариантна, то $0 < \mu(s) < \infty$ для любой минорантной функции s . Действительно, неравенства $\mu(f) \geq \mu(P^m f) \geq b\mu(s)$, в которых функция f указанного вида произвольна, а m и b подобраны в соответствии с (8), исключают случай $\mu(s) = \infty$. Выбрав же минорантную функцию f с $\mu(f) > 0$ (см. [2, предложение 2.11(iv)]) и сославшись на лемму 3, получим $\mu(G^\alpha s) \geq c\mu(G^\alpha f)$ при некотором $c > 0$, откуда $\mu(s) > 0$.

Возвратная цепь X является ливиллевой (это хорошо известно для цепей, возвратных по Харрису [3]). В самом деле, если s минорантна, то в силу только что сказанного для любой из σ -конечных мер, инвариантных для X , можно указать $k > 0$, при котором $k\mu(s) = 1$, откуда вытекает пропорциональность μ и меры π_s , фигурирующей в теореме 5.2 [2].

В заключение напомним [2], что *период* цепи X определяется как наибольшее из натуральных d , при которых найдутся такие попарно непересекающиеся непустые множества $E_i \in \mathcal{B}$, $0 \leq i \leq d - 1$ (называемые *циклическими множествами*), что $p(x, E \setminus E_j) = 0$ при $x \in E_i$ и $j \neq i + 1 \pmod{d}$. Цепь X *апериодична*, если $d = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Шур М. Г. Инвариантные меры для цепей Маркова и феллеровские расширения цепей // Теория вероятн. и ее применения. 1981. Т. 26. № 3. С. 496–509.
- [2] Нуммелин Э. Общие неприводимые цепи Маркова и неотрицательные операторы. М.: Мир, 1989.
- [3] Orey S. Lecture Notes on Limit Theorems for Markov Chain Transition Probabilities. London: Van Nostrand, 1971.
- [4] Жданок А. И. Асимптотическое поведение цепей Маркова и инвариантные конечно-аддитивные меры // Дисс. ... к. ф. -м. н.. Рига: Латв. гос. ун-т 1981.
- [5] Knight F. Note on regularization of Markov processes // Illinois J. Math. 1965. V. 9. № 3. P. 548–552.
- [6] Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М.: ИЛ, 1956.
- [7] Dellacherie C., Meyer P. A. Probabilités et potential (chapitres I–IV). Paris: Hermann, 1975.
- [8] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
- [9] Кемени Дж., Снелл Дж., Кнепп А. Счетные цепи Маркова. М.: Наука, 1987.
- [10] Ревюз Д. Цепи Маркова. М.: РФФИ, 1997.
- [11] Куратовский К. Топология.. Т. 1. М.: Мир, 1966.