Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Астровский, Обобщенная матрица Грама и ее применение к проблеме наблюдаемости линейных нестационарных систем, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 163–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm492>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:45:00

УДК 517.977

ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ГРАМА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ПРОБЛЕМЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

А. И. Астровский

Получены достаточные условия невырожденности обобщенной матрицы Грама. В частности, показано, что обобщенная матрица Грама невырождена для систем функций Чебышева. Дано применение полученных результатов к задачам наблюдаемости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В терминах матрицы наблюдаемости доказаны необходимые и достаточные условия полной и тотальной наблюдаемости с помощью конечно-параметрических разрешающих операций.

Библиография: 21 название.

1. Обобщенная матрица Грама. Пусть дана n -вектор-функция-столбец $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, элементы которой – вещественные кусочно-непрерывные функции на отрезке $T = [t_0, t_1]$. Известно [1], что система функций $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ линейно независима на T тогда и только тогда, когда матрица

$$G_r(f, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) f'(t) dt \quad (1)$$

невырождена. Штрих означает операцию транспонирования.

При исследовании задач управления в специальных классах управляющих воздействий, а также задач наблюдения с помощью специальных классов разрешающих операций [2] возникает необходимость изучения матрицы, построенной следующим образом.

Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ заданы две кусочно-непрерывные n -вектор-функции-столбцы

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)). \quad (2)$$

Определим матрицу $G(f, h, t_0, \tau)$, $\tau \in T$, следующим образом:

$$G(f, h, t_0, \tau) = \int_{t_0}^{\tau} f(t) h'(t) dt. \quad (3)$$

В дальнейшем матрицу $G(f, h, t_0, \tau)$ вида (3) будем называть *обобщенной матрицей Грама*.

Рассматривается следующая задача: найти условия, при которых существует такой момент $\tau^* \in T$, что матрица $G(f, h, t_0, \tau^*)$ невырождена.

Ясно, что для существования момента $\tau^* \in T$, при котором определитель $\det G(f, h, t_0, \tau^*)$ матрицы $G(f, h, t_0, \tau^*)$ отличен от нуля, необходимо, чтобы как система функций $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, так и система функций $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ были линейно независимы на $[t_0, \tau^*]$.

Несложно привести пример того, что условия линейной независимости системы функций $f(t)$ и линейной независимости системы функций $h(t)$ на T не являются достаточными условиями невырожденности матрицы $G(f, h, t_0, \tau^*)$ хотя бы при одном $\tau^* \in T$.

Если n -вектор-функции $f(t)$ и $h(t)$ таковы, что $f(t) = Ph(t)$, $t \in T$, для некоторой постоянной матрицы P , то $G(f, h, t_0, \tau) = PG_r(h, t_0, \tau)$, $\tau \in T$, и при $\det P \neq 0$ матрица $G(f, h, t_0, \tau)$ невырождена тогда и только тогда, когда невырождена матрица $G_r(f, t_0, \tau)$, $\tau \in (t_0, t_1]$.

Отметим, что при изучении задач управляемости для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в специальных классах управлений невырожденность матрицы вида (3) исследовалась в [3]–[6] для специального вида функций $f(t)$ и конкретно заданных функций $h(t)$. При этом исследование невырожденности матрицы $G(f, h, t_0, \tau)$ проводилось на основе разложения определителя этой матрицы в ряд Тейлора в окрестности точки t_0 , для чего приходилось дифференцировать n^2 раз определитель матрицы $G(f, h, t_0, \tau)$, $\tau \in T$. В [7], [8] при изучении задач наблюдения с помощью специальных классов разрешающих операций для нестационарных линейных систем была рассмотрена обобщенная матрица Грама для систем функций Чебышева (T -систем).

Напомним, что система вещественных непрерывных функций $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ называется [9], [10] *системой функций Чебышева порядка $n - 1$* на T , если любая нетривиальная линейная комбинация этих функций имеет не более $n - 1$ корней на T . Для случая, когда компоненты n -вектор-функций f и h являются системами функций Чебышева, доказано [7], что матрица $G(f, h, t_0, \tau^*)$ невырождена для любого $\tau^* \in (t_0, t_1]$. Доказательство этого утверждения основывалось на использовании свойств $C - J$ докритичности из [11]. Отметим также, что результаты работ [4]–[6] следуют из [7], [8] при специально заданных системах функций $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$, например для функций, порождающих полиномы степени n , тригонометрические полиномы и т.д.

Ниже приводится доказательство невырожденности обобщенной матрицы Грама, основанное исключительно на свойствах систем функций Чебышева.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны две системы функций Чебышева $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ и $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ порядка $n - 1$ на $[t_0, t_1]$. Тогда $\det G(f, h, t_0, \tau^*) \neq 0$ для любого $\tau^* \in (t_0, t_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существует такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что матрица $G(f, h, t_0, \tau^*)$ вырождена. Это означает, что найдется такой ненулевой вектор $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$, что $G(f, h, t_0, \tau^*)g = 0$. Поскольку $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ является системой функций Чебышева порядка $n - 1$ на $[t_0, t_1]$, то функция $\omega_h(t) = h_1(t)g_1 + h_2(t)g_2 + \dots + h_n(t)g_n$ имеет не более $n - 1$ корней на T . Обозначим неузловые корни функции $\omega_h(t)$, $t \in T$, через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$, а корни-узлы – через $\tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \dots, \tau_{k+l}$. Из свойств T -систем следует [9], [10], что $2k + l \leq n - 1$. Поэтому среди многочленов по системе функций Чебышева $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ существует [10] такой многочлен $\omega_f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$, что точки $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ являются неузловыми корнями, а точки $\tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \dots, \tau_{k+l}$ – корнями-узлами многочлена $\omega_f(t)$, причем у функции $\omega_f(t)$, $t \in T$, других корней нет. Отметим, что на отрезках $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j \in (1, 2, \dots, k + l - 1)$, функции $\omega_f(t)$ и $\omega_h(t)$ имеют один и тот же знак. Следовательно, справедливо неравенство

$\omega_h(t)\omega_f(t) \geq 0, t \in T$, причем равенство нулю будет только в точках τ_j . Обозначим через α n -вектор-строку $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Из равенства

$$\alpha G(f, h, t_0, \tau^*)g = \int_{t_0}^{\tau^*} \omega_h(t)\omega_f(t) dt = 0$$

получим тождество $\omega_h(t)\omega_f(t) \equiv 0, t \in [t_0, \tau^*]$, которое противоречит соотношению $\omega_h(t)\omega_f(t) \geq 0, t \in T$. Теорема доказана.

Пусть функции $f_i(t)$ и $h_i(t), i \in (1, 2, \dots, n)$, определены и непрерывно дифференцируемы $n-1$ раз на открытом множестве Δ , содержащем отрезок T . Для $k \in (1, 2, \dots, n)$ обозначим через $W_f^k(t)$ определитель Вронского системы функций $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t))$.

ЛЕММА 1. *Если существует такая точка $\tau^0 \in [t_0, t_1]$, в окрестности которой функции $f_i(t)$ и $h_i(t), i \in (1, 2, \dots, n)$, непрерывно дифференцируемы $n-1$ раз и*

$$W_f^n(\tau^0) \neq 0, \quad W_h^n(\tau^0) \neq 0, \quad (4)$$

то найдется такой отрезок $[\xi_0, \xi_1] \subseteq [t_0, t_1]$, что $\tau^0 \in [\xi_0, \xi_1]$ и матрица $G(f, h, \xi_0, \tau)$ невырождена для любого $\tau \in (\xi_0, \xi_1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условие (4) выполняется. Тогда существует [12], [13] такой отрезок $[\xi_0, \xi_1] \subseteq [t_0, t_1]$, $\tau^0 \in [\xi_0, \xi_1]$, на котором функции $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ и $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ образуют системы функций Чебышева порядка $n-1$. В силу теоремы 1 $\det G(f, h, \xi_0, \tau) \neq 0$ для любой точки $\tau \in (\xi_0, \xi_1]$. Лемма доказана.

Условия леммы 1 гарантируют существование такого отрезка $[\xi_0, \xi_1] \subseteq [t_0, t_1]$, что обобщенная матрица Грама $G(f, h, \xi_0, \tau)$ невырождена для любого $\tau \in (\xi_0, \xi_1]$. Следующее утверждение дает условия невырожденности обобщенной матрицы Грама на заданном отрезке.

ЛЕММА 2. *Если на интервале (t_0, t_1) функции $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ и $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ непрерывно дифференцируемы $(n-1)$ раз и при каждом $k \in (1, 2, \dots, n)$ выполняются условия*

$$W_f^k(\tau) \neq 0, \quad W_h^k(\tau) \neq 0 \quad \text{для любого } \tau \in (t_0, t_1), \quad (5)$$

то обобщенная матрица Грама $G(f, h, t_0, \tau)$ невырождена при всех $\tau \in (t_0, t_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [13], [14] следует, что при выполнении условия (5) любые линейные комбинации $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t)$ и $\alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t) + \dots + \alpha_n h_n(t)$ с вещественными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, в совокупности отличными от нуля, имеют не более $n-1$ нулей на (t_0, t_1) . Следовательно, системы функций $(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ и $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ являются системами функций Чебышева порядка $n-1$ на (t_0, t_1) . Поэтому в силу теоремы 1 обобщенная матрица Грама $G(f, h, t_0, \tau)$ невырождена при любом $\tau \in (t_0, t_1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При исследовании обобщенной матрицы Грама полезным оказывается понятие раствора $\theta(H_1, H_2)$ [15] между подпространствами H_1 и H_2 гильбертова пространства H . Пусть $L_2(t_0, \tau)$ – гильбертово пространство действительных функций, квадрат которых интегрируем по Лебегу на отрезке $[t_0, \tau]$, $t_0 < \tau \leq t_1$, со скалярным произведением

$$(a, b) = \int_{t_0}^{\tau} a(t)b(t) dt, \quad a, b \in L_2(t_0, \tau).$$

Через $H_f(\tau)$ и $H_h(\tau)$ обозначим подпространства из $L_2(t_0, \tau)$, порожденные соответственно системами функций $f(t)$ и $h(t)$, $t \in [t_0, \tau]$. Если существует такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, при котором раствор $\theta(H_f(\tau^*), H_h(\tau^*)) < 1$, то [15] обобщенная матрица Грама $G(f, h, t_0, \tau^*)$ невырождена.

2. Наблюдаемость с помощью конечно-параметрических разрешающих операций. Рассмотрим линейную нестационарную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in T = [t_0, t_1]. \quad (6)$$

Здесь $x(t)$ – n -вектор-столбец состояния системы (6) в момент t , а $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ является непрерывной матричной функцией.

Предположим, что выходная функция $y(t) = y(t, x_0)$ системы (6) зависит от ее состояния $x(t) = x(t, x_0)$ в момент t следующим образом:

$$y(t, x_0) = c(t)x(t), \quad t \in T, \quad (7)$$

где $c(t)$ – n -вектор-функция-строка с непрерывными элементами; $x_0 = x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ – начальное состояние системы (6).

Пусть $F(t)$ – фундаментальная матрица системы (6):

$$\dot{F}(t) = A(t)F(t), \quad F(t_0) = E, \quad t \in T.$$

Здесь E – единичная $(n \times n)$ -матрица.

Обозначим через $C(T, \mathbb{R})$ множество непрерывных скалярных функций на отрезке T , а через $\mathcal{Y} \subset C(T, \mathbb{R})$ – совокупность всех выходных функций системы (6), (7):

$$\mathcal{Y} = \{y \in C(T, \mathbb{R}) : y = y(x_0) = (y(t, x_0) = h(t)x_0, t \in T), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n\},$$

где n -вектор-функция-строка $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ равна $c(t)F(t)$, $t \in T$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2], [16]. Система (6), (7) называется *полностью наблюдаемой на T* , если отображение множества начальных состояний $\mathbb{R}^n$ в множество выходных функций $\mathcal{Y}$ системы (6), (7) взаимно однозначно.

Так как система наблюдения (6), (7) задает отображение $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{Y}$ по правилу: $y(t, x_0) = h(t)x_0$, $t \in T$, то свойство полной наблюдаемости системы (6), (7) эквивалентно инъективности оператора Ψ . Последнее равносильно линейной независимости системы функций $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$ на отрезке T .

Как следует из [2], полная наблюдаемость системы (6), (7) гарантирует для каждого $p \in \mathbb{R}^n$ существование такой измеримой почти всюду ограниченной функции r , что

$$\int_{t_0}^{t_1} r(t)y(t, x_0) dt = p'x_0 \quad (8)$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Функционалы

$$\varphi[y(x_0)] = \int_{t_0}^{t_1} r(t)y(t, x_0) dt,$$

удовлетворяющие соотношению (8), называются *разрешающими операциями* [2], а функции r , их порождающие, также называют *разрешающими*.

С точки зрения построения разрешающих операций представляет интерес существование разрешающих функций в классе более узком, чем класс измеримых почти всюду ограниченных функций. В литературе исследовалось существование разрешающих операций при ограничениях на разрешающие функции как геометрического и интегрального характера (т.е. на область возможных значений), так и при функциональных ограничениях [2], [3], [7], [8], [16], [17] и т.д.

Итак, пусть на T задано некоторое множество скалярных функций $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система (6), (7) *наблюдаема в классе разрешающих функций* $\mathcal{F}$ (кратко: *$\mathcal{F}$ -наблюдаема*), если существует такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что для каждого $p \in \mathbb{R}^n$ найдется функция $r_p \in \mathcal{F}$, для которой справедливо равенство

$$\int_{t_0}^{\tau^*} r_p(t)y(t, x_0) dt = p'x_0$$

для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ниже рассмотрим задачу существования разрешающих функций из класса конечно-параметрических функций, т.е. из класса функций $\mathcal{F}$ следующего вида:

$$\mathcal{F} = \{r(\cdot): r(t) = \alpha_1\gamma_1(t) + \dots + \alpha_n\gamma_n(t), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)' \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T\}, \quad (9)$$

где $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ — заданная n -вектор-функция-столбец, компоненты которой кусочно-непрерывны и линейно независимы на T .

Задачу $\mathcal{F}$ -наблюдаемости системы (6), (7) с помощью конечно-параметрических функций вида (9) можно интерпретировать как задачу наблюдаемости системы (6), (7) с помощью динамического фильтра в следующей постановке.

Пусть известно, что выходная функция $y(t, x_0)$, $t \in T$, системы (6), (7) подается на вход линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (динамического фильтра)

$$\dot{z}(t) = D(t)z(t) + b(t)y(t, x_0), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in T, \quad (10)$$

где $z(t) = z(t, x_0)$ — n -вектор состояния динамического фильтра (10) в момент t , порожденный начальным состоянием $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (6), (7); $D(t)$, $b(t)$ — заданные соответственно $(n \times n)$ -, $(n \times 1)$ -матричные функции с непрерывными элементами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [17]. Система (6), (7) называется *наблюдаемой с помощью динамического фильтра* (10), если существует такой момент $t^* \in (t_0, t_1]$, что для каждого $p \in \mathbb{R}^n$ найдется вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$, для которого справедливо равенство $\alpha'z(t^*, x_0) = p'x_0$ при любом $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Из определения 3 следует, что для того чтобы определить начальное состояние системы (6) с помощью динамического фильтра (10) достаточно знать значение n -вектора

$z(t, x_0)$ лишь в одной точке t^* , тогда как классическая задача наблюдения требует знания функции $y(t)$ на некотором отрезке времени (либо в совокупности точек из отрезка наблюдения).

Нетрудно заметить, что система (6), (7) наблюдаема с помощью динамического фильтра (10) тогда и только тогда, когда она наблюдаема в классе конечно-параметрических разрешающих функций следующего вида:

$$\mathcal{F}_1 = \{r(\cdot) : r(t) = \alpha' F_1^{-1}(t)b(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \quad t \in T\},$$

где $F_1(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{z}(t) = D(t)z(t)$.

Непосредственно из теории линейных уравнений в конечномерных пространствах следует справедливость утверждения.

ЛЕММА 3. *Для $\mathcal{F}$ -наблюдаемости системы (6), (7) в классе функций (9) необходимо и достаточно, чтобы существовал такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что обобщенная матрица Грама $G(\gamma, h, t_0, \tau^*) = \int_{t_0}^{\tau^*} \gamma(t)h(t)dt$ невырождена.*

Из леммы 3 следует

ЛЕММА 4. *Для $\mathcal{F}$ -наблюдаемости системы (6), (7) достаточно, чтобы существовал такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что раствор между линейными оболочками $H_\gamma(\tau^*)$ и $H_h(\tau^*)$ систем функций $(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ и $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))$, $t \in [t_0, \tau^*]$, удовлетворяет условию $\theta(H_\gamma(\tau^*), H_h(\tau^*)) < 1$.*

Так как получить в явном виде фундаментальную матрицу $F(t)$ для нестационарной системы (6) удается лишь в редких, исключительных случаях, то возникает задача исследования проблемы наблюдаемости без использования явного вида фундаментальной матрицы $F(t)$. Выразить условия наблюдаемости непосредственно через параметры исходной системы наблюдения удается с помощью матрицы наблюдаемости [2], [18], [19], построенной для достаточно гладких систем. Более того, матрицы наблюдаемости применяются при исследовании структурных свойств систем и полезны при нахождении преобразований, приводящих системы наблюдения к каноническим формам.

Ниже приводится схема построения матрицы наблюдаемости [20] для систем наблюдения (6), (7). Для этого отождествим систему (6), (7) с парой (A, c) , состоящей из матричной функции $A(t)$ и векторной функции-строки $c(t)$. Множество всех таких пар с непрерывными компонентами обозначим Σ . Рассмотрим оператор [20] $L: \Sigma \rightarrow \Sigma$, действующий по правилу $L(A, c) = (A, cA + \dot{c})$. Область определения $\text{dom}(L)$ оператора L состоит из таких пар (A, c) , у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема. Если компоненты n -вектор-функции-строки $s(t) = c(t)A(t) + \dot{c}(t)$ принадлежат классу C^1 , то на паре (A, c) определен оператор L^2 , для которого $L^2(A, c) = L(A, s)$. По индукции можно определить любую степень L^k оператора L . Обозначим $\text{dom}(L^k)$ область определения оператора L^k . Для $k = 0$ полагаем $L^0(A, c) = (A, c)$ и $\text{dom}(L^0) = \Sigma$. Каждую систему $(A, c) \in \text{dom}(L^k)$ назовем *системой класса k* . Отметим, что если компоненты матричной функции $A(t)$ принадлежат классу C^{k-1} , а компоненты векторной функции $c(t)$ принадлежат классу C^k , то $(A, c) \in \text{dom}(L^k)$. Обратное, вообще говоря, не верно. В [20] приведен ряд утверждений, касающихся систем класса k .

Пусть система $(A, c) \in \Sigma$ имеет класс $n - 1$. Тогда определены векторные функции строки

$$s_i(t) = s_{i-1}(t)A(t) + \dot{s}_{i-1}(t), \quad s_0(t) = c(t), \quad i \in (1, 2, \dots, n-1),$$

из которых составим $(n \times n)$ -матрицу наблюдаемости

$$S(t) = (s_i(t))_{i=\overline{0, n-1}}.$$

Отметим, что если система (6), (7) $\mathcal{F}$ -наблюдаема, то она является полностью наблюдаемой и поэтому необходимые условия полной наблюдаемости (см., например, [2], [16], [17], [19]) являются и необходимыми условиями $\mathcal{F}$ -наблюдаемости.

Далее исследуем задачу $\mathcal{F}$ -наблюдаемости для случая, когда система функций $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, которая определяет в (9) класс функций $\mathcal{F}$, является системой функций Чебышева порядка $n - 1$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Из [7], [8] следует, что если $\text{rank } S(t_0) = n$, то существует такой отрезок $[t_0, t_1]$, на котором функции $(h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)) = c(t)F(t)$ образуют систему функций Чебышева порядка $(n - 1)$.

Из вышеизложенного и результатов работы [7] следует справедливость утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Для $\mathcal{F}$ -наблюдаемости пары (A, c) класса $n - 1$ с помощью многочленов систем функций Чебышева достаточно, чтобы $\text{rank } S(t_0) = n$.*

Получим условия наблюдаемости системы (6), (7) с помощью динамического фильтра (10). Обозначим для пары (D, b) класса $n - 1$ через $Q(t)$ ее матрицу управляемости:

$$Q(t) = (q_i(t))_{i=\overline{0, n-1}}, \quad t \in T,$$

где n -вектор-столбцы $q_i(t)$ определяются по рекуррентной формуле

$$q_i(t) = D(t)q_{i-1}(t) - \dot{q}_{i-1}(t), \quad q_0(t) = b(t), \quad i \in (1, 2, \dots, n - 1).$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть система (6), (7) и динамический фильтр (10) являются системами класса $n - 1$ и выполняются условия: $\text{rank } Q(t_0) = n$, $\text{rank } S(t_0) = n$. Тогда система (6), (7) наблюдаема с помощью динамического фильтра (10).*

Доказательство теоремы 3 основано на теореме 2 и представлении динамического фильтра через конечно-параметрические разрешающие операции.

3. Тотальная наблюдаемость. Хорошо известно, что если линейная стационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений наблюдаема на отрезке $T = [t_0, t_1]$, то она наблюдаема и на любом подотрезке из T . Для линейной нестационарной системы это утверждение неверно. В связи с этим в работах [18], [21] были введены и исследованы понятия тотальной (дифференциальной) наблюдаемости и управляемости. Ниже рассмотрим тотальную наблюдаемость с помощью конечно-параметрических разрешающих функций вида (9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система (6), (7) *тотально наблюдаема в классе разрешающих функций $\mathcal{F}$* (кратко: *тотально $\mathcal{F}$ -наблюдаема*), если для каждого $\tau_0 \in [t_0, t_1]$ найдется такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что для любого $p \in \mathbb{R}^n$ существует функция $r_p \in \mathcal{F}$ такая, что для всякого $x_0 = x(\tau_0) \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$\int_{\tau_0}^{\tau^*} r_p(t)y(t, x_0) dt = p'x_0.$$

ЛЕММА 5. Для тотальной $\mathcal{F}$ -наблюдаемости системы (6), (7) в классе функций (9) необходимо и достаточно, чтобы каждому $\tau_0 \in [t_0, t_1)$ отвечал такой момент $\tau^* \in (t_0, t_1]$, что обобщенная матрица Грама $G(\gamma, h, \tau_0, \tau^*)$ невырождена.

Из лемм 1 и 5 следует справедливость теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Для тотальной $\mathcal{F}$ -наблюдаемости пары (A, c) класса $n-1$ с помощью многочленов систем функций Чебышева необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } S(t) = n$ для почти всех $t \in T$.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность рецензенту за полезные редакционные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
- [2] Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
- [3] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
- [4] Трох И. Замечания о n -наблюдаемости и n -управляемости // Механика. Сб. переводов иностр. статей. 1974. Т. 146. № 4. С. 255–264.
- [5] Шкляр Б. Ш. Об управляемости в классах простейших функций // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1972. № 1. С. 91–93.
- [6] Игнатенко В. В. Управляемость динамических систем с помощью регулятора // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1976. № 2. С. 56–58.
- [7] Астровский А. И. Наблюдаемость нестационарных линейных систем // Препринт ИМ АН Беларуси. 1978. № 8 (40).
- [8] Астровский А. И. Исследования по теории многосвязн. систем. М.: Наука, 1982.
- [9] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [10] Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. М.: Наука, 1976.
- [11] Тонков Е. Л. Неосцилляция и число переключений в линейной нестационарной системе, оптимальной по быстродействию // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 12. С. 2180–2185.
- [12] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов. Л.-М.: ОНТИ, 1937.
- [13] Vallée-Poussin C. Sur l'équation différentielle lineaire du second ordre // J. Math. Pure Appl. (9). 1928. V. 8. P. 125–144.
- [14] Спринджук В. Г. Метод тригонометрических сумм в метрической теории диофантовых приближений зависимых величин // Тр. МИАН. 1972. Т. 128. С. 212–228.
- [15] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
- [16] Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [17] Астровский А. И., Мулярчик В. В. О наблюдаемости в специальных классах функций // Проблемы оптимального управления. Минск: Наука и техника 1981. С. 157–175.
- [18] Silverman L. M., Meadows H. E. Controllability and observability in time-variable linear systems // SIAM J. Contr. 1967. V. 5. № 1. P. 64–73.
- [19] Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Autom. Contr. 1965. V. 10. № 5. P. 112–113.
- [20] Гайшун И. В., Астровский А. И. Описание множества равномерно наблюдаемых линейных нестационарных систем // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40. № 5. С. 5–8.
- [21] Weiss L. The concepts of differential controllability and differential observability // J. Math. Anal. Appl. 1965. № 10. P. 442–449.