Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, Реализация конфигураций и эллипсоид Левнера, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 171–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:58:08

УДК 514.177

РЕАЛИЗАЦИЯ КОНФИГУРАЦИЙ И ЭЛЛИПСОИД ЛЁВНЕРА

С. А. Богатый

Доказано, что всякое подмножество $(m - 1)$ -мерной сферы объема, большего чем $l/(m + 1)$ часть объема всей сферы, содержит $l + 1$ точек, образующие правильный l -мерный симплекс. В качестве следствия получено, что если вне данного m -мерного полного эллипсоида находится не более $1/(m + 1)$ части некоторой сферы, то объем эллипсоида не меньше объема соответствующего шара. Изучается вопрос существования в множестве положительной меры пары точек с заданным сферическим расстоянием.

Библиография: 34 названия.

Одно из базисных свойств объема (меры) заключается в том, что объем подмножества $A \subseteq B$ не превосходит объема множества B . Основной результат статьи (следствие 2) утверждает, что подобное заключение справедливо и в том случае, когда множества A и B имеют “хорошую” геометрическую структуру и множество A выходит за множество B не очень сильно.

Пусть $\alpha(m)$ означает объем (m) -мерный единичного шара $B^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq 1\}$, $\beta(m)$ – объем $((m - 1)$ -мерный) единичной сферы $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$; известно, что $\beta(m) = m \cdot \alpha(m)$. Пусть также $SO(m)$ – компактная группа всех специальных ортогональных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, а μ_H – мера Хаара группы $SO(m)$ такая, что $\mu_H(SO(m)) = \beta(m)$. Через Δ^m мы будем обозначать правильный симплекс, вписанный в сферу S^{m-1} . Центр описанной сферы совпадает с барицентром симплекса Δ^m , поэтому лежит на высотах симплекса и делит их в отношении $m : 1$, считая от вершины. Несущая плоскость $(m - 1)$ -мерной грани симплекса Δ^m делит сферу S^{m-1} на две части; пусть $\lambda(m)$ означает отношение $(m - 1)$ -мерного объема меньшей части к $(m - 1)$ -мерному объему всей сферы, т.е. к $\beta(m)$. Пусть также $\varphi(m)$ означает угол, под которым видно ребро симплекса Δ^m из центра описанной сферы. Индукцией по m несложно доказать, что $\cos \varphi(m) = -1/m$. Ниже в доказательстве утверждений, имеющих инвариантный характер, мы будем предполагать без особой оговорки, что шар является шаром единичного радиуса с центром в начале координат.

Наше доказательство существенно опирается на следующую глубокую теорему, в случае плоскости доказанную (но не опубликованную) Лёвнером.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00174, и фонда INTAS, грант № 96-0712.

ТЕОРЕМА ДЖОНА (см. [1], [2], [3, с. 19], [4, лемма 13.2]). *Всякое компактное выпуклое тело в $\mathbb{R}^n$ содержится в единственном заполненном эллипсоиде наименьшего объема.*

Заполненный эллипсоид минимального объема, содержащий тело B , называется *минимальным* эллипсоидом тела B .

ЛЕММА 1. *Минимальным эллипсоидом правильного симплекса является описанный шар.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть точки $P_1, \dots, P_{m+1} \in \mathbb{R}^m$ образуют правильный m -мерный симплекс, т.е. длины $|P_i P_j|$ всех ребер одинаковы. Пусть E – это минимальный эллипсоид выпуклого тела $\Delta^m = \text{conv}\{P_1, \dots, P_{m+1}\}$. Рассмотрим ребро $P_1 P_2$ симплекса и гиперплоскость Π_{12} , проходящую через оставшиеся вершины $P_3, \dots, P_{m+1}$ перпендикулярно выделенному ребру $P_1 P_2$.

Пусть σ – это ортогональная симметрия пространства $\mathbb{R}^m$ относительно гиперплоскости Π_{12} . Очевидно, что $\sigma(P_1) = P_2$, $\sigma(P_2) = P_1$ и $\sigma(P_j) = P_j$ при $j \geq 3$. Это означает, что $\sigma(\Delta^m) = \Delta^m$. Следовательно, $\Delta^m = \sigma(\Delta^m) \subseteq \sigma(E)$. Инволюция σ является изометрией, поэтому $\text{vol}(\sigma(E)) = \text{vol}(E)$. Из единственности минимального эллипсоида вытекает, что $E = \sigma(E)$. Последнее равенство означает, что эллипсоид E симметричен относительно гиперплоскости Π_{12} , т.е. направление вектора $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ является главным. Аналогично, все направления $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_j$, $j \neq 1$, являются главными. Так как направления $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_j$, $j \neq 1, 2$, являются главными и не перпендикулярны, то они соответствуют одному и тому же собственному значению. Отсюда вытекает, что все направления $\mathbb{R}^m$ являются собственными (для оператора, порожденного квадратической частью задающего E уравнения), т.е. матрица квадратической части уравнения эллипсоида E пропорциональна единичной матрице. Полученное нами утверждение эквивалентно тому, что эллипсоид E является шаром. Мы установили уже, что шар E симметричен относительно гиперплоскости Π_{12} , поэтому центр шара лежит на этой гиперплоскости Π_{12} . Рассматривая другие пары индексов, мы получим, что центр шара E совпадает с центром правильного симплекса, т.е. центром описанного шара. Из включения $P_1 \in E$ вытекает, что радиус описанного шара не превосходит радиуса шара E . Минимальность шара E влечет их совпадение.

ЛЕММА 2. *Пусть $\omega = \{F_1, \dots, F_n\}$ – замкнутое покрытие пространства X , которое имеет одну и ту же кратность во всех точках. Тогда все множества F_j открыто-замкнуты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим эту общую кратность через l . Пусть $x \in F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_l}$. Тогда $Ux = X \setminus \bigcup_{i=l+1}^n F_{j_i}$ – окрестность точки x , и так как во всех точках этой окрестности кратность ω также равна l , то $Ux \subseteq F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_l}$. Это означает, что каждая точка x множества F_j содержится в F_j вместе с некоторой своей окрестностью, т.е. множество F_j открыто-замкнуто.

ЛЕММА 3. *Пусть $K \subset S^{m-1}$ – некоторое n -точечное подмножество и $A \subseteq S^{m-1}$ – замкнутое подмножество такое, что*

$$\mu(A) \geq \frac{l}{n} \mu(S^{m-1})$$

для некоторого натурального числа $l \leq n-1$. Тогда существует ортогональное преобразование $R \in \text{SO}(m)$ такое, что $|R(K) \cap A| \geq l+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $K = \{s_1, \dots, s_n\}$ – произвольное n -точечное подмножество сферы S^{m-1} . По точке s_j построим отображение

$$\Phi_j: \mathrm{SO}(m) \rightarrow S^{m-1},$$

задаваемое формулой $\Phi_j(R) = R(s_j) \in S^{m-1}$. Отображение Φ_j непрерывно и мера Хаара μ_H на группе $\mathrm{SO}(m)$ задает $\mathrm{SO}(m)$ -инвариантную меру μ_j на сфере S^{m-1} :

$$\mu_j(E) = \mu_H(\Phi_j^{-1}(E)).$$

Из единственности $\mathrm{SO}(m)$ -инвариантной меры на сфере S^{m-1} [5, примечание 18.3.7.4], [6, 3.2.47(3)] вытекает, что для всякого борелевского множества $E \subseteq S^{m-1}$ имеет место равенство $\mu_j(E) = \mu(E)$, где μ – каноническая мера на S^{m-1} ($(m-1)$ -мерный объем). Рассмотрим теперь на $\mathrm{SO}(m)$ семейство замкнутых множеств $\omega = \{\Phi_1^{-1}(A), \dots, \Phi_n^{-1}(A)\}$. Если $\mathrm{Ord} \omega \geq l+1$, т.е. некоторые $l+1$ элементов семейства пересекаются, то всякая точка R из этого $(l+1)$ -кратного пересечения и является искомым ортогональным преобразованием.

Предположим, что $\mathrm{Ord} \omega \leq l$. Если некоторая точка $R \in \mathrm{SO}(m)$ принадлежит не более чем $l-1$ элементам ω , то из замкнутости семейства ω следует, что существует окрестность UR , автоматически имеющая положительную меру, пересекающаяся не более чем с $l-1$ элементами ω . Тогда

$$\sum_j \mu_H(\Phi_j^{-1}(A)) \leq l \cdot \mu_H(\mathrm{SO}(m)) - \mu_H(UR) < l \cdot \mu_H(\mathrm{SO}(m)).$$

Полученное неравенство противоречит неравенству

$$\sum_j \mu_H(\Phi_j^{-1}(A)) = n \cdot \mu_H(\Phi_j^{-1}(A)) = n \cdot \mu(A) \geq l \cdot \mu(S^{m-1}).$$

Это означает, что каждая точка $\mathrm{SO}(m)$ принадлежит ровно l элементам семейства ω . Лемма 2 влечет открыто-замкнутость множеств $\Phi_j^{-1}(A)$. Из связности пространства $\mathrm{SO}(m)$ вытекает, что $\Phi_j^{-1}(A) = \mathrm{SO}(m)$, что противоречит условию $\mathrm{Ord} \omega \leq l < n$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $A \subseteq S^{m-1}$ – замкнутое подмножество и

$$\mu(A) \geq \frac{l}{m+1} \mu(S^{m-1})$$

для некоторого натурального числа $l \leq m$. Тогда существует такой правильный вписанный в S^{m-1} симплекс Δ^m , вершины некоторой l -мерной грани которого лежат в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 3 к множествам A и K – множеству всех вершин правильного вписанного в S^{m-1} симплекса. Тогда для некоторого ортогонального преобразования $R \in \mathrm{SO}(m)$ имеет место неравенство $|R(K) \cap A| \geq l+1$. Точки $R(K)$ и задают искомым правильный вписанный в S^{m-1} симплекс, вершины некоторой l -мерной грани которого лежат в A .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если эллипсоид E и шар $B \subset \mathbb{R}^m$ таковы, что вне E лежит не более $1/(m+1)$ части (по мере) ограничивающей шар B сферы, то $\text{vol}(E) \geq \text{vol}(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть $S = \partial B$ и $A = S \cap E$. Согласно условию нам дано, что

$$\mu(A) \geq \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \mu(S) = \frac{m}{m+1} \mu(S).$$

Тогда по следствию 1 (с $l = m$) существует правильный вписанный в S симплекс, все вершины которого лежат в A . По лемме 1 минимальным эллипсоидом этого симплекса является шар B . Найденный симплекс лежит в эллипсоиде E , поэтому $\text{vol}(E) \geq \text{vol}(B)$.

По всей видимости, в следствии 2 число $1/(m+1)$ не является окончательным. Но заменить его на число, большее $\lambda(m)$, нельзя. Несложно показать, что

$$\begin{aligned} \lambda(m) &= \frac{\alpha(m-1)}{\alpha(m)} \left[\frac{(m^2-1)^{(m-1)/2}}{m^{m+1}} + \int_{1/m}^1 (1-t^2)^{(m-1)/2} dt \right]; \\ \lambda(2) &= \frac{1}{3}, \quad \lambda(3) = \frac{1}{3}, \quad \lambda(4) = \frac{1}{\pi} \left(\arccos \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{16} \right) = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\varphi(4) + \frac{\sqrt{15}}{16} \right), \\ \lambda(5) &= 0.352. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 1. Для всякого числа $k > \lambda(m)$ существует эллипсоид E такой, что вне E лежит ровно k -я часть (по мере) сферы S^{m-1} и $\text{vol}(E) < \text{vol}(B^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для чисел $\varepsilon > 0$ и $b \leq 1$ положим

$$h = 1 - b, \quad a = b \sqrt{\frac{1 + \varepsilon - 1/m}{2b + \varepsilon - 1 - 1/m}}.$$

Рассмотрим заполненный эллипсоид

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \frac{x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2}{a^2} + \frac{(x_m - h)^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Легко проверить, что все точки шара B^m , для которых $x_m \geq -1/m + \varepsilon$, лежат в эллипсоиде E . При $\varepsilon = 0$ и $b < 1$ вне эллипсоида E находится ровно $\lambda(m)$ -я часть сферы S^{m-1} . При изменении ε от 0+ вне эллипсоида будет находиться k -я часть сферы S^{m-1} для k , изменяющегося от $\lambda(m)+$. Отношение объемов эллипсоида и шара равно

$$V(b, \varepsilon) = a^{m-1} b = b^m \left(\frac{1 + \varepsilon - 1/m}{2b + \varepsilon - 1 - 1/m} \right)^{(m-1)/2}.$$

Легко видеть, что $V(1, \varepsilon) = 1$. Покажем, что функция $V(b, \varepsilon)$ (при фиксированном $\varepsilon > 0$) является возрастающей по b в точке $b = 1$. Действительно,

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{V(b, \varepsilon)}{b(2b + \varepsilon - 1 - 1/m)} [(b-1)(m+1) + \varepsilon m].$$

Так как

$$\left. \frac{\partial V}{\partial b} \right|_{b=1} = \frac{\varepsilon t}{1 + \varepsilon - 1/t} > 0,$$

то существует $b_0 < 1$ такое, что $V|_{b=b_0} < V|_{b=1} = 1$. (Более того, при фиксированном $\varepsilon > 0$ функция V достигает своего минимума при $b = 1 - \varepsilon t/(t + 1)$.)

Напомним, что расстояние между точками на сфере мы берем в угловом измерении. Для подмножества $A \subseteq S^{m-1}$ положим

$$\Delta(A) = \{\varphi \in [0, \pi] : \exists P_1, P_2 \in A : |P_1 P_2| = \varphi\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Применение леммы 3 к двухточечному множеству K позволяет получить, что для всякого замкнутого подмножества A сферы, имеющего не менее чем половинную меру, $\Delta(A) = [0, \pi]$. Никакое подмножество сферы, лежащее в открытой полусфере и, следовательно, могущее иметь сколь угодно близкую к половинной меру, не содержит пары антиподальных точек. Это означает, что уже при $n = 2$ лемма 3 неутрачивается.

Будем говорить, что угол φ и натуральное число l являются *критическими* для конфигурации $K \subset S^{m-1}$, если в K имеется подмножество мощности l , в котором никакие две точки не образуют центральный угол φ и нет такого подмножества большей мощности. Понятие критического расстояния и критического числа для конфигурации K в евклидовом пространстве ввели Ларман и Роджерс [7], они показали фундаментальность этого понятия в проблеме реализации расстояния на множестве “большой” меры и на элементе разбиения $\mathbb{R}^m$. Важно отметить, что в конфигурации K некоторые точки могут повторяться, т.е. под точкой можно понимать точку с меткой.

ЛЕММА 4. Пусть угол φ и натуральное число l являются критическими для n -точечной конфигурации $K \subset S^{m-1}$. Тогда для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^{m-1}$ из условия

$$\mu(A) \geq \frac{l}{n} \mu(S^{m-1})$$

вытекает $\varphi \in \Delta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 3 к множествам A и K . Тогда для некоторого ортогонального преобразования $R \in SO(m)$ имеет место неравенство $|R(K) \cap A| \geq l + 1$. Следовательно, в множестве $R(K) \cap A$ имеется пара точек, образующих искомым угол φ .

В работе Лармана и Роджерса [7] даются общие конструкции построения конфигураций с небольшим значением отношения l/n и приводятся много специальных конфигураций в $\mathbb{R}^m$, некоторые из которых лежат на сферах. К каждой такой конфигурации применима лемма 4. Приведем три примера.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^{m-1}$ из условия

$$\mu(A) \geq \frac{1}{m+1} \mu(S^{m-1})$$

вытекает $\varphi(m) \in \Delta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждаемое включение эквивалентно утверждению следствия 1 при $l = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следствие 3 нельзя получить рассмотрением только двухточечных конфигураций. Это означает, что для некоторых углов φ и значений меры $\mu(A)$ множества $\Phi_1^{-1}(A)$ и $\Phi_2^{-1}(A)$ как-то взаимосвязаны, точнее говоря, всегда пересекаются, хотя с позиций теории меры они “имеют достаточно места” для дизъюнктности. Пример 1 показывает, что в следствии 1 при $l = m$ коэффициент $m/(m + 1)$ нельзя заменить на $k < 1 - \lambda(m)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^{22}$ из условия

$$\mu(A) \geq \frac{1}{100} \mu(S^{22})$$

вытекает

$$\arccos \frac{1}{3} = \pi - \varphi(3) \in \Delta(A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 4 к множествам A и K – конфигурации Лича–Конвея, построенной Ларманом и Роджерсом [7, лемма 11] по решетке в $\mathbb{R}^{24}$, открытой Личем [8], [9] и изученной Конвеем [10].

Пусть $LR(M, n, r)$ означает наибольшее число L такое, что в семействе всех n -точечных подмножеств M -точечного множества имеется подсемейство мощности L такое, что никакие две n -ки этого подсемейства не имеют ровно r общих элементов.

Рассмотрим $\mathbb{R}^M$ и пусть $K(M, n)$ – множество всех точек, у которых ровно n координат равны 1, а остальные координаты нулевые. Множество $K(M, n)$ лежит на гиперплоскости $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^M : x_1 + \dots + x_M = n\}$ и на центральной сфере радиуса $\sqrt{n}$; следовательно, множество $K(M, n)$ лежит на $(M - 2)$ -мерной сфере $S^{M-2}(C, R)$ гиперплоскости Π с центром $C = (n/M, \dots, n/M)$ и радиусом $R = \sqrt{(M - n)n/M}$. Пусть две n -ки имеют ровно r общих элементов, тогда расстояние между ними равно $\sqrt{2(n - r)}$. Обозначим через $\varphi(M, n, r)$ угол, под которым видны из центра C сферы $S^{M-2}(C, R)$ две точки, соответствующие таким n -кам. Из теоремы косинусов легко получить, что $\cos \varphi(M, n, r) = (Mr - n^2)/(Mn - n^2)$.

ЛЕММА 5. Угол $\varphi(M, n, r)$ и число $LR(M, n, r)$ являются критическими для C_M^n -точечной конфигурации $K(M, n) \subset S^{M-2}$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^{M-2}$ из условия

$$\mu(A) \geq \frac{LR(M, n, r)}{C_M^n} \mu(S^{M-2})$$

вытекает $\varphi(M, n, r) \in \Delta(A)$.

Конструкция тензорного квадрата конфигурации и оценка сверху числа $LR(M, n, r)$ позволила опровергнуть известную гипотезу Борсука о разбиении выпуклого тела на части меньшего диаметра (см. [3], [11, гл. 1], [12]–[15]). Приведем четыре результата.

ТЕОРЕМА ЭРДЕША–ШОША [7, лемма 17]. *Имеет место равенство*

$$LR(M, 3, 1) = \begin{cases} M & \text{для } M \equiv 0 \pmod{4}, \\ M - 1 & \text{для } M \equiv 1 \pmod{4}, \\ M - 2 & \text{для } M \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА ЛАРМАНА [16, теорема 4]. *Имеет место оценка*

$$LR(M, 5, 2) \leq 1485M(M - 1).$$

ТЕОРЕМА ФРАНКЛА–РЁДЛА [17]. *Имеет место оценка*

$$LR(4q, 2q, q) \leq (1, 99)^{4q}.$$

ТЕОРЕМА ФРАНКЛА–ВИЛЬСОНА [18]. *Если q является степенью простого числа, то выполнена оценка*

$$LR(4q, 2q, q) \leq 2C_{4q-1}^{q-1}.$$

Так как конфигурации на сфере нельзя гомотетировать, то в отличие от евклидова пространства, на сфере по конфигурации, “экономичной” для угла φ , нельзя построить конфигурацию, “экономичную” для другого угла.

ПРИМЕР 2. Для всякого $\delta < \pi/3$ и всякого натурального n существует замкнутое подмножество $A \subseteq S^1$, состоящее из конечного числа дуг, такое, что

$$\mu(A) = \frac{2\pi}{3} + \delta, \quad \Delta(A) \cap \left(\frac{2\pi}{3n} + \frac{\delta}{n}, \frac{4\pi}{3n} - \frac{\delta}{n} \right) = \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем окружность на $3n$ конгруэнтных дуг, которые последовательно занумеруем. В качестве множества A теперь возьмем $(\delta/(2n))$ -окрестность объединения дуг, номера которых кратны 3.

В некотором смысле угол $2\pi/3$ является исключительным для окружности [19, теорема 53]. Однако, увеличение размерности сферы позволяет “гомотетировать” конфигурации.

ЛЕММА 6. Пусть угол φ и натуральное число l являются критическими для n -точечной конфигурации $K \subset S^{m-1}$. Тогда для всякого угла $\psi \leq \varphi$ существует n -точечная конфигурация $K_\psi \subset S^m$, для которой угол ψ и натуральное число l являются критическими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сечение сферы S^m гиперплоскостью

$$x_{m+1} = \sqrt{\frac{\cos \psi - \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}}.$$

Тогда конфигурация K на $(m - 1)$ -мерной сфере сечения является искомой.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть угол φ и натуральное число l являются критическими для n -точечной конфигурации $K \subset S^{m-1}$. Тогда для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^m$ из условия

$$\mu(A) \geq \frac{l}{n} \mu(S^m)$$

вытекает $[0, \varphi] \subseteq \Delta(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \psi \leq \varphi$ и K_ψ – конфигурация леммы 6. Тогда согласно лемме 4 справедливо включение $\psi \in \Delta(A)$.

Пример 2 показывает, что для подмножеств сферы S^{m-1} весь отрезок $[0, \varphi]$ не обязан лежать в $\Delta(A)$, хотя согласно лемме 4 его правый конец принадлежит $\Delta(A)$. К работе Штейнгауза [20] о реализации расстояний на подмножествах $\mathbb{R}$ восходят современные исследования образов общих функций $f(x, y)$ на подмножествах положительной меры [21]–[23] и подмножествах Бэра второй категории [24]. Из цитированных работ можно вывести, что для всякого замкнутого подмножества $A \subseteq S^{m-1}$ положительной меры множество $\Delta(A)$ имеет непустую внутренность. Однако, как показывает пример 2, даже для множеств A отделенной от нуля меры нельзя утверждать, что в $\Delta(A)$ имеется некоторая постоянная окрестность нуля. Здесь уместно указать, что, как следует из теорем Холла [25], Ньюхауза [26] и Вильямса [27], для большого класса канторовых множеств на S^1 (нулевой меры) $\Delta(A) = [0, \pi]$. Положим

$$k(m) = \min\{k : \exists \text{ угол } \delta > 0 : [0, \delta] \subseteq \Delta(A) \quad \forall A \subseteq S^{m-1} : \\ A \text{ замкнуто, } \mu(A) \geq k\mu(S^{m-1})\}.$$

Наибольший такой угол δ будем обозначать через $\delta(m, k)$. Видимо, задачи оценки (нахождения асимптотического характера) чисел $k(m)$ и $\delta(m) = \inf\{\delta(m, k) : k > k(m)\}$ являются чрезвычайно сложными.

Из замечания 1 и примера 2 вытекает, что $k(2) = 1/2$. Из следствия 6, примененного к конфигурации вершин правильного симплекса, вытекает, что $k(m) \leq 1/m$. Применение следствия 6 к конфигурациям $K(M, n)$ (и оценки сверху чисел $LR(M, n, r)$) дает оценки сверху для $k(m)$. Из оценки теоремы Эрдеша–Шоша вытекает неравенство

$$k(m) \leq \frac{6}{m(m-1)};$$

из оценки теоремы Лармана вытекает неравенство

$$k(m) \leq \frac{17820}{(m-1)(m-2)(m-3)};$$

из оценки теоремы Франкла–Вильсона, формулы Стирлинга и теоремы Чебышева о распределении простых чисел вытекает неравенство

$$k(m) \leq \left(\frac{16}{27}\right)^{m/8}$$

(для больших m); близкое неравенство получается из оценки теоремы Франкла–Рёдла.

В работе [7] рассматриваются также специальные конфигурации, в которых координаты точек принимают значения 0 и ± 1 . Приведем один результат, получающийся применением такой конфигурации. В $\mathbb{R}^m$ рассмотрим конфигурацию $K = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i = \pm 1, i = 1, \dots, m\}$, лежащую на сфере радиуса $\sqrt{m}$. Как показали Франкл и Вильсон, если $m = 4p$ для простого p , то угол $\pi/2$ и некоторое число, не превосходящее $(1.8)^m$, являются критическими для конфигурации K . Из теоремы Чебышева о распределении простых чисел и следствия 6 вытекает неравенство $k(m) \leq (0.9)^{m/2}$.

Более сильная оценка числа $k(m)$ вытекает из недавней работы Райгородского [28].

Из разбиения евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ на $[3 + o(1)]^m$ замкнутых конгруэнтных множеств, ни одно из которых не содержит пары точек на расстоянии 1 [7], вытекает неравенство $k(m) > [3 + o(1)]^{-m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что если в лемме 3 потребовать справедливость строгого неравенства, то от замкнутости множества A можно отказаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Аналогично ситуации в евклидовом пространстве, очевидно, что если угол φ и число l являются критическими для некоторой n -точечной конфигурации на сфере S^{m-1} , то для всякого разбиения сферы на меньше чем n/l частей в некотором элементе разбиения имеется пара точек, видимых из центра сферы под углом φ . Однако, так как для подмножеств сферы нет аналога суммы Минковского, то на сфере нет аналога приема Райского [29], позволяющего реализовывать все расстояния (углы) на одном элементе разбиения. В работах [30]–[33] дан топологический метод доказательства реализуемости всех углов на некотором элементе замкнутого покрытия сферы S^{m-1} мощности $\leq m$. В работе [34] рассматривается задача реализуемости расстояний на элементе покрытия сферы замкнутыми конгруэнтными множествами. Оригинальная работа Хадвигера [34] автору недоступна, формулировка же соответствующего результата в [3] (а поэтому и в [33]) приведена, видимо, с опечаткой.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аналог следствия 2 для шаров тривиален. Если шары B_1 и $B_2 \subset \mathbb{R}^m$ таковы, что вне B_1 лежит не более $1/2$ части (по мере) ограничивающей шар B_2 сферы, то $\text{vol}(B_1) \geq \text{vol}(B_2)$. Сравнение объемов двух эллипсоидов легко сводится к следствию 2, но ответ зависит от соотношения наибольшей и наименьшей полуосей “несильно выходящего наружу” эллипсоида.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // Studies and Essays. Presented to R. Courant on his 60th Birthday. New York, 1948. P. 187–204.
- [2] Загускин В. Л. Об описанных и вписанных эллипсоидах экстремального объема // УМН. 1958. Т. 13. № 6. С. 89–92.
- [3] Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. М.: Наука, 1971.
- [4] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
- [5] Берже М. Геометрия. Т. 2. М.: Мир, 1984.
- [6] Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
- [7] Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematica. 1972. V. 19. № 1. P. 1–24.
- [8] Leech J. Some sphere packings in higher space // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 657–682.
- [9] Leech J. Notes on sphere packings // Canad. J. Math. 1967. V. 19. P. 251–267.
- [10] Conway J. H. A group of order 8, 315, 553, 613, 086, 720, 000 // Bull. London Math. Soc. 1969. V. 1. P. 79–88.

- [11] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965.
- [12] Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk's conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 29. № 1. P. 60–62.
- [13] Nilli A. On Borsuk's problem // Contemp. Math. 1994. V. 178. P. 209–210.
- [14] Kalai G. Combinatorics and convexity // Proc. International Congress Math. Zürich. V. 1. Basel: Birkhäuser-Verlag, 1994. P. 1363–1374.
- [15] Райгородский А. М. О размерности в проблеме Борсука // УМН. 1997. Т. 52. № 6. С. 181–182.
- [16] Larman D. G. A note on the realization of distances within sets in Euclidean space // Comm. Math. Helv. 1978. V. 53. P. 529–535.
- [17] Frankl P., Rödl V. Forbidden intersections // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 300. № 1. P. 259–286.
- [18] Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 357–368.
- [19] Хадвигер Г., Дебрунер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. М.: Наука, 1965.
- [20] Steinhaus H. Sur les distances des points des ensembles de mesure positive // Fund. Math. 1920. V. 1. P. 99–104.
- [21] Kurepa S. Note on the difference set of two measurable sets in E^n // Glasnik Mat. -Fiz. Astronom. Ser. II. 1960. V. 15. P. 99–105.
- [22] Kuczma M. E., Kuczma M. An elementary proof and an extension of a theorem of Steinhaus // Glasnik Mat. 1971. V. 6. № 1. P. 11–18.
- [23] Sander W. Verallgemeinerungen eines Satzes von H. Steinhaus // Manuscripta Math. 1976. V. 18. P. 25–42; // Errata. 1977. V. 20. P. 101–103.
- [24] Sander W. A generalization of a theorem of S. Piccard // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 73. № 2. P. 281–282.
- [25] Hall M. Jr. On the sum and product of continued fractions // Ann. of Math. 1948. V. 48. P. 966–993.
- [26] Newhouse S. Nondensity of axiom $A(a)$ on S^2 // Proc. Sympos. Pure Math. V. 14. Providence, R.I.: AMS, 1970. P. 191–203.
- [27] Williams R. F. How big is the intersection of two thick Cantor sets? // Contemp. Math. 1991. V. 117. P. 163–175.
- [28] Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства // УМН. 2000. Т. 55. № 2. С. 147–148.
- [29] Райский Д. Е. Реализация всех расстояний при разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на $n + 1$ часть // Матем. заметки. 1970. Т. 7. № 3. С. 319–323.
- [30] Hopf H. Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs und Überdeckungssätze // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 129–139.
- [31] Hadwiger H. Eine Bemerkung zum Borsukschen Antipodensatz // Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich. 1944. V. 89. P. 211–214.
- [32] Larman D. G. On the realization of distances within coverings of an n -sphere // Mathematica. 1967. V. 14. № 2. P. 203–206.
- [33] Богатый С. А. Топологические методы в комбинаторных задачах // УМН. 1986. Т. 41. № 6. С. 37–48.
- [34] Hadwiger H. Überdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen // Portugal. Math. 1944. V. 4. P. 238–242.