Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Майлыбаев, С. С. Григорян, О подготовительной теореме Вейерштрасса, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 194–199

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm495>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 16:49:55

УДК 517.55

О ПОДГОТОВИТЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ВЕЙЕРШТРАССА

С. С. Григорян, А. А. Майлыбаев

Рассматривается подготовительная теорема Вейерштрасса, согласно которой аналитическая функция многих переменных, обращающаяся в некоторой точке в нуль, представима в окрестности этой точки в виде произведения ненулевой аналитической функции и полинома по одной из переменных. Коэффициенты полинома являются аналитическими функциями оставшихся переменных. В настоящей работе предлагается метод определения множителей (ненулевой функции и коэффициентов полинома) в виде рядов Тейлора, коэффициенты которых вычисляются при помощи явной рекуррентной процедуры по производным исходной функции. В качестве приложения выведена явная формула, локально описывающая бифуркационную диаграмму, отвечающую двукратному корню, с точностью до членов второго порядка.

Библиография: 6 названий.

Рассмотрим аналитическую функцию многих переменных $f(z, \mathbf{p})$, $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$, которая обращается в нуль в точке z_0 , $\mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$. Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса [1], [2] в окрестности точки z_0 , $\mathbf{p}_0$ функция $f(z, \mathbf{p})$ представима единственным образом в виде произведения двух аналитических функций, одна из которых является полиномом по $z - z_0$ со старшим коэффициентом, равным единице, а другая функция не равна нулю при $z = z_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Представление $f(z, \mathbf{p})$ в виде произведения двух множителей упрощает задачу исследования корней уравнения $f(z, \mathbf{p}) = 0$ и их свойств. Например, если $f(z, \mathbf{p})$ – полином по z , то из подготовительной теоремы Вейерштрасса следует, что можно существенно понизить порядок уравнения при исследовании зависимости от $\mathbf{p}$ отдельных корней полинома $f(z, \mathbf{p})$. Такая операция особенно полезна при анализе кратных корней в задачах устойчивости, где целью исследования является определение области устойчивости (множества значений параметров $\mathbf{p}$, при которых корни $z(\mathbf{p})$ удовлетворяют некоторому условию) [3]. Другой областью, где данная теорема может быть эффективно использована, является исследование бифуркационных диаграмм (множеств значений параметров $\mathbf{p}$, при которых имеются кратные корни).

Описанные выше приложения осуществимы при условии, что множители, на которые по подготовительной теореме разлагается функция $f(z, \mathbf{p})$, известны. В настоящей работе предлагается метод определения этих множителей в виде рядов Тейлора, коэффициенты которых вычисляются явно по производным функции $f(z, \mathbf{p})$ в точке $z = z_0$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант РФФИ–ГФЕН № 99-01-39129, во время визита в Даляньский технический университет (Китай).

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. В качестве приложения выведена явная формула, локально описывающая бифуркационную диаграмму, отвечающую двукратному корню $z(\mathbf{p})$, с точностью до членов второго порядка.

Подготовительная теорема для случая бесконечно дифференцируемых функций была доказана Мальгранжем [4]. Результаты настоящей работы без изменений переносятся на этот случай и позволяют найти ряды Тейлора искомых функций.

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА [1], [2]. Пусть аналитическая функция $f(z, \mathbf{p})$ обращается в нуль при $z = z_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, причем $z = z_0$ является m -кратным корнем уравнения $f(z, \mathbf{p}_0) = 0$, т.е.

$$f(z_0, \mathbf{p}_0) = \frac{\partial f}{\partial z} = \dots = \frac{\partial^{m-1} f}{\partial z^{m-1}} = 0, \quad \frac{\partial^m f}{\partial z^m} \neq 0,$$

где производные берутся при $z = z_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Тогда существует окрестность $U_0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ точки $(z_0, \mathbf{p}_0)$, в которой функция $f(z, \mathbf{p})$ может быть представлена в виде

$$f(z, \mathbf{p}) = ((z - z_0)^m + a_{m-1}(\mathbf{p})(z - z_0)^{m-1} + \dots + a_0(\mathbf{p}))b(z, \mathbf{p}), \quad (1)$$

где $a_0(\mathbf{p}), \dots, a_{m-1}(\mathbf{p}), b(z, \mathbf{p})$ — аналитические функции, однозначно определяемые функцией $f(z, \mathbf{p})$, причем $a_i(\mathbf{p}_0) = 0$, $b(z_0, \mathbf{p}_0) \neq 0$.

Для осуществления разложения (1) необходимо определить функции $a_i(\mathbf{p})$ и $b(z, \mathbf{p})$. В окрестности точки $z = z_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ функции $a_i(\mathbf{p})$ и $b(z, \mathbf{p})$ представимы в виде рядов Тейлора

$$a_i(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{h}} \frac{1}{\mathbf{h}!} a_{i, \mathbf{h}} \Delta \mathbf{p}^{\mathbf{h}}, \quad b(z, \mathbf{p}) = \sum_{k, \mathbf{h}} \frac{1}{k! \mathbf{h}!} b_{k, \mathbf{h}} \Delta z^k \Delta \mathbf{p}^{\mathbf{h}}, \quad (2)$$

где суммы берутся по всем $k \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $h_i \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел), и использованы следующие обозначения:

$$a_{i, \mathbf{h}} = \frac{\partial^{|\mathbf{h}|} a_i}{\partial p_1^{h_1} \dots \partial p_n^{h_n}}, \quad b_{k, \mathbf{h}} = \frac{\partial^{k+|\mathbf{h}|} b}{\partial z^k \partial p_1^{h_1} \dots \partial p_n^{h_n}}, \quad |\mathbf{h}| = h_1 + \dots + h_n,$$

$$\Delta \mathbf{p}^{\mathbf{h}} = \prod_{j=1}^n (p_j - p_j^0)^{h_j}, \quad \Delta z^k = (z - z_0)^k, \quad \mathbf{h}! = h_1! \dots h_n!.$$

Все производные вычисляются при $z = z_0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$. Под производной нулевого порядка подразумевается значение функции в точке, в частности, $b_{k,0} = \partial^k b / \partial z^k$. Аналогично обозначаются производные функции $f(z, \mathbf{p})$. Определение функций $a_i(\mathbf{p}), b(z, \mathbf{p})$ эквивалентно нахождению производных $a_{i, \mathbf{h}}, b_{k, \mathbf{h}}$, определяющих коэффициенты разложения (2). В следующей теореме дается явное выражение для искомых производных через производные функции $f(z, \mathbf{p})$.

ТЕОРЕМА. Производные $a_{i,\mathbf{h}}$ и $b_{k,\mathbf{h}}$ функций $a_i(\mathbf{p}), b(z, \mathbf{p})$ в соотношении (1) удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$a_{i,\mathbf{h}} = \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} F_{j,\mathbf{h}}, \quad F_{j,\mathbf{h}} = f_{j,\mathbf{h}} - \sum_{k=0}^j \sum_{\substack{\mathbf{h}'+\mathbf{h}''=\mathbf{h} \\ \mathbf{h}' \neq 0, \mathbf{h}'' \neq 0}} c(j, k; \mathbf{h}', \mathbf{h}'') a_{k,\mathbf{h}'} b_{j-k,\mathbf{h}''}, \quad (3)$$

$$b_{k,\mathbf{h}} = \frac{k!}{(m+k)!} \left[f_{m+k,\mathbf{h}} - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\substack{\mathbf{h}'+\mathbf{h}''=\mathbf{h} \\ \mathbf{h}' \neq 0}} c(m+k, j; \mathbf{h}', \mathbf{h}'') a_{j,\mathbf{h}'} b_{m+k-j,\mathbf{h}''} \right], \quad (4)$$

где коэффициенты α_{ij} ($i \geq j$), $c(k, j; \mathbf{h}', \mathbf{h}'')$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_{jj} &= \frac{m!}{j! f_{m,0}}, \quad \alpha_{ij} = -\frac{m!}{f_{m,0}} \sum_{k=j}^{i-1} \frac{f_{m+i-k,0} \alpha_{kj}}{(m+i-k)!} \quad (i > j), \\ c(j, k; \mathbf{h}', \mathbf{h}'') &= \frac{j!}{(j-k)!} \prod_{s=1}^n \frac{(h'_s + h''_s)!}{h'_s! h''_s!}. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношения (4) для $\mathbf{h} = 0$ имеют вид

$$b_{k,0} = \frac{k! f_{m+k,0}}{(m+k)!}. \quad (6)$$

Они получаются путем $(m+k)$ -кратного дифференцирования по z тождества $f(z, \mathbf{p}_0) = (z - z_0)^m b(z, \mathbf{p}_0)$. Возьмем производную $\partial^{i+|\mathbf{h}|} / \partial z^i \partial \mathbf{p}_1^{h_1} \dots \partial \mathbf{p}_n^{h_n}$ от обеих частей равенства (1):

$$f_{i,\mathbf{h}} = \sum_{j=0}^{\min(i,m)} \sum_{\mathbf{h}'+\mathbf{h}''=\mathbf{h}} c(i, j; \mathbf{h}', \mathbf{h}'') a_{j,\mathbf{h}'} b_{i-j,\mathbf{h}''}, \quad a_{m,\mathbf{h}'} = \begin{cases} 1, & \mathbf{h}' = 0, \\ 0, & \mathbf{h}' \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть $i < m$. Выразив члены суммы, содержащие $a_{j,\mathbf{h}'}$, через остальные слагаемые и используя (6), получим

$$\sum_{j=0}^i \beta_{ij} a_{j,\mathbf{h}} = F_{i,\mathbf{h}}, \quad \beta_{ij} = \frac{i! f_{m+i-j,0}}{(m+i-j)!}, \quad (8)$$

где величины $F_{i,\mathbf{h}}$ определены в (3). Уравнения (8) для $i = 0, \dots, m-1$ можно записать в матричной форме

$$\mathbf{G} \begin{pmatrix} a_{0,\mathbf{h}} \\ \vdots \\ a_{m-1,\mathbf{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{0,\mathbf{h}} \\ \vdots \\ F_{m-1,\mathbf{h}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \beta_{00} & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{10} & \beta_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \beta_{(m-1)0} & \beta_{(m-1)1} & \cdots & \beta_{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Так как по условию $\beta_{ii} = i! f_{m,0}/m! \neq 0$, то $\det \mathbf{G} \neq 0$ и, следовательно, система уравнений имеет единственное решение вида

$$\begin{pmatrix} a_{0,\mathbf{h}} \\ \vdots \\ a_{m-1,\mathbf{h}} \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} F_{\mathbf{h},0} \\ \vdots \\ F_{\mathbf{h},m-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ \alpha_{(m-1)0} & \cdots & \alpha_{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

То, что матрица $\mathbf{G}^{-1}$ имеет вид (9) с элементами α_{ij} , определенными в (5), можно доказать путем непосредственной проверки тождества $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – единичная матрица). Равенство (9) представляет собой матричную запись соотношений (3) теоремы.

Рассмотрим случай $i \geq m$. Тогда соотношение (4) теоремы получается перестановкой членов в равенстве (7) с учетом (6) и при замене i на $m+k$.

Соотношения (3)–(5) представляют собой рекуррентные соотношения, позволяющие находить производные функций $a_i(\mathbf{p})$, $b(z, \mathbf{p})$ по производным функции $f(z, \mathbf{p})$ в следующей последовательности: $b_{k,0} \rightarrow a_{i,\mathbf{h}}, b_{k,\mathbf{h}}$ ($|\mathbf{h}| = 1$) $\rightarrow a_{i,\mathbf{h}}, b_{k,\mathbf{h}}$ ($|\mathbf{h}| = 2$) $\rightarrow \dots$. При этом для определения производной $a_{i,\mathbf{h}}$ необходимо вычислить на предыдущих этапах значения $a_{j,\mathbf{h}'}, b_{j,\mathbf{h}'}$ для $j \leq i + (|\mathbf{h} - \mathbf{h}'| - 1)m$ и $\mathbf{h}' < \mathbf{h}$ ($h'_s \leq h_s$ для всех $s = 1, \dots, n$ и $h'_s < h_s$ для некоторого s). Таким образом, значение $a_{i,\mathbf{h}}$ определяется производными $f_{k,\mathbf{h}''}$, где $k \leq i + |\mathbf{h} - \mathbf{h}''|m$ и $\mathbf{h}'' \leq \mathbf{h}$.

Первые шаги рекуррентной процедуры имеют вид

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{p}_0) &= 0, \quad \frac{\partial^k b}{\partial z^k} = \frac{k!}{(m+k)!} \frac{\partial^{m+k} f}{\partial z^{m+k}}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial p_s} = \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^j \partial p_s}, \\ \frac{\partial^{k+1} b}{\partial z^k \partial p_s} &= \frac{k!}{(m+k)!} \left[\frac{\partial^{m+k+1} f}{\partial z^{m+k+1} \partial p_s} - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m+k)!}{(m+k-j)!} \frac{\partial a_j}{\partial p_s} \frac{\partial^{m+k-j} b}{\partial z^{m+k-j}} \right], \\ \frac{\partial^2 a_i}{\partial p_s \partial p_t} &= \sum_{j=0}^i \alpha_{ij} \left[\frac{\partial^{j+2} f}{\partial z^j \partial p_s \partial p_t} - \sum_{k=0}^j \frac{j!}{(j-k)!} \left(\frac{\partial a_k}{\partial p_s} \frac{\partial^{j-k+1} b}{\partial z^{j-k} \partial p_t} + \frac{\partial a_k}{\partial p_t} \frac{\partial^{j-k+1} b}{\partial z^{j-k} \partial p_s} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

ПРИМЕР. Функцию $f(z, \mathbf{p})$ можно рассматривать как семейство функций одной переменной z , где $\mathbf{p}$ является вектором параметров. Бифуркационной диаграммой называется множество значений вектора $\mathbf{p}$, при которых функция $f(z, \mathbf{p})$ имеет кратные корни z . Рассмотрим двукратный корень $z = z_0$. Из подготовительной теоремы Вейерштрасса следует, что поверхность в пространстве $\mathbf{p}$, на которой этот корень остается двукратным (при этом значение корня может меняться), определяется равенством нулю дискриминанта $D = (a_1(\mathbf{p}))^2 - 4a_0(\mathbf{p})$ уравнения $(z - z_0)^2 + a_1(\mathbf{p})(z - z_0) + a_0(\mathbf{p}) = 0$. Подставив разложения (2) в уравнение $D = 0$, запишем уравнение этой поверхности в виде

$$\begin{aligned} D &= -4 \sum_{r=1}^n \frac{\partial a_0}{\partial p_r} (p_r - p_r^0) \\ &+ \sum_{s,t=1}^n \left(\frac{\partial a_1}{\partial p_s} \frac{\partial a_1}{\partial p_t} - 2 \frac{\partial^2 a_0}{\partial p_s \partial p_t} \right) (p_s - p_s^0)(p_t - p_t^0) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\|\mathbf{p}\|$ – норма в $\mathbb{C}^n$; первые и вторые производные функций $a_0(\mathbf{p})$, $a_1(\mathbf{p})$ выражаются через производные функции $f(z, \mathbf{p})$ по формулам (10); коэффициенты α_{ij} согласно (5) определяются соотношениями

$$\alpha_{00} = \alpha_{11} = \frac{2}{\partial^2 f / \partial z^2}, \quad \alpha_{10} = -\frac{2}{3} \frac{\partial^3 f / \partial z^3}{(\partial^2 f / \partial z^2)^2}. \quad (12)$$

Уравнениями (10)–(12) поверхность $D = 0$ описывается в явном виде через производные функции $f(z, \mathbf{p})$ с точностью до членов второго порядка. Аналогичным способом могут быть получены соотношения, описывающие бифуркационную диаграмму в окрестности корня произвольной кратности.

Бифуркационная диаграмма семейства функций $f(z, \mathbf{p})$ имеет физический смысл. Пусть $f(z, \mathbf{p})$ – многочлен по z , возникающий после замены $z = -\lambda^2$ из характеристического полинома линейной гамильтоновой или неконсервативной (циркуляционной) механической системы. Тогда часть бифуркационной диаграммы, характеризующаяся положительными вещественными корнями, является границей области устойчивости, отвечающей колебательной форме потери устойчивости (флаттеру) [5], [6]. При этом соотношение (11) описывает границу области устойчивости локально с точностью до членов второго порядка.

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма семейства полиномов и ее аппроксимация

Для примера рассмотрим двухпараметрическую полиномиальную функцию

$$f(z, \mathbf{p}) = z^5 - 13z^4 + \left(62 + \frac{1}{4}p_1\right)z^3 - (134 + p_1^2)z^2 + (129 + p_2)z - 45 + p_1p_2.$$

При $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$ полином $f(z, \mathbf{p}_0)$ имеет двукратные корни $z = 1$, $z = 3$ и простой корень $z = 5$. Следовательно, бифуркационная диаграмма в окрестности точки $\mathbf{p}_0 = (0, 0)$ состоит из двух кривых. Эти кривые задаются уравнением $D = 0$, записанным в точках $(z_0, p_1^0, p_2^0) = (1, 0, 0)$ и $(3, 0, 0)$. Используя соотношения (10)–(12), найдем уравнения кривых $D = 0$ с точностью до членов второго порядка

$$\begin{aligned} z_0 = 1 : \quad & \frac{1}{16}p_1 + \frac{1}{4}p_2 - \frac{15595}{65536}p_1^2 + \frac{2525}{8192}p_1p_2 + \frac{229}{4096}p_2^2 = 0, \\ z_0 = 3 : \quad & \frac{27}{8}p_1 + \frac{3}{2}p_2 - \frac{13815}{4096}p_1^2 + \frac{661}{512}p_1p_2 + \frac{49}{256}p_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Точный вид бифуркационной диаграммы и ее аппроксимация (13) изображены на рис. 1 сплошной и точечной линиями соответственно. Область (I) на рис. 1, определяемая неравенствами $D > 0$, отвечает наличию лишь вещественных корней $z(\mathbf{p})$. Отметим, что приближенные уравнения для бифуркационной диаграммы (13) были вычислены по значениям производных функции $f(z, \mathbf{p})$ в точках $(z_0, p_1^0, p_2^0) = (1, 0, 0)$ и $(3, 0, 0)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Weierstrass K. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze // *Mathematische Werke*, II. Berlin: Mayer und Müller, 1895. P. 135–188.
- [2] Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, Ч. II. М.: Наука, 1976.
- [3] Майлыбаев А. А. Об устойчивости полиномов, зависящих от параметров // *Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления*. 2000. № 2. С. 5–12.
- [4] Мальгранж Б. Подготовительная теорема для дифференцируемых функций // *Особенности дифференцируемых отображений. Сборник статей*. М.: Мир, 1968. С. 183–189.
- [5] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985.
- [6] Сейранян А. П. Бифуркации в однопараметрических циркуляционных системах // *Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела*. 1994. № 1. С. 142–148.

Институт механики Московского государственного университета
E-mail: grigor@inmech.msu.su, mailybaev@inmech.msu.su

Поступило
22.05.2000