Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо, Степенная проблема моментов на компактном интервале, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 200–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:02:10

УДК 517.5

СТЕПЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ НА КОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо

В этой статье рассмотрена степенная проблема моментов на компактном интервале. В невырожденном случае множество всех решений описано в терминах дробно-линейных преобразований. Указана явная формула для резольвентной матрицы.

Библиография: 9 названий.

1. Введение. Пусть $[a, b]$ – фиксированный компактный интервал в $\mathbb{R}$, и пусть заданы $(m \times m)$ -матрицы $s_0, s_1, \dots, s_k$, $k \geq 1$. В статье изучена проблема моментов, в которой требуется описать множество $\mathcal{Z}$ всех монотонно возрастающих непрерывных слева эрмитовых матриц-функций (м.ф.) $\sigma(t)$, $t \in [a, b]$, таких, что

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \quad j = 0, \dots, k. \quad (1)$$

Ранее проблема (1) была изучена М. Г. Крейном. Подробное изложение его результатов содержится в книге [1]. В неопределенном случае, когда проблема (1) имеет бесконечно много решений, вся их совокупность описывается с помощью некоторого дробно-линейного преобразования. Матрица коэффициентов такого дробно-линейного преобразования называется *резольвентной* матрицей. В [1] резольвентная матрица строится по заданным моментам $s_0, s_1, \dots, s_k$, но в результате *явной* процедуры. Основным результатом данной статьи являются *явные* формулы для построения резольвентной матрицы по заданным моментам $s_0, s_1, \dots, s_k$ (см. формулы (9) и (30)).

В этой статье мы применяем метод В. П. Потапова решения интерполяционных задач (см. [2]) и некоторые его обобщения в случае неванлиновской интерполяции (см. [3], [4]) и в случае стилтьесовской интерполяции (см. [5]–[7]).

2. Система основных матричных неравенств. Рассмотрим сначала случай четного числа моментов $k = 2n + 1$, $n \geq 0$. Обозначим символом $\mathcal{L}$ множество м.ф. следующего вида:

$$s(z) = \int_a^b (t - z)^{-1} d\sigma(t), \quad \sigma \in \mathcal{L}. \quad (2)$$

Ясно, что $s(z)$ определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. В силу формулы обращения для преобразования Стилтеса (см. [8, с. 629–636]) формула (2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{Z}$. Поэтому для решения проблемы моментов (1) достаточно описать все м.ф. вида (2).

Следует отметить, что в [8] формула обращения доказана для скалярных функций. Матричное обобщение можно получить по схеме, приведенной в [9]. Это замечание будет подразумеваться и при других аналогичных ситуациях в этой статье.

Введем блочные матрицы

$$T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m},$$

$$\begin{aligned} R_T(z) &= (I - zT)^{-1}, \quad \tilde{K}_1 = \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, \quad \tilde{K}_2 = \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^n, \\ K_1 &= -a\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2, \quad K_2 = b\tilde{K}_1 - \tilde{K}_2, \\ v &= \text{col}[I, 0, \dots, 0], \quad u = -\text{col}[s_0, s_1, \dots, s_n], \\ u_1 &= u - aTu, \quad u_2 = -u + bTu. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s(z) \in \mathcal{L}$. Тогда $s(z)$ при $\text{Im } z \neq 0$ удовлетворяет системе основных матричных неравенств Потанова

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_T(z)[vs_r(z) - u_r] \\ \hline * & \frac{s_r(z) - s_r^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь

$$s_1(z) = (z - a)s(z), \quad s_2(z) = (b - z)s(z). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = 1$. Получим интегральные представления для блоков неравенства (3). Для блока 11 имеем

$$\begin{aligned} K_1 &= -a\tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \\ &= -a \int_a^b \begin{bmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^n I \end{bmatrix} d\sigma(t) [I \ tI \ \dots \ t^n I] + \int_a^b \begin{bmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^n I \end{bmatrix} t d\sigma(t) [I \ tI \ \dots \ t^n I] \\ &= \int_a^b \begin{bmatrix} I \\ tI \\ \vdots \\ t^n I \end{bmatrix} (t - a) d\sigma(t) [I \ tI \ \dots \ t^n I] = \int_a^b R_T(t)v(t - a) d\sigma(t) v^* R_T^*(t). \end{aligned}$$

Для блока 12, используя очевидные тождества

$$u = - \int_a^b R_T(t)v d\sigma(t), \quad R_T(z)T R_T(t) = \frac{R_T(t) - R_T(z)}{t - z},$$

получим

$$R_T(z)[vs_1(z) - u_1] = \int_a^b \frac{R_T(t)}{t - z} v(t - a) d\sigma(t).$$

Для блока 22 имеем

$$\frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} = \int_a^b \frac{1}{t - z} (t - a) d\sigma(t) \frac{1}{t - \bar{z}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_T(z)[vs_1(z) - u_1] \\ \hline * & \frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \\ &= \int_a^b \left[\begin{array}{c} R_T(t)v \\ (t - \bar{z})^{-1}I \end{array} \right] (t - a) d\sigma(t) [v^* R_T^*(z) (t - z)^{-1}I] \geq 0. \end{aligned}$$

Аналогично, для $r = 2$ имеем

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_T(z)[vs_2(z) - u_2] \\ \hline * & \frac{s_2(z) - s_2^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \\ &= \int_a^b \left[\begin{array}{c} R_T(t)v \\ (t - \bar{z})^{-1}I \end{array} \right] (b - t) d\sigma(t) [v^* R_T^*(z) (t - z)^{-1}I] \geq 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теперь мы докажем обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть м.ф. $s(z)$ определена и голоморфна в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и построенные по ней м.ф. $s_1(z)$ и $s_2(z)$ (см. (4)) удовлетворяют системе (3). Тогда $s(z)$ допускает представление (2) и участвующая в этом представлении м.ф. $\sigma(t) \in \mathcal{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (3) следует, что

$$\frac{s_r(z) - s_r^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad r = 1, 2.$$

Следовательно (см. [1, с. 526]),

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - z}, \quad (5)$$

где $\sigma(t)$ – монотонно возрастающая эрмитова м.ф. ограниченной вариации.

Рассмотрим м.ф.

$$\begin{aligned} S(z) &= z^{2n+2}s(z) + z^{2n+1}s_0 + z^{2n}s_1 + \cdots + zs_{2n} + s_{2n+1}, \\ S_1(z) &= z^{2n+2}s_1(z) + z^{2n+2}s_0 + z^{2n+1}(s_1 - as_0) + \cdots + z(s_{2n+1} - as_{2n}), \\ S_2(z) &= z^{2n+2}s_2(z) - z^{2n+2}s_0 - z^{2n+1}(s_1 - bs_0) - \cdots - z(s_{2n+1} - bs_{2n}). \end{aligned}$$

Имеем

$$S_1(z) + as_{2n+1} = (z - a)S(z), \quad S_2(z) - bs_{2n+1} = (b - z)S(z). \quad (6)$$

Умножим неравенство (4) слева на

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ \bar{z}^n I & \bar{z}^{n-1} I & \dots & I & \bar{z}^{n+1} I \end{bmatrix},$$

а справа на T^* . Получим (см. [2])

$$\left[\begin{array}{c|c} s_{2n+1} - as_{2n} & \frac{S_1(z)}{z} \\ \hline * & \frac{S_1(z) - S_1^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} bs_{2n} - s_{2n+1} & \frac{S_2(z)}{z} \\ \hline * & \frac{S_2(z) - S_2^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \geq 0.$$

Из этих неравенств следует, что в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ выполняются неравенства $(S_r(z) - S_r^*(z))/(2i) \geq 0$. Отсюда и в силу (6) получим

$$\frac{(z - a)S(z) - (\bar{z} - a)S^*(z)}{2i} \geq 0, \quad \frac{(b - z)S(z) - (b - \bar{z})S^*(z)}{2i} \geq 0.$$

Следовательно (см. [1, с. 526]),

$$S(z) = \int_a^b (t - z)^{-1} d\Sigma(t),$$

где $\Sigma(t)$ – монотонно возрастающая м.ф. ограниченной вариации. Но тогда

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \|S(z)\| = 0,$$

т.е.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left\| z^{2n+2} \left\{ s(z) + \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots + \frac{s_{2n+1}}{z^{2n+2}} \right\} \right\| = 0.$$

Отсюда и из (5) по теореме Гамбургера–Неванлинны получим, что участвующая в интегральном представлении (5) м.ф. $\sigma(t) \in \mathcal{L}$.

Теорема доказана.

3. Решение системы матричных неравенств методом факторизации. В

дальнейшем мы ограничимся рассмотрением невырожденного случая $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. Отсюда следует, что $\tilde{K}_1 > 0$. Предположим еще, что $\det \tilde{K}_2 \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть при $r = 1, 2$ задана функция

$$U_r(z) = \left\{ I - iz \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z) K_r^{-1} [v, u_r] J \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_r & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_r \\ \hline 0 & I \end{array} \right], \quad (7)$$

$$M_1 = -au^* \tilde{K}_2^{-1} u, \quad M_2 = bu^* \tilde{K}_2^{-1} u,$$

$$N_1 = -bv^* K_1^{-1} \tilde{K}_2 K_2^{-1} v, \quad N_2 = av^* K_1^{-1} \tilde{K}_2 K_2^{-1} v, \quad J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -iI \\ \hline iI & 0 \end{array} \right].$$

Тогда

$$J - U_r(z) J U_r^*(z) = i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z) K_r^{-1} R_{T^*}^*(z) [v, u_r]. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
 J - U_r(z)JU_r^*(z) &= iz \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}[v, u_r] - i\bar{z} \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_r] \\
 &\quad - z\bar{z} \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}[v, u_r]J \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_r] \\
 &= iz \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}[v, u_r] - i\bar{z} \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_r] \\
 &\quad - iz\bar{z} \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}\{K_rT^* - TK_r\}K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_r] \\
 &= i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[v, u_r].
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались очевидными тождествами

$$[v, u_r]J[v, u_r]^* = i(K_rT^* - TK_r), \quad r = 1, 2.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$U(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & \beta(z) \\ \hline \gamma(z) & \delta(z) \end{array} \right], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha(z) &= I + zv^*R_{T^*}(z)\left(\frac{bK_1 + aK_2}{b-a}\right)^{-1} \cdot u, \\
 \gamma(z) &= u^*R_{T^*}(z)\left(\frac{bK_1 + aK_2}{b-a}\right)^{-1} \cdot u, \\
 \beta(z) &= (z-b)(z-a)v^*R_{T^*}(z)\frac{aK_1^{-1} + bK_2^{-1}}{b-a}v, \\
 \delta(z) &= I + u^*R_{T^*}(z)\frac{(z-b)R_{T^*}^{-1}(a)aK_1^{-1} + (z-a)R_{T^*}^{-1}(b)bK_2^{-1}}{b-a}v.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$U(z) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (z-a)^{-1}I \end{pmatrix} U_1(z) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (z-a)I \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$U(z) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (b-z)^{-1}I \end{pmatrix} U_2(z) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (b-z)I \end{pmatrix}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \neq 0$. Имеем (см. (7))

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 & -zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \\ \hline zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 & I - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_1 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 - zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v M_1 & -zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \\ \hline zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 + M_1 - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v M_1 & I - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \end{array} \right] \\ &\quad \times \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразуем блок 11 из (12). Имеем

$$\begin{aligned} &I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v a u^* \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (I - aT) u + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} a (T \tilde{K}_2 - \tilde{K}_1) \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (I - aT) u + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} a T u \\ &\quad - zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (\tilde{K}_2 - K_1) \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= I + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (I - aT) u + zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} a T u \\ &\quad - zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= I + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем блок 21 из (12). Имеем

$$\begin{aligned} &zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 - a u^* \tilde{K}_2^{-1} u + z a u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v u^* \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 - a u^* \tilde{K}_2^{-1} u + z a u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (T \tilde{K}_2 + a^{-1} (K_1 - \tilde{K}_2)) \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u_1 - a u^* \tilde{K}_2^{-1} u + z a u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} T u \\ &\quad + z u_1^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u - z u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} u \\ &= zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} (I - aT + aT - I) u + u^* \{-a(I - zT^*) \\ &\quad + z(I - aT^*)\} R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u \\ &= (z - a) u^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u. \end{aligned}$$

Следовательно, (12) допускает представление

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u & -zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \\ \hline (z - a) u^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u & I - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & N_1 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} I + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u & N_1 + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u N_1 - zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \\ \hline (z - a) u^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u & (z - a) u^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u N_1 + I - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

По аналогии с предыдущими выкладками для блоков 12 и 22 в представлении (13) имеем

$$\begin{aligned} &N_1 + zv^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u N_1 - zv^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v = (z - b) v^* R_{T^*}(z) \frac{a K_1^{-1} + b K_2^{-1}}{b - a} v, \\ &(z - a) u^* R_{T^*}(z) \tilde{K}_2^{-1} u N_1 + I - zu_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} v \\ &= I + u^* R_{T^*}(z) \frac{(z - b) R_{T^*}^{-1}(a) a K_1^{-1} + (z - a) R_{T^*}^{-1}(b) b K_2^{-1}}{b - a} v. \end{aligned}$$

Отсюда следует (10). Итак, мы доказали (10) при $a \neq 0$. При $a = 0$ доказательство становится более простым. Аналогичным образом доказывается формула (11).

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрица-функция (9) называется *резольвентной матрицей* проблемы моментов (1).

ТЕОРЕМА 5. Система матричных неравенств (3) эквивалентна факторизованной системе

$$[I \ s_r^*(z)] \frac{U_r^{-1*}(z) J U_r^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s_r(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, 2. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим неравенство (3) при $r = 1$ слева и справа на матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -[s_1^*(z)v^* - u_1^*]R_T^*(z)K_1^{-1} & I \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{-1}R_T(z)[vs_1(z) - u_1] \\ \hline 0 & I \end{array} \right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} - [s_1^*(z)v^* - u_1^*]R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[vs_1(z) - u_1] \end{array} \right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} - [s_1^*(z)v^* - u_1^*]R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[vs_1(z) - u_1] \geq 0.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$[I \ s_1^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s_1(z) \end{bmatrix} - (-i)[I \ s_1^*(z)]J \begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[v \ u_1]J \begin{bmatrix} I \\ s_1(z) \end{bmatrix} (i) \geq 0$$

или

$$[I \ s_1^*(z)] \frac{J - i(\bar{z} - z)J \begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[v \ u_1]J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s_1(z) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (15)$$

Функция $J - U_1(z)JU_1^*(\bar{z})$ голоморфна в $\mathbb{C}$. Для $x \in \mathbb{R}$ имеем $J - U_1(x)JU_1^*(x) = 0$ (см. (8)). Следовательно, $J - U_1(z)JU_1^*(\bar{z}) \equiv 0$. Поэтому

$$U_1^{-1}(z) = JU_1^*(\bar{z})J. \quad (16)$$

Заменим z на $\bar{z}$ в (8). После этого умножим (8) слева и справа на матрицу J . Получим

$$J - JU_1(\bar{z})JJU_1^*(\bar{z})J = i(\bar{z} - z)J \begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T^*}(\bar{z})K_1^{-1}R_{T^*}^*(\bar{z})[v \ u_1]J.$$

Отсюда в силу (16) и очевидного равенства $R_{T^*}^*(\bar{z}) = R_T(z)$ имеем

$$J - U_1^{-1*}(z)JU_1^{-1}(z) = i(\bar{z} - z)J \begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_1^{-1}R_T(z)[v \ u_1]J. \quad (17)$$

Из (17) следует, что неравенство (15) можно записать в факторизованном виде

$$[I s_1^*(z)] \frac{U_1^{-1*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s_1(z) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, (14) доказано для $r = 1$. Аналогичным образом (14) может быть доказано при $r = 2$.

Теорема доказана.

Рассмотрим всевозможные пары м.ф. $\text{col}[p(z), q(z)]$, где $p(z)$ и $q(z)$ – мероморфные в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м.ф. фиксированного размера $m \times m$, $m \geq 1$. Будем считать, что для каждой такой пары существует некоторое множество изолированных в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ точек такое, что всюду вне этого исключительного множества точек выполнены следующие три условия:

$$\text{rank}(\text{col}[p(z), q(z)]) = m, \quad (18)$$

$$[p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (19)$$

$$[p^*(z), (b - \bar{z})q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ (b - z)q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (20)$$

Множество таких пар непусто. Например, любая пара вида $\text{col}[I, s(z)]$, где

$$s(z) = \int_a^b (t - z)^{-1} d\sigma(t),$$

$\sigma(t)$ – монотонно возрастающая м.ф. ограниченной вариации, удовлетворяет условиям (18)–(20). Введем на парах отношение эквивалентности: пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ называется *эквивалентной* паре $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$, если существует мероморфная в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м.ф. $Q(z)$, $\det Q(z) \neq 0$, такая, что $p_1(z) = p(z)Q(z)$, $q_1(z) = q(z)Q(z)$. Легко видеть, что это отношение действительно является отношением эквивалентности и, следовательно, множество всех пар разбивается на классы эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Обозначим через $\mathcal{R}^\infty[a, b]$ множество классов эквивалентности пар.

ТЕОРЕМА 6. *Дробно-линейное преобразование*

$$s(z) = \frac{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)}{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)} \quad (21)$$

задает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{R}^\infty[a, b]$ и множеством $\mathcal{L}$ (см. (2)). Здесь $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ и $\delta(z)$ определены в (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство по шагам.

ШАГ 1. Пусть $\text{col}[p(z), q(z)]$ удовлетворяет (18)–(20). Тогда пара

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = U(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \quad (22)$$

тоже удовлетворяет (18)–(20), где $U(z)$ определена в (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 1. Из (16) и (10) следует, что $\det U(z) \neq 0$, $z \neq a$. Поэтому условие (18) выполнено для пары $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$.

Теперь покажем, что условие (19) выполнено для пары $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$. При $\text{Im } z \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & [p_1^*(z), (\bar{z} - a)q_1^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ (z - a)q_1(z) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (\bar{z} - a)^{-1}I \end{bmatrix} U^*(z) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (\bar{z} - a)I \end{bmatrix} \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (z - a)I \end{bmatrix} U(z) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (z - a)^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \frac{U_1^*(z)JU_1(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} \\ &\geq [p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $U_1^*(z)JU_1(z)/(i(\bar{z} - z)) \geq J/(i(\bar{z} - z))$, которое следует из (8). Аналогичным образом доказывается (20).

ШАГ 2. Покажем, что $\det p_1(z) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 2. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq [p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} \\ &= [p_1^*(z), (\bar{z} - a)q_1^*(z)] \frac{U_1^{-1*}(z)JU_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ (z - a)q_1(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$[p_1^*(z), (\bar{z} - a)q_1^*(z)] \frac{U_1^{-1*}(z)JU_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ (z - a)q_1(z) \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

Пусть $e \in \mathbb{C}^m$ и z_0 ($\text{Im } z_0 \neq 0$) таковы, что

$$p_1(z_0)e = 0, \quad \text{rank}(\text{col}[p_1(z_0), q_1(z_0)]) = m.$$

Умножим (23) при $z = z_0$ слева на e^* , а справа на e . Получим

$$[0, (\bar{z}_0 - a)e^*q_1^*(z_0)] \frac{U_1^{-1*}(z_0)JU_1^{-1}(z_0)}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ (z_0 - a)q_1(z_0)e \end{bmatrix} \geq 0.$$

Следовательно,

$$[0, (\bar{z}_0 - a)e^*q_1^*(z_0)] \frac{J - U_1^{-1*}(z_0)JU_1^{-1}(z_0)}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \begin{bmatrix} 0 \\ (z_0 - a)q_1(z_0)e \end{bmatrix} \leq 0.$$

Отсюда и из (8) следует, что

$$[0, (\bar{z}_0 - a)e^*q_1^*(z_0)] J \begin{bmatrix} v^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T^*}(\bar{z}_0)K_1^{-1}R_{T^*}^*(\bar{z}_0)[v, u_1]J \begin{bmatrix} 0 \\ (z_0 - a)q_1(z_0)e \end{bmatrix} \leq 0.$$

Но ядро последнего неравенства строго положительно. Поэтому $q_1(z_0)e = 0$. Таким образом, $p_1(z_0)e = 0$ и $q_1(z_0)e = 0$. Из условия

$$\text{rank}(\text{col}[p_1(z_0), q_1(z_0)]) = m$$

следует, что $e = 0$. Отсюда следует, что $\det p_1(z_0) \neq 0$. Поэтому $\det p_1(z) \neq 0$.

ШАГ 3. Дробно-линейное преобразование (21) корректно определено для всех пар $\text{col}[p(z), q(z)]$, которые удовлетворяют условиям (18)–(20).

Пары $\text{col}[p(z), q(z)]$ и $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$ в результате дробно-линейного преобразования (21) приводят к одной и той же м.ф. $s(z)$ тогда и только тогда, когда эти пары эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 3. Пусть пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ удовлетворяет условиям (18)–(20). Из шага 2 следует, что определитель м.ф. $p_1(z) = \alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)$ не обращается в нуль тождественно. Поэтому дробно-линейное преобразование (21) определено корректно.

Очевидно, что эквивалентные пары $\text{col}[p(z), q(z)]$ и $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$ в результате дробно-линейного преобразования (21) приводят к одной и той же м.ф. $s(z)$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ и другая пара $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$ в результате дробно-линейного преобразования (21) приводят к одной и той же м.ф. $s(z)$. Рассмотрим пары

$$\begin{bmatrix} u(z) \\ v(z) \end{bmatrix} = U(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1(z) \\ v_1(z) \end{bmatrix} = U(z) \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ v(z)u^{-1}(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p(z)u^{-1}(z) \\ q(z)u^{-1}(z) \end{bmatrix}, \\ U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ v_1(z)u_1^{-1}(z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_1(z)u_1^{-1}(z) \\ q_1(z)u_1^{-1}(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

По условию $v(z)u^{-1}(z) = v_1(z)u_1^{-1}(z) = s(z)$. Поэтому

$$\begin{bmatrix} p(z)u^{-1}(z) \\ q(z)u^{-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(z)u_1^{-1}(z) \\ q_1(z)u_1^{-1}(z) \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$p(z) = p_1(z)u_1^{-1}(z)u(z), \quad q(z) = q_1(z)u_1^{-1}(z)u(z).$$

ШАГ 4. Если м.ф. $s(z)$ удовлетворяет системе (14), то она допускает представление (21) с парой $\text{col}[p(z), q(z)]$, удовлетворяющей условиям (18)–(20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 4. Рассмотрим пару

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Покажем, что (18) выполнено для пары $\text{col}[p(z), q(z)]$. Имеем

$$[p^*(z), q^*(z)] \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = [I, s^*(z)]U^{-1*}(z)U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} > 0.$$

Из (14) следует, что пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ удовлетворяет (19) и (20). В силу (24)

$$\begin{bmatrix} \alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z) \\ \gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$s(z) = \gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z), \quad I = \alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z).$$

Тем самым, доказано и представление (21).

ШАГ 5. Если $\text{col}[p(z), q(z)]$ – произвольная пара, удовлетворяющая (18)–(20), то дробно-линейное преобразование (21) задает голоморфную в $\text{Im } z > 0$ м.ф. $s(z)$, которая удовлетворяет системе неравенств (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ШАГА 5. Рассмотрим пару

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = U(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ q_1(z)p_1^{-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z)p_1^{-1}(z) \\ q(z)p_1^{-1}(z) \end{bmatrix}.$$

Пусть $s(z) = q_1(z)p_1^{-1}(z)$, $P(z) = p(z)p_1^{-1}(z)$, $Q(z) = q(z)p_1^{-1}(z)$. Тогда

$$U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$s(z) = \{\gamma(z)P(z) + \delta(z)Q(z)\} \{\alpha(z)P(z) + \beta(z)Q(z)\}^{-1}. \quad (25)$$

Так как пара $\text{col}[P(z), Q(z)]$ эквивалентна паре $\text{col}[p(z), q(z)]$, то (18)–(20) выполнено и для пары $\text{col}[P(z), Q(z)]$. Из (19) следует

$$\begin{aligned} 0 &\leq [P^*(z), (\bar{z} - a)Q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} P(z) \\ (z - a)Q(z) \end{bmatrix} \\ &= [I, s^*(z)] U^{-1*}(z) \frac{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (\bar{z} - a)I \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (z - a)I \end{bmatrix}}{i(\bar{z} - z)} U^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} \\ &= [I, (\bar{z} - a)s^*(z)] U_1^{-1*}(z) \frac{J}{i(\bar{z} - z)} U_1^{-1}(z) \begin{bmatrix} I \\ (z - a)s(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, $s(z)$ удовлетворяет (14) при $r = 1$. Аналогичным образом рассматривается случай $r = 2$.

По построению $s(z)$ является мероморфным в $\text{Im } z > 0$ решением системы матричных неравенств (3). Отсюда следует, что

$$\frac{s_r(z) - s_r^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad \text{Im } z > 0, \quad r = 1, 2.$$

Складывая эти два неравенства, получим

$$\frac{(b - a)(s(z) - s^*(z))}{z - \bar{z}} \geq 0, \quad \text{Im } z > 0.$$

Отсюда следует (см. [8]), что все особенности $s(z)$ в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ устранимы. Поэтому можем считать $s(z)$ голоморфным в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ решением системы матричных неравенств.

В (25) мы можем пару $\text{col}[P(z), Q(z)]$ заменить эквивалентной парой $\text{col}[p(z), q(z)]$. Теорема доказана.

4. Случай нечетного числа моментов. В этом разделе мы приводим результаты для нечетного числа моментов ($k = 2n$). Доказательства их проводятся по аналогии с соответствующими утверждениями для четного числа моментов.

Пусть $[a, b]$ – фиксированный компактный интервал в $\mathbb{R}$, и пусть заданы $(m \times m)$ -матрицы $s_0, s_1, \dots, s_{2n}$, $n \geq 1$. Требуется описать множество $\mathcal{X}$ всех непрерывных слева монотонно возрастающих эрмитовых м.ф. $\sigma(t)$, $t \in [a, b]$, таких, что

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \quad j = 0, \dots, 2n. \quad (26)$$

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает множество всех м.ф. вида

$$s(z) = \int_a^b (t - z)^{-1} d\sigma(t), \quad \sigma \in \mathcal{X}. \quad (27)$$

По м.ф. $s(z)$ построим две м.ф.

$$s_1(z) = s(z), \quad s_2(z) = (z - a)(b - z)s(z) - s_0z. \quad (28)$$

Введем блочные матрицы

$$\begin{aligned} T_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{(n+1)m}, & v_1 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, & u_1 &= - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}}_m, \\ T_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}}_{nm}, & v_2 &= \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_m, \\ \tilde{u}_1 &= - \underbrace{\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{bmatrix}}_m, & \tilde{u}_2 &= - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ s_0 \\ \vdots \\ s_{n-2} \end{bmatrix}}_m, & \tilde{u}_3 &= - \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}}_m, \\ R_{T_1}(z) &= (I - zT_1)^{-1}, & R_{T_2}(z) &= (I - zT_2)^{-1}, & K_1 &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^n, \\ \tilde{K}_1 &= \{s_{j+k+1}\}_{j,k=0}^{n-1}, & \tilde{K}_2 &= \{s_{j+k}\}_{j,k=0}^{n-1}, & \tilde{K}_3 &= \{s_{j+k+2}\}_{j,k=0}^{n-1}, \\ K_2 &= (a+b)\tilde{K}_1 - ab\tilde{K}_2 - \tilde{K}_3, & u_2 &= (a+b)\tilde{u}_1 - ab\tilde{u}_2 - \tilde{u}_3. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $s(z) \in \mathcal{L}$. Тогда $s(z)$ удовлетворяет системе основных матричных неравенств Потапова

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_T(z)[v s_r(z) - u_r] \\ \hline * & \frac{s_r(z) - s_r^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array} \right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \quad (29)$$

Здесь $s_1(z)$ и $s_2(z)$ построены по $s(z)$ с помощью формул (28).

Имеет место и обратная теорема.

ТЕОРЕМА 8. Пусть м.ф. $s(z)$ определена и голоморфна в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и построенные по ней м.ф. $s_1(z)$ и $s_2(z)$ (см. (28)) удовлетворяют системе (29). Тогда $s(z)$ допускает представление (26) и $\sigma(t) \in \mathcal{E}$.

Ограничимся рассмотрением невырожденного случая $K_1 > 0$, $K_2 > 0$. Предположим еще, что

$$\begin{aligned}\Gamma_a &= (I + av_1^* R_{T_1^*}(a) K_1^{-1} u_1)^{-1} v_1^* R_{T_1^*}(a) K_1^{-1} v_1, \\ \Gamma_b &= (I + bv_1^* R_{T_1^*}(b) K_1^{-1} u_1)^{-1} v_1^* R_{T_1^*}(b) K_1^{-1} v_1\end{aligned}$$

и $b\Gamma_b - a\Gamma_a$ корректно определена и обратима.

ТЕОРЕМА 9. Пусть

$$\begin{aligned}U_1(z) &= \left\{ I - iz \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(z) K_1^{-1} [v_1, u_1] J \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & M_1 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline N_1 & I \end{array} \right], \\ U_2(z) &= \left\{ I - iz \begin{bmatrix} v_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(z) K_2^{-1} [v_2, u_2] J \right\} \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & L_{12} \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array} \right],\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}M_1 &= a\Gamma_a, \quad N_1 = (b\Gamma_b - a\Gamma_a)^{-1}, \\ L_{11} &= (b - a)\Gamma_b(b\Gamma_b - a\Gamma_a)^{-1}, \quad L_{12} = -\frac{1}{(b - a)}\Gamma_a, \\ L_{21} &= -a(b - a)(b\Gamma_b - a\Gamma_a)^{-1}, \quad L_{22} = \frac{b}{b - a}I.\end{aligned}$$

Тогда

$$J - U_r(z) J U_r^*(z) = i(z - \bar{z}) \begin{bmatrix} v_r^* \\ u_r^* \end{bmatrix} R_{T_r^*}(z) K_r^{-1} R_{T_r^*}^*(z) [v_r, u_r].$$

ТЕОРЕМА 10. Система матричных неравенств (29) эквивалентна факторизованной системе

$$[I \ s_r^*(z)] \frac{U_r^{-1*}(z) J U_r^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s_r(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, 2.$$

Рассмотрим всевозможные пары м.ф. $\text{col}[p(z), q(z)]$, где $p(z)$ и $q(z)$ мероморфные в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м.ф. фиксированного размера $m \times m$, $m \geq 1$. Будем считать, что для каждой такой пары существует некоторое множество изолированных в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ точек такое, что всюду вне этого исключительного множества точек выполнены следующие три условия:

$$\begin{aligned}\text{rank}(\text{col}[p(z), q(z)]) &= m, \\ [p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} &\geq 0, \\ [(b - \bar{z})p^*(z), (\bar{z} - a)q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} (b - z)p(z) \\ (z - a)q(z) \end{bmatrix} &\geq 0.\end{aligned}$$

Множество таких пар непусто. Например, любая пара вида $\text{col}[I, s(z)]$, где

$$s(z) = (b - z) \int_a^b (t - z)^{-1} d\sigma(t),$$

$\sigma(t)$ – монотонно возрастающая м.ф. ограниченной вариации, удовлетворяет всем трем условиям. Введем на множестве пар отношение эквивалентности: пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ называется эквивалентной паре $\text{col}[p_1(z), q_1(z)]$, если существует мероморфная в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ м.ф. $Q(z)$, $\det Q(z) \neq 0$, такая, что $p_1(z) = p(z)Q(z)$, $q_1(z) = q(z)Q(z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Обозначим символом $\mathcal{S}^\infty[a, b]$ множество классов эквивалентности пар.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Матрица-функция (30) называется *резольвентной матрицей* проблемы (26).

Для блоков резольвентной матрицы $U_1(z)$ введем обозначения

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha(z) & \beta(z) \\ \hline \gamma(z) & \delta(z) \end{array} \right].$$

ТЕОРЕМА 11. *Дробно-линейное преобразование*

$$s(z) = \frac{\gamma(z)p(z) + \delta(z)q(z)}{\alpha(z)p(z) + \beta(z)q(z)}$$

задает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{S}^\infty[a, b]$ и множеством $\mathcal{L}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.
- [2] Ковалишина И. В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47, № 3. С. 455–497.
- [3] Иванченко Т. С., Сахнович Л. А. Операторный подход к схеме В. П. Потапова исследования интерполяционных задач // Укр. матем. ж. 1987. Т. 39, № 5. С. 573–578.
- [4] Сахнович Л. А. Метод операторных тождеств // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 1. С. 3–80.
- [5] Дюкарев Ю. М., Качнельсон В. Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стильеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. 1981. Т. 36. С. 13–27.
- [6] Dyukarev Yu. M. Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolation problems in the Stieltjes class // Operator Theory: Advances and Applications. 1997. V. 95. P. 165–184.
- [7] Дюкарев Ю. М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. 1999. Т. 6. № 1/2. С. 30–54.
- [8] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
- [9] Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969.