Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Железовский, Оценки скорости сходимости метода Галеркина для абстрактного гиперболического уравнения, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 223–234

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:32:10

УДК 517.988.8

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. Е. Железовский

Исследуется сходимость полудискретного метода Галёркина для линейного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве. Устанавливаются асимптотические оценки погрешности при произвольном выборе подпространств, в которых решаются приближенные задачи.

Библиография: 16 названий.

В данной работе рассматривается задача Коши для линейного гиперболического уравнения в гильбертовом пространстве с переменными операторными коэффициентами. Устанавливаются асимптотические оценки скорости сходимости полудискретного метода Галёркина при произвольном выборе подпространств V_n , в которых принимают значения приближенные решения. Указан способ оценки величины ρ_n , характеризующей скорость сходимости, в приложениях к уравнениям с частными производными для метода конечных элементов. Для другого варианта метода Галёркина, когда V_n – собственные подпространства некоторого вспомогательного оператора, приведено точное выражение ρ_n в терминах собственных значений этого оператора.

Основные результаты работы содержатся в теоремах 3–6. Для абстрактных параболических уравнений аналогичные результаты получены в [1], [2]. Для абстрактных гиперболических уравнений оценки, типа указанной в теореме 3, устанавливались в [3]–[5], но только при специальном выборе подпространств, в которых принимают значения приближенные решения. Из работ по обоснованию метода Галёркина для различных задач отметим также [6]–[9].

Будем использовать следующие обозначения. Пусть X и Y – банаховы пространства над полем $\mathbb{C}$; $[0, T]$ – отрезок оси $\mathbb{R}$; $\mathcal{L}(X; Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y , с обычной нормой; $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X; X)$; $\mathcal{H}(X)$ – пространство эрмитовых форм $h: X^2 \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$\|h\|_{\mathcal{H}(X)} = \sup_{x_1, x_2 \in X / \{0\}} \frac{|h(x_1, x_2)|}{\|x_1\|_X \|x_2\|_X} < \infty;$$

$C([0, T]; X)$ ($C^k([0, T]; X)$, где $k \in \mathbb{N}$) – пространство непрерывных (соответственно k раз непрерывно дифференцируемых) на $[0, T]$ функций со значениями в X ; $L^1(0, T; X)$ ($L^\infty(0, T; X)$) – пространство сильно измеримых функций $v: [0, T] \rightarrow X$ таких, что

$\int_0^T \|v(t)\|_X dt < \infty$ (соответственно $\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_X < \infty$); $W^{k,p}(0, T; X)$ ($k \in \mathbb{N}$, $p = 1$ или $p = \infty$) – пространство функций, принадлежащих $L^p(0, T; X)$ вместе со своими производными до k -го порядка включительно; $W^{k,p}(0, T) = W^{k,p}(0, T; \mathbb{C})$. Здесь и всюду в дальнейшем производные функций, заданных на $[0, T]$ и не принадлежащих соответствующим пространствам $C^k([0, T]; X)$, понимаются в смысле распределений [10, с. 20].

1. Исходная задача, соотношения метода Галёркина, вспомогательные утверждения. Пусть H – комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $[0, T]$ – заданный отрезок оси $\mathbb{R}$. Исходная задача Коши имеет вид

$$u''(t) + A(t)u(t) + B(t)u(t) = f(t), \quad (1)$$

$$u(0) = u'(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $\{A(t) \mid t \in [0, T]\}$ – семейство неограниченных самосопряженных положительно определенных в H операторов с общей областью определения $D(A)$. В силу теоремы Гайнца [11, с. 177] все операторы $(A(t))^{1/2}$, $t \in [0, T]$, также имеют общую область определения, которую обозначим через V . Линейные операторы $B(t)$ ($t \in [0, T]$) принадлежат $\mathcal{L}(V; H)$, заданная функция f отображает $[0, T]$ в H . Пусть, далее, A_0 – некоторый самосопряженный положительно определенный в H оператор, область определения которого совпадает с $D(A)$, причем обратный оператор A_0^{-1} компактен в H . Введем на V энергетическое скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_V$, порожденное оператором A_0 , и соответствующую норму $\|\cdot\|_V$ следующим образом:

$$(v, w)_V = (A_0^{1/2}v, A_0^{1/2}w)_H, \quad \|v\|_V = (v, v)_V^{1/2}, \quad v, w \in V.$$

Тем самым мы превратим V в сепарабельное гильбертово пространство. Для любого $t \in [0, T]$ обозначим через $a(t; \cdot, \cdot)$ энергетическое скалярное произведение, порожденное оператором $A(t)$, т.е. $a(t; v, w) = ((A(t))^{1/2}v, (A(t))^{1/2}w)_H$, $v, w \in V$. На операторные коэффициенты и свободный член уравнения (1) наложим следующие условия.

УСЛОВИЕ (A1). Существует константа $a_0 > 0$ такая, что для всех $t \in [0, T]$, $v \in D(A)$ выполнено неравенство

$$\|A_0 v\|_H \leq a_0 \|A(t)v\|_H. \quad (3)$$

УСЛОВИЕ (A2). Функция “ $t \rightarrow a(t; \cdot, \cdot)$ ” принадлежит $W^{2,1}(0, T; \mathcal{H}(V))$.

УСЛОВИЕ (B1). Функция “ $t \rightarrow B(t)$ ” принадлежит $W^{1,1}(0, T; \mathcal{L}(V; H))$.

УСЛОВИЕ (F1). Функция $f \in W^{1,1}(0, T; H)$.

Сформулированные условия всюду в этой работе без специальных оговорок считаются выполненными. Налагаемые в дальнейшем на операторы $A(t)$, $B(t)$ и функцию f условия (A3), (A4), (B2), (B3), (F2), (F3) считаются выполненными только тогда, когда об этом сказано явно.

Из условия (A1) по теореме Гайнца для всех $t \in [0, T]$, $v \in V$ получаем неравенство

$$\|v\|_V \leq a_0^{1/2} \|(A(t))^{1/2}v\|_H. \quad (4)$$

Обозначим

$$a_1 = \max_{0 \leq t \leq T} \|a(t; \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}(V)}, \quad a_2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|a'(t; \cdot, \cdot)\|_{\mathcal{H}(V)},$$

что корректно в силу условия (A2). Тогда для всех $t \in [0, T]$, $v, w \in V$ имеют место оценки

$$\|(A(t))^{1/2}v\|_H \leq a_1^{1/2}\|v\|_V, \quad (5)$$

$$|a'(t; v, w)| \leq a_2\|v\|_V\|w\|_V. \quad (6)$$

Неравенства (4)–(6) будут использоваться ниже.

Зададим последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ конечномерных подпространств V такую, что

$$\forall v \in V \quad \|R_n v\|_V \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Здесь и далее $R_n = I - P_n$, где I – тождественный оператор в V , P_n – ортопроектор V на V_n (в смысле скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_V$). Будем решать задачу (1), (2) методом Галёркина. Рассмотрим задачу

$$(u_n''(t), v_n)_H + a(t; u_n(t), v_n) + (B(t)u_n(t), v_n)_H = (f(t), v_n)_H, \quad (8)$$

$$u_n(t) \in V_n, \quad u_n(0) = u_n'(0) = 0, \quad (9)$$

где n – произвольное заданное натуральное число, $t \in [0, T]$, v_n – любой элемент V_n . Задача (8), (9) эквивалентна задаче Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами и свободными членами из $W^{1,1}(0, T)$, поэтому она имеет единственное решение $u_n \in W^{3,1}(0, T; V_n)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Решение u_n задачи (8), (9) назовем *приближенным решением задачи* (1), (2), *построенным методом Галёркина*.

Применяя к (8), (9) технику энергетических неравенств (см., например, [12, с. 202–205, 217–218]), нетрудно показать, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ имеют место оценки

$$\|u_n'(t)\|_H + \|u_n(t)\|_V \leq M_1, \quad (10)$$

$$\|u_n''(t)\|_H + \|u_n'(t)\|_V \leq M_2, \quad (11)$$

где M_1, M_2 – константы, не зависящие от n, t , а также от выбора последовательности $\{V_n\}_{n=1}^\infty$. При выводе этих оценок существенно используются условия (A2), (B1), (F1) и неравенство (4).

Приведем результат об однозначной разрешимости исходной задачи (1), (2).

ТЕОРЕМА 1. Задача (1), (2) имеет единственное решение u , принадлежащее $W^{2,\infty}(0, T; H) \cap W^{1,\infty}(0, T; V)$ и такое, что

$$\text{для почти всех } t \in [0, T] \quad u(t) \in D(A), \quad "t \rightarrow A(t)u(t)" \in L^\infty(0, T; H). \quad (12)$$

Это решение удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $t \in [0, T]$ и начальным условиям (2) непосредственно.

Доказательство существования решения задачи (1), (2) в указанном смысле проводится с помощью метода Галёркина на основе оценок (10), (11) по известной схеме (см. [10, с. 22–27, 30–32], [12, с. 213–220]). Доказательство единственности решения аналогично, например, доказательству теоремы 2.1 в [12, с. 205]. Для последующих ссылок отметим, что

$$\text{для всех } t \in [0, T] \quad \|u'(t)\|_H + \|u(t)\|_V \leq M_1, \quad (13)$$

$$\text{для почти всех } t \in [0, T] \quad \|u''(t)\|_H + \|u'(t)\|_V \leq M_2, \quad (14)$$

где u – решение задачи (1), (2), M_1, M_2 – те же константы, что и в (10), (11). Оценки (13), (14) можно получить из (10), (11) предельным переходом при доказательстве теоремы 1 на этапе построения решения.

Обозначим пространство, двойственное к V , через V' и отождествим пространство H с двойственным к нему, так что $V \subset H \subset V'$. Пусть t – любое число из $[0, T]$. Определим продолжение оператора $A(t)$ с $D(A)$ на V из тождества $(A(t)v, w) = a(t; v, w)$, где $(\cdot, \cdot)$ – спаривание элементов пространств V' и V , v и w – произвольные элементы V . Тогда $A(t) \in \mathcal{L}(V; V')$, оператор $(A(t))^{-1}$, обратный к продолженному оператору $A(t)$, существует и принадлежит $\mathcal{L}(V'; V)$, причем в силу (4) его норма в этом пространстве ограничена сверху константой a_0 :

$$\|(A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(V'; V)} \leq a_0. \quad (15)$$

Условие (A2) можно переформулировать в терминах продолженных на V операторов $A(t)$ таким образом: функция $"t \rightarrow A(t)" \in W^{2,1}(0, T; \mathcal{L}(V; V'))$. Для дальнейшего имеет значение, что

$$"t \rightarrow A(t)" \in C^1([0, T]; \mathcal{L}(V; V')). \quad (16)$$

Сформулируем условия, при которых решение задачи (1), (2) обладает повышенной гладкостью, требуемой ниже в теоремах 5, 6.

УСЛОВИЕ (A3). Для почти всех $t \in [0, T]$ оператор $A'(t)$ отображает $D(A)$ в H и функция $"t \rightarrow A'(t)(A(t))^{-1}" \in L^1(0, T; \mathcal{L}(H))$.

УСЛОВИЕ (A4). Функция $"t \rightarrow a(t; \cdot, \cdot)"$ принадлежит $W^{3,1}(0, T; \mathcal{H}(V))$.

УСЛОВИЕ (B2). Функция $"t \rightarrow B(t)"$ принадлежит $W^{2,1}(0, T; \mathcal{L}(V; H))$.

УСЛОВИЕ (F2). Функция $f \in W^{2,1}(0, T; H)$.

УСЛОВИЕ (F3). Функция $f(0) \in V$.

Соответствующий результат о гладкости состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условий (A3), (A4), (B2), (F2), (F3) решение задачи (1), (2) принадлежит $W^{3,\infty}(0, T; H) \cap W^{2,\infty}(0, T; V)$ и таково, что

$$\text{для почти всех } t \in [0, T] \quad u'(t) \in D(A), \quad "t \rightarrow A(t)u'(t)" \in L^1(0, T; H). \quad (17)$$

Доказательство того, что $u \in W^{3,\infty}(0, T; H) \cap W^{2,\infty}(0, T; V)$, проводится аналогично доказательству разрешимости задачи (1), (2) при общих условиях в смысле теоремы 1. При этом наряду с (10), (11) используется оценка

$$\|u_n'''(t)\|_H + \|u_n''(t)\|_V \leq M_3, \quad (18)$$

где $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, M_3 – константа, не зависящая от n, t ; левая часть (18) имеет смысл, так как в данном случае в силу условий (A2), (B2), (F2) $u_n \in W^{4,1}(0, T; V_n)$ и заведомо $u_n \in C^3([0, T]; V_n)$. Оценка (18) устанавливается с помощью условий (A4), (B2), (F2), (F3) по аналогии с (10), (11) в предположении, что все V_n являются собственными подпространствами оператора A_0 ; такой выбор подпространств V_n возможен в силу теоремы Гильберта–Шмидта [13, с. 246], так как оператор A_0^{-1} самосопряжен и компактен в H . Свойство (17) решения задачи (1), (2) выводится из того, что $u \in W^{3,\infty}(0, T; H) \cap W^{1,\infty}(0, T; V)$ с учетом (12), условия (A3) и самосопряженности операторов $A(t)$.

2. Основные результаты. Положим $\rho_n = \|R_n A_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(H; V)}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем оценивать скорость сходимости метода Галёркина (8), (9) в терминах последовательности $\{\rho_n\}_{n=1}^\infty$. Из (7) и условия компактности оператора A_0^{-1} следует, что $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обозначим через $P_n(t)$ ортопроектор V на V_n в смысле скалярного произведения $a(t; \cdot, \cdot)$ и через $R_n(t)$ – оператор $I - P_n(t)$, где $t \in [0, T]$, I – тождественный оператор в V . Отметим некоторые факты, используемые ниже при выводе оценок скорости сходимости метода Галёркина. В силу леммы 2 из [1] при любом $n \in \mathbb{N}$ функция “ $t \rightarrow P_n(t)$ ” имеет на $[0, T]$ ограниченную в $\mathcal{L}(V; V_n)$ производную и для любых $t \in [0, T]$, $v, w \in V$ имеет место равенство

$$a(t; P_n'(t)v, w) = a'(t; R_n(t)v, P_n(t)w). \quad (19)$$

Из (5), (3) следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$ выполнена оценка

$$\|(A(t))^{1/2} R_n(t) (A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq a_0 a_1^{1/2} \rho_n. \quad (20)$$

В силу леммы Обэна–Нитше [14, с. 139] для всех $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, $v \in V$ выполнена оценка

$$\|R_n(t)v\|_H \leq \|(A(t))^{1/2} R_n(t) (A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \|(A(t))^{1/2} R_n(t)v\|_H, \quad (21)$$

откуда с учетом (20) и (5) получаем неравенство

$$\|R_n(t)v\|_H \leq a_0 a_1 \rho_n \|R_n v\|_V. \quad (22)$$

Кроме того, из (21) с помощью (20) получаем оценку

$$\|R_n(t)(A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq a_0^2 a_1 \rho_n^2. \quad (23)$$

Скорость сходимости метода Галёркина оценивается в данной работе в стандартных нормах пространств $C^1([0, T]; H) \cap C([0, T]; V)$ (теоремы 3, 5) и $C([0, T]; H)$ (теоремы 4, 6). Теоремы 3, 4 относятся к общему случаю, когда исходная задача (1), (2) разрешима в смысле теоремы 1; теоремы 5, 6 – к случаю, когда решение исходной задачи имеет повышенную гладкость, именно удовлетворяет условию (17). В дальнейшем через Δu_n обозначаем погрешность метода Галёркина (8), (9), т.е. $\Delta u_n(t) = u(t) - u_n(t)$, где $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, T]$, u – точное решение задачи (1), (2), u_n – приближенное решение этой задачи, построенное методом Галёркина.

ТЕОРЕМА 3. *Скорость сходимости метода Галёркина (8), (9) характеризуется оценкой*

$$\max_{0 \leq t \leq T} (\|\Delta u'_n(t)\|_H + \|\Delta u_n(t)\|_V) = o(\rho_n^{1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – произвольное натуральное число. Из (1), (8) следует, что для почти всех $t \in [0, T]$, для всех $v_n \in V_n$ выполняется равенство

$$(\Delta u''_n(t), v_n)_H + a(t; \Delta u_n(t), v_n) + (B(t)\Delta u_n(t), v_n)_H = 0. \quad (25)$$

Полагая здесь $v_n = P_n(t)\Delta u'_n(t)$, запишем полученное равенство в виде

$$\begin{aligned} & (\Delta u''_n(t), \Delta u'_n(t))_H + a(t; \Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u'_n(t)) \\ & = (\Delta u''_n(t), R_n(t)u'(t))_H - (B(t)\Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u'_n(t))_H. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя (19) с $v = w = \Delta u_n(t)$, легко проверить, что

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} a(t; \Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u'_n(t)) \\ & = \frac{d}{dt} a(t; \Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u_n(t)) - a'(t; \Delta u_n(t), \Delta u_n(t)) + a'(t; R_n(t)u(t), R_n(t)u(t)). \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) с помощью (27) после интегрирования по $t \in [0, \tau]$, где τ – любое число из $[0, T]$, получаем

$$\begin{aligned} & \|\Delta u'_n(\tau)\|_H^2 + \|(A(\tau))^{1/2}\Delta u_n(\tau)\|_H^2 \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\Delta u''_n(t), R_n(t)u'(t))_H dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (B(t)\Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u'_n(t))_H dt \\ & \quad + \|(A(\tau))^{1/2}R_n(\tau)u(\tau)\|_H^2 \\ & \quad + \int_0^\tau a'(t; \Delta u_n(t), \Delta u_n(t)) dt - \int_0^\tau a'(t; R_n(t)u(t), R_n(t)u(t)) dt. \end{aligned} \quad (28)$$

Оценим поочередно все члены, составляющие правую часть (28). Для первого из них, используя (11), (14) и (22), имеем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\Delta u_n''(t), R_n(t)u'(t))_H dt &\leq 2 \int_0^\tau (\|u''(t)\|_H + \|u_n''(t)\|_H) \|R_n(t)u'(t)\|_H dt \\ &\leq 4M_2 \int_0^\tau \|R_n(t)u'(t)\|_H dt \leq 4a_0a_1M_2\rho_n r_n, \end{aligned} \quad (29)$$

где $r_n = \int_0^T \|R_n u'(t)\|_V dt$. Применяя теорему Лебега [13, с. 302], с учетом (7) и того, что $u \in W^{1,\infty}(0, T; V)$ (см. теорему 1), получаем

$$r_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Далее обозначим

$$b_0 = \max_{0 \leq t \leq T} \|B(t)\|_{\mathcal{L}(V; H)}.$$

Применяя (22) и (14), имеем

$$\begin{aligned} 2 \left| \operatorname{Re} \int_0^\tau (B(t)\Delta u_n(t), P_n(t)\Delta u_n'(t))_H dt \right| &\leq 2b_0 \int_0^\tau \|\Delta u_n(t)\|_V (\|\Delta u_n'(t)\|_H + \|R_n(t)u'(t)\|_H) dt \\ &\leq 2b_0 \int_0^\tau \|\Delta u_n(t)\|_V (\|\Delta u_n'(t)\|_H + a_0a_1M_2\rho_n) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Остальные члены правой части (28) оценим с помощью (20), (12), (6), (4):

$$\|(A(\tau))^{1/2} R_n(\tau)u(\tau)\|_H^2 \leq a_0^2 a_1 \rho_n^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|_H^2, \quad (32)$$

$$\int_0^\tau a'(t; \Delta u_n(t), \Delta u_n(t)) dt \leq a_2 \int_0^\tau \|\Delta u_n(t)\|_V^2 dt, \quad (33)$$

$$\left| \int_0^\tau a'(t; R_n(t)u(t), R_n(t)u(t)) dt \right| \leq a_0^3 a_1 a_2 \rho_n^2 \int_0^T \|A(t)u(t)\|_H^2 dt. \quad (34)$$

В частности, оценка (32) сначала устанавливается для почти всех $\tau \in [0, T]$, а затем распространяется на весь отрезок $[0, T]$ с учетом непрерывной зависимости оцениваемого выражения от τ .

В левой части (28) оценим второе слагаемое снизу с помощью (4):

$$\|(A(\tau))^{1/2} \Delta u_n(\tau)\|_H^2 \geq a_0^{-1} \|\Delta u_n(\tau)\|_V^2. \quad (35)$$

Из (28), (29), (31)–(35) следует неравенство

$$\|\Delta u_n'(\tau)\|_H^2 + \|\Delta u_n(\tau)\|_V^2 \leq N_1 \rho_n r_n + N_2 \rho_n^2 + N_3 \int_0^\tau (\|\Delta u_n'(t)\|_H^2 + \|\Delta u_n(t)\|_V^2) dt, \quad (36)$$

где N_1, N_2, N_3 – константы, не зависящие от n, τ . Применяя к (36) лемму Гронуолла [15, с. 191] и учитывая (30), получаем (24).

В теореме 4 и далее в теореме 6 используется следующее дополнительное условие на операторы $B(t)$.

УСЛОВИЕ (ВЗ). Для почти всех $t \in [0, T]$ оператор $(B(t))^*$, сопряженный в H к $B(t)$, определен по крайней мере на V и принадлежит $\mathcal{L}(V; H)$, причем

$$“t \rightarrow (B(t))^*” \in L^1(0, T; \mathcal{L}(V; H)). \quad (37)$$

ТЕОРЕМА 4. При выполнении условия (ВЗ) скорость сходимости метода Галёркина (8), (9) характеризуется оценкой

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H = o(\rho_n^{5/4}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – любое натуральное число. Примем в (25) $v_n = P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t) \in V_n$ и запишем полученное равенство в виде

$$\begin{aligned} & (\Delta u''_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H + (\Delta u_n(t), \Delta u'_n(t))_H \\ & = (R_n(t)u(t), \Delta u'_n(t))_H - (B(t)\Delta u_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H. \end{aligned} \quad (39)$$

Простой выкладкой проверяем равенство

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re}(\Delta u''_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H \\ & = \frac{d}{dt}(\Delta u'_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H \\ & \quad + a'(t; P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)), \end{aligned} \quad (40)$$

при этом дифференцируем функцию “ $t \rightarrow (A(t))^{-1}$ ” : $[0, T] \rightarrow \mathcal{L}(V', V)$ по формуле $[(A(t))^{-1}]' = -(A(t))^{-1} A'(t)(A(t))^{-1}$ (см., например, [11, с. 24]; условия, при которых справедлива эта формула, выполнены согласно (15), (16)) и используем (19) с $v = w = (A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)$. Из (39) с учетом (40) после интегрирования получаем

$$\begin{aligned} & \|(A(\tau))^{1/2} P_n(\tau)(A(\tau))^{-1} \Delta u'_n(\tau)\|_H^2 + \|\Delta u_n(\tau)\|_H^2 \\ & = 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (R_n(t)u(t), \Delta u'_n(t))_H dt \\ & \quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (B(t)\Delta u_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H dt \\ & \quad - \int_0^\tau a'(t; P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)) dt, \end{aligned} \quad (41)$$

где τ – любое число из $[0, T]$. Принимая во внимание (23) и (12), оценим

$$2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (R_n(t)u(t), \Delta u'_n(t))_H dt \leq 2a_0^2 a_1 \rho_n^2 \int_0^T \|A(t)u(t)\|_H dt \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u'_n(t)\|_H. \quad (42)$$

Затем оценим с помощью условия (В3) и (6)

$$2 \left| \operatorname{Re} \int_0^\tau (B(t) \Delta u_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t))_H dt \right| \leq 2 \int_0^\tau \|(B(t))^* \|_{\mathcal{L}(V;H)} \|\Delta u_n(t)\|_H \|P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)\|_V dt, \quad (43)$$

$$\left| \int_0^\tau a'(t; P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t), P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)) dt \right| \leq a_2 \int_0^\tau \|P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)\|_V^2 dt. \quad (44)$$

В силу (4)

$$\|(A(\tau))^{1/2} P_n(\tau)(A(\tau))^{-1} \Delta u'_n(\tau)\|_H^2 \geq a_0^{-1} \|P_n(\tau)(A(\tau))^{-1} \Delta u'_n(\tau)\|_V^2. \quad (45)$$

Из (41)–(45) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \|P_n(\tau)(A(\tau))^{-1} \Delta u'_n(\tau)\|_V^2 + \|\Delta u_n(\tau)\|_H^2 \\ & \leq N_4 \rho_n^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u'_n(t)\|_H \\ & + \int_0^\tau (N_5 \|(B(t))^* \|_{\mathcal{L}(V;H)} + N_6) (\|P_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u'_n(t)\|_V^2 + \|\Delta u_n(t)\|_H^2) dt, \end{aligned} \quad (46)$$

где N_4, N_5, N_6 – константы, не зависящие от n, τ . Учитывая (37), применим к (46) лемму Беллмана [16, с. 188], тогда получим

$$\|P_n(\tau)(A(\tau))^{-1} \Delta u'_n(\tau)\|_V^2 + \|\Delta u_n(\tau)\|_H^2 \leq N_7 \rho_n^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u'_n(t)\|_H, \quad (47)$$

где константа N_7 не зависит от n, τ . Отбрасывая первое слагаемое в левой части (47) и оценивая правую часть (47) с помощью (24), имеем (38).

Усилим оценки (24), (38), считая, что решение исходной задачи имеет повышенную гладкость.

ТЕОРЕМА 5. *Если решение задачи (1), (2) обладает свойством гладкости (17), то*

$$\max_{0 \leq t \leq T} (\|\Delta u'_n(t)\|_H + \|\Delta u_n(t)\|_V) = O(\rho_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (48)$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3 с той разницей, что первый член правой части (28) оценивается следующим образом:

$$2 \operatorname{Re} \int_0^\tau (\Delta u''_n(t), R_n(t) u'_n(t))_H dt \leq 4a_0^2 a_1 M_2 \rho_n^2 \int_0^T \|A(t) u'_n(t)\|_H dt. \quad (49)$$

При получении (49) используем (11), (14), (23) и (17). Применяя (49) вместо (29), получаем вместо неравенства (36) подобное ему неравенство без $N_1 \rho_n r_n$ в правой части и с другой константой N_2 , из которого в силу леммы Гронуолла следует (48).

ЗАМЕЧАНИЕ. По определению ρ_n оценка (48) является точной по порядку аппроксимации элементов из $D(A)$ элементами V_n в норме $\|\cdot\|_V$, откуда нетрудно вывести, что эта оценка неуплучшаема в рассматриваемом классе решений.

ТЕОРЕМА 6. Если выполнены условия (A3), (B3) и решение задачи (1), (2) обладает свойством гладкости (17), то

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H = O(\rho_n^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in [0, T]$ выводим равенство (41) и оцениваем его члены, следуя доказательству теоремы 4 с той разницей, что вместо (42) используем оценку

$$\left| \int_0^\tau (R_n(t)u(t), \Delta u'_n(t))_H dt \right| \leq N_8 \rho_n^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H, \quad (51)$$

где константа N_8 не зависит от n, τ . В результате вместо неравенства (46) устанавливаем подобное ему неравенство с заменой $\|\Delta u'_n(t)\|_H$ на $\|\Delta u_n(t)\|_H$ под знаком максимума в правой части и с другой константой N_4 , из которого с помощью леммы Беллмана получаем (50).

Для завершения доказательства остается получить (51). Предварительно заметим, что в силу (12), (17) и условия (A3)

$$"t \rightarrow A(t)u(t)" \in C([0, T]; H). \quad (52)$$

Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau (R_n(t)u(t), \Delta u'_n(t))_H dt \\ &= - \int_0^\tau (R'_n(t)u(t), \Delta u_n(t))_H dt - \int_0^\tau (R_n(t)u'(t), \Delta u_n(t))_H dt \\ & \quad + (R_n(\tau)u(\tau), \Delta u_n(\tau))_H. \end{aligned} \quad (53)$$

Выражение под знаком первого интеграла в правой части (53) преобразуем, используя очевидное равенство $R'_n(t) = -P'_n(t)$ и (19) с $v = u(t)$, $w = (A(t))^{-1}\Delta u_n(t)$:

$$\begin{aligned} (R'_n(t)u(t), \Delta u_n(t))_H &= -a'(t; R_n(t)u(t), P_n(t)(A(t))^{-1}\Delta u_n(t)) \\ &= -a'(t; R_n(t)u(t), (A(t))^{-1}\Delta u_n(t)) \\ & \quad + a'(t; R_n(t)u(t), R_n(t)(A(t))^{-1}\Delta u_n(t)). \end{aligned} \quad (54)$$

Принимая во внимание условие (A3), (23), (52), (6), (4), (20), (17), оценим

$$\left| \int_0^\tau a'(t; R_n(t)u(t), (A(t))^{-1} \Delta u_n(t)) dt \right| \leq a_0^2 a_1 \rho_n^2 \int_0^T \|A'(t)(A(t))^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} dt \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|_H \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H, \quad (55)$$

$$\left| \int_0^\tau a'(t; R_n(t)u(t), R_n(t)(A(t))^{-1} \Delta u_n(t)) dt \right| \leq a_0^3 a_1 a_2 \rho_n^2 \int_0^T \|A(t)u(t)\|_H dt \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H, \quad (56)$$

$$\left| \int_0^\tau (R_n(t)u'(t), \Delta u_n(t))_H dt \right| \leq a_0^2 a_1 \rho_n^2 \int_0^T \|A(t)u'(t)\|_H dt \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H, \quad (57)$$

$$|(R_n(\tau)u(\tau), \Delta u_n(\tau))_H| \leq a_0^2 a_1 \rho_n^2 \max_{0 \leq t \leq T} \|A(t)u(t)\|_H \max_{0 \leq t \leq T} \|\Delta u_n(t)\|_H. \quad (58)$$

Из (53)–(58) следует (51). Теорема доказана.

Приведем типичную оценку величины ρ_n для случая, когда (1), (2) – первая началь-но-краевая задача в цилиндрической области $\Omega \times [0, T]$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ($s \in \mathbb{N}$) – ограниченная область с гладкой границей, для гиперболического уравнения второго порядка, и полудискретное приближенное решение этой задачи строится методом конечных элементов. Будем использовать обозначения пространств Соболева, принятые в [10], [14]. В данном случае $H = L^2(\Omega)$, $A(t)$ ($t \in [0, T]$) – эллиптические операторы второго порядка с гладкими коэффициентами, заданные на $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Оператор A_0 определим на $D(A)$ равенством $A_0 = -\nabla^2$, где ∇^2 – оператор Лапласа; тогда $V = H_0^1(\Omega)$. Для метода конечных элементов характерно следующее аппроксимационное свойство подпространств V_n (см., например, [14, с. 135]):

$$\min_{v_n \in V_n} \|v - v_n\|_{H^1(\Omega)} \leq c_0 h_n \|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad (59)$$

где v – любая функция из $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, c_0 – константа, не зависящая от v и n , h_n – максимальный из диаметров конечных элементов, порождающих V_n . В силу второго основного неравенства для эллиптических операторов [12, с. 118] нормы $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ и $\|A_0 \cdot\|_H$ эквивалентны на $D(A)$ и из (59) следует

$$\rho_n \leq c h_n, \quad (60)$$

где c – константа, не зависящая от n . Совмещая (60) с основными результатами настоящей работы, получаем оценки погрешности метода конечных элементов в терминах величины h_n .

Для другого варианта метода Галёркина, когда V_n – собственные подпространства оператора A_0 , имеем $\rho_n = \|R_n A_0^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(H)} = \mu_n^{-1/2}$, где μ_n – минимальное из собственных значений оператора A_0 , соответствующих его собственным элементам, не принадлежащим V_n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Смагин В. В. Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Матем. 1996. № 3. С. 50–57.
- [2] Смагин В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 143–160.
- [3] Железовская Л. А., Железовский С. Е., Кириченко В. Ф., Крысько В. А. О скорости сходимости метода Бубнова–Галёркина для гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 2. С. 323–333.
- [4] Железовский С. Е. Метод Бубнова–Галёркина для абстрактной квазилинейной задачи о стационарном действии // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1222–1231.
- [5] Железовский С. Е. О скорости сходимости метода Галёркина для одного класса квазилинейных эволюционных задач. Деп. ВИНТИ 08.01.98, № 24–В98. Новосибирск: Ред. Сиб. матем. ж., 1998.
- [6] Ляшко А. Д. О сходимости методов типа Галёркина // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120. № 2. С. 242–244.
- [7] Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и быстрой сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.
- [8] Соболевский П. Е. Теорема о смешанных производных и оценка скорости сходимости метода Галёркина для параболических уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 8. С. 12–16.
- [9] Зарубин А. Г. О скорости сходимости метода Фаэдо–Галёркина для квазилинейных нестационарных операторных уравнений // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2051–2059.
- [10] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
- [11] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
- [12] Ладженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [13] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
- [14] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
- [15] Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
- [16] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.

Поволжская академия государственной службы, г. Саратов

Поступило
15.12.1998