Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Лорети, М. Педичини, Идемпотентный аналог резольвентных ядер для детерминированной задачи оптимального управления, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 235–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:19:48

УДК 517

ИДЕМПОТЕНТНЫЙ АНАЛОГ РЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ЯДЕР ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

П. Лорети, М. Педичини

Решение дискретного уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана представлено в терминах идемпотентного анализа как сходящийся ряд интегральных операторов.

Библиография: 6 названий.

Введение. Во многих случаях использование полукольца $(\mathbb{R}, \min, +)$ играет фундаментальную роль для применения конструкций, развитых для линейных задач, к нелинейным задачам. Хорошо известно, что дискретное уравнение Беллмана можно понимать как линейное уравнение на подходящем идемпотентном полукольце. В настоящей работе мы обсуждаем одно из возможных направлений дальнейшего развития теории, связанное с идемпотентным анализом. Более точно, дискретное уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана оказывается интегральным уравнением, изучение которого может внести вклад в развитие методов функционального анализа, используемых для аппроксимации решений уравнения Вольтерра с помощью резольвентных ядер.

Разумеется, наш метод не является наиболее общим методом идемпотентного анализа, равно как наши предположения, позволяющие установить связь с идемпотентным анализом, не являются вполне стандартными в теории оптимального управления. Однако, они в самом широком смысле позволяют продемонстрировать наличие глубокой аналогии между методами идемпотентного и функционального анализа для того, чтобы найти варианты построения аппроксимаций. Основной результат – формула представления ценовой функцией в терминах линейных операторов. Это позволяет установить важные свойства и в нелинейных случаях рассмотреть варианты использования параллельных алгоритмов, развитых для линейной алгебры. В рамках идемпотентного анализа упрощается явная конструкция решения. Для доказанных теорем и утверждений мы указываем их аналоги в духе принципа соответствия. Вместо напоминания в контексте эвристических соображений мы детально рассматриваем некоторые факты. В [1] принцип соответствия используется для того, чтобы развить объектно-ориентированное программное обеспечение и аппаратную реализацию для алгоритмов идемпотентного исчисления. Наши усилия направлены на конкретизацию этих об-

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

ских эвристических идей идемпотентного анализа для нашей задачи и изучение деталей. Это позволяет нам высказать соображения относительно дальнейших исследований. Прежде всего, это распространение аналогии на символическое исчисление, в том числе реализация идеи универсальных алгоритмов. С другой стороны, потребуются немалые усилия для того, чтобы сформулировать общую вычислительную стратегию, учитывающую свойство линейности задачи в новом смысле. Это составит предмет нашей следующей публикации.

Рассмотрим кратко нашу задачу оптимального управления. Мы рассматриваем динамический процесс, для которого можно выбирать управляющие функции и моменты остановки. Предполагаются заданными две функции: цена текущего управления f и цена остановки ψ , зависящие от состояния процесса и управлений. Мы должны минимизировать заданный функционал по всем управлениям α и всем временам остановки θ , т.е. мы хотим найти (минимальную) ценовую функцию

$$u(x) = \inf_{\alpha, \theta} J(x, \alpha, \theta), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Как хорошо известно (см. например [2]), эта задача может рассматриваться как детерминированная задача управления с бесконечным горизонтом и расширенной областью допустимых управлений (содержащей нулевую компоненту) и соответствующими дополнительными компонентами поля скоростей и функции цены. С другой стороны, обратное имеет место только в том случае, когда существует управление такое, что $b(X(t), \alpha(t)) = 0$ для всех t .

Уравнение Гамильтона–Якоби, связанное с задачей времени остановки, можно рассматривать как вариационное неравенство типа препятствия.

Кратко опишем содержание статьи. В первом разделе мы напоминаем постановку интересующей нас задачи оптимального управления и ее дискретизацию. Во втором разделе мы переписываем эту задачу, используя подходящие алгебраические структуры, чтобы линеаризовать ее, и находим аналог формулы Дирихле для идемпотентного исчисления. Наконец, в третьем разделе мы формулируем и доказываем основные результаты, основанные на интегральном представлении решения.

1. Задача оптимального управления. Рассмотрим детерминированную задачу оптимального управления моментом остановки. Мы предполагаем, что состояние системы определяется решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{X}(t) = b(X(t), \alpha(t)), \quad X(0) = x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

В уравнении (1) b является непрерывной функцией из $\mathbb{R}^n \times A$ в $\mathbb{R}^n$, компактное подмножество A в $\mathbb{R}^m$ будет называться *множеством допустимых управлений*. Кроме того, чтобы обеспечить существование и единственность решения в классе $\text{Lip}[0, T]$ для произвольного $T > 0$, мы предполагаем, что для всех $(x, x', a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times A$ существуют константы $M_b, L_b > 0$ такие, что

$$|b(x, a) - b(x', a)| \leq L_b |x - x'|, \quad |b(x, a)| \leq M_b.$$

Далее мы рассматриваем цены управления, заданные функциями

$$J(x, \alpha(t), \theta) = \int_0^\theta f(X(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt + \psi(X(\theta)) e^{-\lambda \theta},$$

где $\psi \in BUC(\mathbb{R}^n)$ (ограниченные и равномерно непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$) и λ – положительный параметр. Мы предполагаем, что для всех $(x, x', a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times A$ существуют $L_f, M_f > 0$ такие, что

$$|f(x, a) - f(x', a)| \leq L_f |x - x'|, \quad |f(x, a)| \leq M_f.$$

Управление задается парой, состоящей из $\alpha(\cdot)$ и времени остановки θ . Это означает, что стоимость остановки системы в любой момент равна ψ . Минимальная ценовая функция по определению равна

$$u(x) = \inf_{\alpha, \theta} J(x, \alpha, \theta) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \theta \geq 0.$$

Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\max \left\{ u(x) - \psi(x), \lambda u(x) + \max_{a \in A} \{ -b(x, a) Du(x) - f(x, a) \} \right\} = 0$$

является условием оптимальности для детерминированной задачи оптимального управления. В самом деле, предполагая C^1 -гладкость решения $u(x)$ и свойство непрерывности управления, можно определить оптимальное управление с обратной связью. Случаи потери регулярности цены так легко построить, что приведенные соображения редко используются. Дальнейшее развитие этого подхода связано с использованием понятия вязкостного решения (метода исчезающей вязкости), введенного М.Г. Крандаллом и П.-Л. Лионсом в более общей ситуации [3].

По аналогии с [4] дискретный аналог уравнения имеет вид

$$u_h(x) = \min \left\{ \min_{a \in A} \{ (1 - \lambda h) u_h(x + hb(x, a)) + hf(x, a) \}, \psi(x) \right\}. \quad (2)$$

2. Идемпотентный аналог. В этом разделе мы напомним традиционный подход, использованный Масловым и его соавторами в интерпретации дифференциальных уравнений в идемпотентных полукольцах, и продемонстрируем метод замены переменных для сведения уравнения (2) к уравнению типа уравнения Вольтерра второго рода.

Для постановки задачи рассмотрим полукольцо $\mathbb{R}_{\min}$, т.е. множество $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, которое снабжено операциями $a \oplus b \equiv \min(a, b)$ и $a \odot b \equiv a + b$; нейтральным элементом 0 относительно $\oplus$ является $+\infty$ и $1 \equiv 0$ относительно $\odot$. Это полукольцо снабжено “мерой”, определенной соотношением

$$\int_X^\oplus f(x) \odot g(x) dx = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}.$$

Как и обычный интеграл, идемпотентный интеграл обладает некоторыми полезными свойствами, которые мы здесь перечислим. Во-первых,

$$\int_X^{\oplus} f(x) dx \oplus \int_X^{\oplus} g(x) dx = \int_X^{\oplus} f(x) \oplus g(x) dx.$$

Действительно,

$$\min \left\{ \inf_{x \in X} f(x), \inf_{x \in X} g(x) \right\} = \inf_{x \in X} \min \{ f(x), g(x) \},$$

Далее, для любого $k \in \mathbb{R}_{\min}$

$$\int_X^{\oplus} k \odot f(x) dx = k \odot \int_X^{\oplus} f(x) dx.$$

Действительно,

$$\inf_{x \in X} \{ k + f(x) \} = k + \inf_{x \in X} f(x).$$

Кроме того,

$$\int_{X \cup Y}^{\oplus} f(x) dx = \int_X^{\oplus} f(x) dx \oplus \int_Y^{\oplus} f(x) dx.$$

Действительно,

$$\inf_{x \in X \cup Y} f(x) = \min \left\{ \inf_{x \in X} f(x), \inf_{x \in Y} f(x) \right\}.$$

Если аддитивная операция на полукольце является идемпотентной, то можно ввести частичный порядок следующим образом: $a \preceq b$, если и только если $a \oplus b = b$; в этом случае может быть установлено несколько алгебраических свойств:

- (i) $a \preceq b, \mathbf{1} \preceq c \implies a \preceq b \odot c,$
- (ii) $\forall c, a \preceq b \implies c \odot a \preceq c \odot b,$
- (iii) $a \preceq b, \mathbf{0} \preceq c \preceq \mathbf{1} \implies c \odot a \preceq b,$
- (iv) $f \preceq g \implies \int_X^{\oplus} f(x) dx \preceq \int_X^{\oplus} g(x) dx$

Другим важным результатом, использующим определение меры, удовлетворяющей аксиомам идемпотентного полукольца, является аналог теоремы Фубини:

$$\int_X^{\oplus} \int_Y^{\oplus} \varphi(x, y) dy dx = \int_Y^{\oplus} \int_X^{\oplus} \varphi(x, y) dx dy.$$

В частности, для рассматриваемого полукольца нетрудно доказать, что

$$\inf_{x \in X} \inf_{y \in Y} \varphi(x, y) = \inf_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x, y).$$

В дальнейшем, более общая форма этих соотношений будет использована для перестановки порядка интегрирования по множествам, зависящим от переменных интегрирования внешнего интеграла. Следующая формула является следствием теоремы Фубини, и она верна как для идемпотентных полуколец, так и в более традиционной постановке (она используется также в оригинале доказательства метода резольвентных ядер в работе [5]):

$$\int_X dx \int_{F(x)} \varphi(x, y) dy = \int_{F(X)} dy \int_{F^{-1}(y)} \varphi(x, y) dx.$$

Более точно, мы предполагаем, что F является функцией, сопоставляющей подмножество из Y любому элементу $x \in X$, (т.е. $F(x) \subset Y$), и записываем $F^{-1}(y) = \{x: y \in F(x)\}$.

Как в дальнейшем увидит читатель, в последующих формулах помимо идемпотентных операций возникают обычные произведения: в полукольце $\mathbb{R}_{\min}$ могут применяться следующие правила для каждого $\lambda \in \mathbb{R}_{\min}$:

$$\lambda \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

и при условии что $\lambda \geq 0$,

$$\lambda \left(\int_X^{\oplus} f(x) \odot g(x) dx \right) = \int_X^{\oplus} (\lambda f(x)) \odot (\lambda g(x)) dx.$$

В заключение этого раздела мы приведем идемпотентную запись дискретного уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (2):

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} u_h(\xi_0) \odot G_h(x, \xi_0) d\xi_0, \quad (3)$$

где $\tilde{\lambda} = (1 - \lambda h)$, $B(x, a) = x + hb(x, a)$ и

$$G_h(x, \xi) = \frac{h}{1 - \lambda h} \min \left\{ f(x, a); a \in \pi_2 \left(b^{-1} \left(\frac{\xi - x}{h} \right) \right) \right\}.$$

Через π_2 обозначается проектор $\mathbb{R}^n \times A \rightarrow A$.

3. Резольвентные ядра и динамическое программирование. Интегральное уравнение (3), выраженное через обычные интегралы, может быть решено различными методами. Подход, рассмотренный Масловым для однородного случая, является аналогом спектральной теории для идемпотентных полуколец. В этом разделе мы следуем другим путем: решение, полученное в [4], [6] методом последовательных аппроксимаций, записывается в идемпотентной версии как резольвентное (разрешающее) ядро, связанное с интегральным уравнением.

Функция $G_h(x, \xi_0)$ называется *ядром* уравнения, и его решение записывается в виде

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x, A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt, \quad (4)$$

где *итерированные ядра* $K^{(n)}(t, x)$ определяются формулами:

$$\begin{cases} K^{(1)}(t, x) = G_h(x, t), & t \in B^{(p)}(x, A), \quad p \geq 1, \\ K^{(n+1)}(t, x) = \int_{B^{-1}(t)}^{\oplus} K^{(1)}(t, \xi) \odot \frac{K^{(n)}(\xi, x)}{\tilde{\lambda}} d\xi, & t \in B^{(p)}(x, A), \quad p \geq n+1. \end{cases}$$

В дальнейшем мы покажем, что формула (4) действительно дает решение для (3) и что оно единственно. Предполагается, что параметр h достаточно мал (см. замечание после теоремы 3.3 ниже).

Чтобы получить (4), мы решаем уравнение методом последовательных приближений: все вхождения функции $u_h(x)$ в уравнение (3) заменяются правыми частями (3) и методом индукции по p доказывается следующее соотношение

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для каждого целого p выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^p \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x, A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \\ \oplus \tilde{\lambda}^{p+1} \int_{B^{p+1}(x, A)}^{\oplus} u_h(t) \odot K^{(p+1)}(t, x) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где $B^n(x, A) = \{B(B(\dots(B(x, \alpha_1), \alpha_2), \dots), \alpha_n) \mid \alpha_i \in A\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $p = 1$ мы должны доказать равенство

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(1)}(t, x) dt \oplus \tilde{\lambda}^2 \int_{B^2(x, A)}^{\oplus} u_h(t) \odot K^{(2)}(t, x) dt.$$

Подставляя $u_h(x)$ в (3), получим

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} \left[\psi(\xi_0) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(\xi_0, A)}^{\oplus} u_h(\xi_1) \odot G_h(\xi_0, \xi_1) d\xi_1 \right] \odot G_h(x, \xi_0) d\xi_0.$$

Поскольку $\tilde{\lambda} > 0$, то в силу дистрибутивности имеем

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} \psi(\xi_0) \odot K^{(1)}(\xi_0, x) d\xi_0 \\ &\quad \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} \left[\tilde{\lambda} \int_{B(\xi_0, A)}^{\oplus} u_h(\xi_1) \odot K^{(1)}(\xi_1, \xi_0) d\xi_1 \right] \odot K^{(1)}(\xi_0, x) d\xi_0 \\ &= \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} \psi(\xi_0) \odot K^{(1)}(\xi_0, x) d\xi_0 \\ &\quad \oplus \tilde{\lambda}^2 \int_{B(x, A)}^{\oplus} \left[\int_{B(\xi_0, A)}^{\oplus} u_h(\xi_1) \odot K^{(1)}(\xi_1, \xi_0) d\xi_1 \right] \odot \frac{K^{(1)}(\xi_0, x)}{\tilde{\lambda}} d\xi_0. \end{aligned}$$

В силу формулы Дирихле правая часть равна

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x,A)}^{\oplus} \psi(\xi_0) \odot K^{(1)}(\xi_0, x) d\xi_0 \\ \oplus \tilde{\lambda}^2 \int_{B(B(x,A),A)}^{\oplus} u_h(\xi_1) \odot \int_{B^{-1}(\xi_1)}^{\oplus} K^{(1)}(\xi_1, \xi_0) \odot \frac{K^{(1)}(\xi_0, x)}{\tilde{\lambda}} d\xi_0 d\xi_1.$$

По предположению индукции (5) верно, поэтому можно применить следующий шаг процедуры аппроксимации (т.е. подставить $u_h(x)$ в последний член правой части уравнения (3)):

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^p \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x,A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \\ \oplus \tilde{\lambda}^{p+1} \int_{B^{p+1}(x,A)}^{\oplus} \left[\psi(t) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x,A)}^{\oplus} u_h(\xi_p) \odot G_h(x, \xi_p) d\xi_p \right] \odot K^{(p+1)}(t, x) dt,$$

и поэтому в силу дистрибутивности выполняется равенство

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^{p+1} \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x,A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \\ \oplus \tilde{\lambda}^{p+1} \int_{B^{p+1}(x,A)}^{\oplus} \left[\tilde{\lambda} \int_{B(x,A)}^{\oplus} u_h(\xi_p) \odot G_h(x, \xi_p) d\xi_p \right] \odot K^{(p+1)}(t, x) dt.$$

В силу формулы Дирихле имеем

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^{p+1} \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x,A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \\ \oplus \tilde{\lambda}^{p+2} \int_{B(B^{p+1}(x,A),A)}^{\oplus} u_h(\xi_p) \odot \left[\int_{B^{(-1)}(\xi_p)}^{\oplus} \odot K^{(1)}(\xi_p, x) \odot K^{(p+1)}(t, x) dt \right] d\xi_p$$

и по определению итерированного ядра получаем

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \bigoplus_{n=1}^{p+1} \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x,A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \\ \oplus \tilde{\lambda}^{p+2} \int_{B^{p+2}(x,A)}^{\oplus} u_h(\xi_p) \odot K^{(p+2)}(\xi_p, x) d\xi_p.$$

Остается доказать, что значение критерия качества (минимальной ценовой функции) корректно определено. Формула (4) имеет смысл, если мы докажем, что функции, составляющие сумму

$$A_n = \tilde{\lambda}^n \int_{B^n(x,A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt,$$

являются ограниченными; в этом случае сходимость идемпотентного ряда будет доказана, а это означает существование целого n такого, что нижняя грань существует.

Следующее свойство доказывает сходимость ряда.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Для каждого целого n функция $\lambda^n |K^{(n)}(t, x)|$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы покажем, что итерированные ядра ограничены:

$$M_f \preccurlyeq \left| \min_{a \in \pi_2(b^{-1}(\xi-x)/h)} f(x, a) \right|.$$

Напомним, что через π_2 обозначен проектор $\mathbb{R}^n \times A \rightarrow A$. Полагая $m_h = hM_f$, мы получаем, что $|G_h(x, \xi)| \preccurlyeq m_h/\tilde{\lambda}$, и по определению

$$m_h \preccurlyeq \tilde{\lambda} |K^{(1)}(t, x)|.$$

По индукции предположим, что

$$m_h \bigodot_{k=0}^{n-1} \tilde{\lambda}^k \preccurlyeq \tilde{\lambda}^n |K^{(n)}(t, x)|,$$

и покажем, что

$$m_h \bigodot_{k=0}^n \tilde{\lambda}^k \preccurlyeq \tilde{\lambda}^{n+1} |K^{(n+1)}(t, x)|.$$

По определению имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{n+1} K^{(n+1)}(t, x) &= \int_{B^{-1}(t)}^{\oplus} \tilde{\lambda}^{n+1} K^{(1)}(t, \xi) \odot \frac{\tilde{\lambda}^{n+1} K^{(n)}(\xi, x)}{\tilde{\lambda}} d\xi \\ &= \int_{B^{-1}(t)}^{\oplus} \tilde{\lambda}^{n+1} K^{(1)}(t, \xi) \odot \tilde{\lambda}^n K^{(n)}(\xi, x) d\xi, \end{aligned}$$

и поэтому выполняется оценка

$$m_h \tilde{\lambda}^n \odot m_h \bigodot_{k=0}^{n-1} \tilde{\lambda}^k \preccurlyeq |\tilde{\lambda}^{n+1} K^{(n+1)}(t, x)|.$$

Поскольку ряд $m_h \bigodot_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}^k$ сходится к $m_K = m_h/(1 - \tilde{\lambda})$, мы получаем, что общий элемент A_n идемпотентного ряда ограничен; действительно,

$$m_\psi \odot m_K \preccurlyeq \tilde{\lambda}^n \left| \int_{B^n(x, A)}^{\oplus} \psi(t) \odot K^{(n)}(t, x) dt \right|,$$

где $m_\psi \preccurlyeq |\psi(x)|$, и поэтому идемпотентный ряд $\bigoplus_{n=1}^{\infty} A_n$ также сходится.

Для доказательства единственности решения мы напомним хорошо известный факт: Пусть

$$T'u_h(x) = \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} u_h(t) \odot G_h(x, t) dt$$

и $Tu_h(x) = \psi(x) \oplus T'u_h(x)$. Покажем, что T – сжимающий оператор. Действительно, справедливо неравенство $|Tu_h^1 - Tu_h^2| \leq |T'u_h^1 - T'u_h^2|$. Теперь предположим, что функция $\hat{t}$ такова, что $T'u_h^2(x) = \tilde{\lambda}(u_h^2(\hat{t}) \odot G(x, \hat{t}))$. Поэтому

$$|T'u_h^1(x) - T'u_h^2(x)| \leq |\tilde{\lambda}(u_h^1(\hat{t}) \odot G_h(x, \hat{t}) - u_h^2(\hat{t}) \odot G_h(x, \hat{t}))| = \tilde{\lambda} |u_h^1(\hat{t}) - u_h^2(\hat{t})|,$$

т.е.

$$\|Tu_h^1 - Tu_h^2\|_{\infty} \leq \tilde{\lambda} \|u_h^1 - u_h^2\|_{\infty},$$

и это обеспечивает единственность функции u_h такой, что $Tu_h = u_h$.

Принцип дискретного динамического программирования проявляется на уровне p -шаговой аппроксимации однородного уравнения Вольтерра для достаточно малых h :

ТЕОРЕМА 3.3. Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ такого, что $u_h(x) < \psi(x)$, существует целое p_0 такое, что для любого $p \leq p_0$ выполнено равенство:

$$u_h(x) = \tilde{\lambda}^p \int_{B^p(x, A)}^{\oplus} u_h(t) \odot K^{(p)}(t, x) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу непрерывности $u_h(x)$ и $\psi(x)$ существует шар N_x с центром в точке x такой, что для любого $z \in N_x \cap B^p(x, A)$ выполнено условие $u_h(z) < \psi(z)$. Таким образом, уравнение (3) может рассматриваться как однородное, и утверждение теоремы доказывается методом итерированных аппроксимаций, следуя схеме доказательства предложения 3.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для применимости утверждения теоремы h достаточно мало в том смысле, что существует h_0 такое, что для любого $h \leq h_0$ из $u_h(x) < \psi(x)$ следует, что $u_h(z) < \psi(z)$ для любого $z = B_h(x, A)$.

Поэтому применительно к приближенному решению $u_h(x)$ уравнения (3) закон обратной связи F может быть определен явным образом. Это показано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть задано отображение $F: \mathbb{R}^n \rightarrow A$ такое, что для любого x и $z = B_h(x, F(x))$ существует h_0 такое, что если $u_h(x) < \psi(x)$, то $u_h(z) < \psi(z)$ для любого $h < h_0$ и $u_h(x) = \tilde{\lambda}[u_h(z) \odot G_h(x, z)]$. Пусть определены последовательность $(z_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$, заданная соотношениями

$$\begin{cases} z_0(x) = x, \\ z_{p+1}(x) = B(z_p(x), F(z_p(x))), \end{cases}$$

и последовательность итерированных ядер, заданная соотношениями

$$\begin{cases} \bar{K}_1(x) = G_h(x, z_1(x)), \\ \bar{K}_{p+1}(x) = G_h(z_p(x), z_{p+1}(x)) \odot \frac{\bar{K}_p(x)}{\tilde{\lambda}}. \end{cases}$$

Тогда последовательность $(z_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ описывает оптимальную траекторию, т.е.

$$u_h(x) = \tilde{\lambda}^{p+1}[u_h(z_{p+1}(x)) \odot \bar{K}_p(x)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (3) имеет вид

$$u_h(x) = \psi(x) \oplus \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} u_h(\xi_0) \odot G_h(x, \xi_0) d\xi_0.$$

Действительно, для $u_h(x) < \psi(x)$ мы имеем выражение

$$u_h(x) = \tilde{\lambda} \int_{B(x, A)}^{\oplus} u_h(\xi_0) \odot G_h(x, \xi_0) d\xi_0,$$

и в силу того, что $u_h(\cdot)$ и $G_h(\cdot)$ являются ограниченными функциями, существует среднее значение z_x для интеграла, т.е.:

$$u_h(x) = \tilde{\lambda}[u_h(z_x) \odot G_h(x, z_x)].$$

Поэтому $F(x) = a_x$, где a_x удовлетворяет условию $z_x = B(x, a_x)$.

Более того, как следствие принципа дискретного динамического программирования, мы заключаем, что последовательность $(z_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ является оптимальной траекторией.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Litvinov G. L., Maslov V. P. Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications. Preprint IHES. Bures-sur-Yvette, 1995; Gunawardena J. (editor) Idempotency. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
- [2] Bardi M., Capuzzo Dolcetta I. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [3] Crandall M. G., Lions P. L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacoby equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 277. № 1. P. 1–42.
- [4] Capuzzo Dolcetta I., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control program. // Appl. Math. Optim. 1984. № 11. P. 161–181.
- [5] Volterra V., Pèrès J. Théorie générale des fonctionelles. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1936.
- [6] Loreti P. Approssimazione di soluzioni di viscosità dell'equazione di Bellman // Bollettino della Unione Matematica Italiana. 1986. V. 6. № 5b. P. 141–163.

(П. Лорети) Università di Roma “La Sapienza”

Поступило

(М. Педичинни) Consiglio Nazionale delle Ricerche

21.01.1998

E-mail: loreti@dmmm.uniroma1.it, marco@iac.rm.cnr.it