Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Волков, Обобщенное преобразование Безье, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 655–664

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4991>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:24:40

Обобщенное преобразование Безье

Ю. И. Волков

В статье изучаются свойства обобщенного преобразования Безье, его применения для приближения функций и построения кривых. Также изучается многомерная версия этого преобразования.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm4991

1. Введение. Пусть: $\{y\}$ (или короче y) обозначает числовую последовательность $\{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$;

$$b = b(x, a) := x \left(1 - \frac{2a(1-x)}{a + \sqrt{1 + (a^2 - 1)(2x - 1)^2}} \right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad a \geq 0,$$

$$C(n, k, a) := \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} (1 + 2az + z^2)^n \Big|_{z=0} = \sum_{i+2j=k} \frac{n!(2a)^i}{i!j!(n-i-j)!}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция

$$B_n(y, x, a) := \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2}$$

называется *обобщенным преобразованием Безье* последовательности $\{y\}$.

В частности, если $a = 1$, то

$$C(n, k, 1) = C_{2n}^k, \quad B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x) = \sum_{k=0}^{2n} y_k C_{2n}^k x^k (1-x)^{2n-k},$$

т.е. $B_n(y, x, 1)$ обычная функция Безье, порождаемая последовательностью $\{y\}$ (см., например, [1], стр. 44–62); если $a = 0$, то

$$C(n, k, 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетное,} \\ C_n^{n-k/2}, & \text{если } k \text{ четное,} \end{cases}$$

а $B_n(y, x, 0)$ обычная функция Безье, которая порождается последовательностью $\{y\} = \{y_0, y_2, y_4, \dots, y_{2n}\}$.

Целью настоящей статьи является изучение функций $B_n(y, x, a)$ и их применение для приближения непрерывных функций и построения кривых.

2. Вспомогательные предложения.

ЛЕММА 1. Числа $C(n, k, a)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C(n, k, a) = C(n-1, k, a) + 2aC(n-1, k-1, a) + C(n-1, k-2, a),$$

$$C(0, 0, a) = 1, \quad C(0, k, a) = 1, \quad C(1, 1, a) = 2a, \quad C(2, 1, a) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из соотношения

$$(1 + 2az + z^2)^n = (1 + 2az + z^2)^{n-1}(1 + 2az + z^2),$$

ибо $C(n, k, a)$ это коэффициенты многочлена

$$(1 + 2az + z^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} C(n, k, a) z^k.$$

ТАБЛИЦА 1. Таблица чисел $C(n, k, a)$ для $n = 1, 2, 3, 4$

1	$2a$	1							
1	$4a$	$2 + 4a^2$	$4a$	1					
1	$6a$	$3 + 12a^2$	$12a + 8a^3$	$3 + 12a^2$	$6a$	1			
1	$8a$	$4 + 24a^2$	$24a + 32a^3$	$6 + 48a^2 + 16a^4$	$24a + 32a^3$	$4 + 24a^2$	$8a$	1	

Дальше будем использовать обозначение

$$w = w(x, a) := \sqrt{1 + (a^2 - 1)(2x - 1)^2} = \sqrt{4x(1 - x) + a^2(2x - 1)^2}.$$

ЛЕММА 2. Функция $b(x, a)$, ее первая и вторая производные по x неотрицательные и $b(x, a) \leq 1$.

Действительно,

$$b'(x, a) = \frac{w(x, a) + a(2x - 1)}{w(x, a)} \geq \frac{a|2x - 1| + a(2x - 1)}{w(x, a)} \geq 0.$$

Поэтому функция $b(x, a)$ не убывает, а поскольку $b(0, a) = 0$, $b(1, a) = 1$, то $0 \leq b(x, a) \leq 1$.

Далее,

$$b''(x, a) = 2a(w(x, a))^{-3} \geq 0. \quad (1)$$

Поэтому функция $b'(x, a)$ не убывает, а поскольку $b'(0, a) = 0$, $b'(1, a) = 2$, то $0 \leq b'(x, a) \leq 2$.

ЛЕММА 3. Имеет место представление

$$B_n(y, x, a) = b(1 - x, a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) a^k \left(\frac{b(x, a)}{x - b(x, a)} \right)^k. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из определения функции $b(x, a)$.

Из (2) следует, что операция перехода от последовательности $\{y\}$ к функции $B_n(y, x, a)$ линейная и положительная.

Пусть E оператор сдвига, I – единичный оператор и Δ – разностный оператор. Тогда

$$E^k y_0 = y_k, \quad I y_k = y_k, \quad \Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 4. *Имеют место такие операторные представления преобразования Безье:*

$$B_n(y, x, a) = (b(1-x, a) + 2(x-b(x, a))E + b(x, a)E^2)^n y_0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i (b(x, a))^j \Delta^{i+2j} y_0. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле,

$$\begin{aligned} &(b(1-x, a) + 2(x-b(x, a))E + b(x, a)E^2)^n y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^{(n-i-j)} 2^i (x-b(x, a))^i b(x, a)^j E^i E^{2j} y_0 \\ &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} b(1-x, a)^n (2a)^i \left(\frac{a}{x-b(x, a)} \right)^{i+2j} b(x, a)^{i+2j} y_{i+2j} \\ &= b(1-x, a)^n \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) a^k \left(\frac{b(x, a)}{x-b(x, a)} \right)^k = B_n(y, x, a). \end{aligned}$$

Соотношение (4) вытекает из соотношения (3), если учесть, что $E = \Delta + I$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $y_k^{(0)} = y_k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, и

$$y_k^{(m)} = y_k^{(m-1)} + 2x\Delta y_k^{(m-1)} + b(x, a)\Delta^2 y_k^{(m-1)},$$

$m = 1, 2, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, 2(n-m)$. Тогда

$$B_n(y, x, a) = B_{n-m}(y^{(m)}, x, a),$$

где

$$\{y^{(m)}\} = \{y_0^{(m)}, y_1^{(m)}, \dots, y_{2(n-m)}^{(m)}\}.$$

Действительно, из (4) вытекает

$$B_n(y, x, a) = (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-m} ((1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^m y_0),$$

а отсюда вытекает следствие.

ЛЕММА 5. Пусть $y = \{0^m, 1^m, 2^m, \dots, (2n)^m\}$, $m \in N$. Тогда

$$B_n(y, x, a) = \sum_{k=0}^m k! S(m, k) \sum_{i+2j=k} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \quad (5)$$

где $S(m, k)$ числа Стирлинга второго рода.

Действительно,

$$\begin{aligned} B_n(y, x, a) &= (1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^n 0^m = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j \Delta^{i+2j} 0^m \\ &= \sum_{k=0}^m \Delta^k 0^m \sum_{i+2j=k} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} (2x)^i b(x, a)^j, \end{aligned}$$

а отсюда следует (4), ибо $S(m, k) = \Delta^k 0^m / k!$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $y = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$. Тогда $B_n(y, x, a) = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $y = \{0, 1, 2, \dots, (2n)\}$. Тогда

$$B_n(y, x, a) = 2nx. \quad (6)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $y = \{0^2, 1^2, 2^2, \dots, (2n)^2\}$. Тогда

$$B_n(y, x, a) = 2nx + 4n(n-1)x^2 + 2nb(x, a). \quad (7)$$

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $y = \{0^3, 1^3, 2^3, \dots, (2n)^3\}$. Тогда

$$B_n(y, x, a) = 2nx + 12n(n-1)x^2 + 6nb(x, a) + 8n(n-1)(n-2)x^3 + 12n(n-1)xb(x, a).$$

3. Свойства обобщенного преобразования Безье.

ТЕОРЕМА 1. Если последовательность $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$ не убывает (не возрастает), то функция $B_n(y, x, a)$ не убывает (не возрастает).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\tilde{y}\} = \{\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_k, \dots, \tilde{y}_{2n-2}\}$, где

$$\tilde{y}_k = (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_k = b'(1-x, a)\Delta y_k + b'(x, a)\Delta y_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-2.$$

Воспользуемся (4) и (3). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) &= n(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1} (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)y_0 \\ &= nB_{n-1}(\tilde{y}, x, a) \geq 0 (\leq 0), \end{aligned}$$

ибо $b'(x, a) \geq 0$, а последовательность $\{y\}$ не убывает (не возрастает).

ТЕОРЕМА 2. Если последовательность $\{y\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{2n}\}$ выпукла, то функция $B_n(y, x, a)$ выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\hat{y}\} = \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k, \dots, \hat{y}_{2n-4}\}$, где

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= (2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_k \\ &= b'(x, a)^2 \Delta^2 y_{k+2} + 2b'(x, a)(2 - b'(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + (2 - b'(x, a))^2 \Delta^2 y_k, \end{aligned}$$

а $\{\bar{y}\} = \{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \dots, \bar{y}_{2n-2}\}$, где

$$\begin{aligned} \bar{y}_k &= b''(x, a)(1 + 2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)\Delta^2 y_k \\ &= b(1-x, a)\Delta^2 y_k + 2(x - b(x, a))\Delta^2 y_{k+1} + b(x, a)\Delta^2 y_k, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, 2n-4$.

Воспользуемся (4) и (3). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} B_n(y, x, a) &= n(n-1)(1+2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-2}(2\Delta + b'(x, a)\Delta^2)^2 y_0 \\ &\quad + nb''(x, a)(1+2x\Delta + b(x, a)\Delta^2)^{n-1}\Delta^2 y_0 \\ &= n(n-1)B_{n-2}(\hat{y}, x, a) + nB_{n-1}(\bar{y}, x, a) \geq 0, \end{aligned}$$

ибо $b''(x, a) \geq 0$ (см. (1)), $(2 - b'(x, a)) \geq 0$, $(x - b(x, a)) \geq 0$, а последовательность $\{y\}$ выпукла.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$z = \{-2nx y_0, (1 - 2nx)y_1, (2 - 2nx)y_2, \dots, (2n - 2nx)y_n\}.$$

Тогда

$$(x(1 - 2x) + b(x, a)) \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = B_n(z, x, a). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) &= \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \\ &\quad \times \left(\frac{k}{2} (b'(x, a) b(1-x, a) + b(x, a) b'(1-x, a)) - nb(x, a) b'(1-x, a) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} y_k C(n, k, a) b(x, a)^{k/2-1} b(1-x, a)^{n-k/2-1} \frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a + w(x, a))} (k - 2nx), \end{aligned}$$

а отсюда вытекает соотношение (8), ибо

$$\frac{2x(1-x)}{w(x, a)(a + w(x, a))} = \frac{x(1-2x) + b(x, a)}{w^2(x, a)}.$$

4. Аппроксимационные свойства. Возьмем в качестве членов последовательности $\{y\}$ значения функции $f(x)$, которая определена и непрерывна на промежутке $[0, 1]$:

$$\left\{ f(0), f\left(\frac{1}{2n}\right), \dots, f\left(\frac{k}{2n}\right), \dots, f(1) \right\}.$$

Тогда последовательность функций $B_n(y, x, a)$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[0, 1]$. Этот результат является следствием того, что положительные линейные операторы $B_n(y, x, a)$, в силу теоремы 3, удовлетворяют соотношению

$$B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a) = \frac{v(x, a)}{2n} \frac{d}{dx} B_n(f(\cdot), x, a),$$

где $v(x, a) = x(1 - 2x) + b(x, a)$, а поэтому, операторы $B_n(y, x, a)$ принадлежат классу **B** (см. [2]), и, следовательно, результаты упомянутой работы применимы и для операторов $B_n(y, x, a)$.

Заметим, что если $a = 0$, то $B_n(y, x, 0) = B_n(f, x)$ — обычные многочлены Бернштейна функции $f(2t)$, а если $a = 1$, то $B_n(y, x, 1)$ это многочлены Бернштейна $B_{2n}(f, x)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[0, 1]$ и ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ выпукл (вверх). Тогда

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega\left(\sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} |B_n(f, x, a) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{2n} \left| f\left(\frac{k}{2n}\right) - f(x) \right| C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \\ &\leq \sum_{k=0}^{2n} \omega\left(\left|\frac{k}{2n} - x\right|\right) C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \\ &\leq \omega\left(\sum_{k=0}^{2n} \left|\frac{k}{2n} - x\right| C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2}\right) \\ &\leq \omega\left(\left(\sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{k}{2n} - x\right)^2 C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2}\right)^{1/2}\right) \\ &= \omega\left(\sqrt{\frac{v(x, a)}{2n}}\right). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 6. Для всякого x из промежутка $[0, 1]$

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \begin{cases} \omega\left(\frac{1}{2\sqrt{(a+1)n}}\right), & \text{если } 0 \leq a \leq 2, \\ \omega\left(\frac{a}{4\sqrt{(a^2-1)n}}\right), & \text{если } a \geq 2. \end{cases}$$

Действительно,

$$\frac{d}{dx} v(x, a) = (1-2x) \left(2 - \frac{a}{\sqrt{1+(a^2-1)(2x-1)^2}} \right),$$

а отсюда вытекает: если $0 \leq a \leq 2$, то наибольшее значение функции $v(x, a)$ достигается в точке $x = 0, 5$; если $a > 2$, то наибольшее значение функции $v(x, a)$ достигается в точках $0, 5 \pm 0, 25\sqrt{(a^2-4)/(a^2-1)}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда

$$|B_n(f, x, a) - f(x)| \leq \omega\left(\sqrt{\frac{2x(1-x)}{n} \left(\frac{|2x-1|}{1+|2x-1|} + \frac{1}{a+1}\right)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $v(x, a) = v(1-x, a)$, то достаточно оценить функцию $v(x, a)$ на промежутке $[1/2, 1]$.

Перепишем эту функцию так:

$$v(x, a) = 2x(1-x) \left(\frac{2x-1}{2x} + r(x) \right), \quad \text{где } r(x) = \frac{1}{(2x)} - \frac{a}{(a+w(x, a))}.$$

На промежутке $[1/2, 1]$ функция $r(x)$ убывает, ибо $r'(x) \leq 0$. В самом деле,

$$r'(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{2a(2x-1)(a^2-1)}{(a+w(x,a))^2 w(x,a)},$$

и, если $a \leq 1$, то это очевидно; если же $a > 1$, то вытекает из неравенства $w(x,a) \geq a(2x-1)$. Следовательно, функция $r(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = 1/2$, а поскольку $r(1/2) = 1/(a+1)$, то окончательно получим

$$v(x,a) \leq 2x(1-x) \left(\frac{2x-1}{2x} + \frac{1}{a+1} \right).$$

Обратим внимание на то, что погрешность приближения уменьшается не только возле концов промежутка $[0, 1]$ (как и в случае многочленов Бернштейна), но и в окрестности середины этого промежутка при увеличении параметра a .

Для точной оценки порядка приближения функций операторами $B_n(f, x, a)$ в случае произвольного модуля непрерывности воспользуемся результатами Сиккемы из работы [3; с. 74, 75]. После соответствующих вычислений получим

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\omega(\delta)$ модуль непрерывности функции $f(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} & |B_n(f, x, a) - f(x)| \\ & \leq \left(1 + \sum_{k=0}^{2n} \left[\sqrt{2n} \left| \frac{k}{2n} - x \right| \right] C(n, k, a) b(x, a)^{k/2} b(1-x, a)^{n-k/2} \right) \omega \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ & \leq K(a) \omega \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K(a) &= 1 + \begin{cases} K1(a), & \text{если } a_1 \leq a \leq a_2, \\ K2(a), & \text{если } 0 \leq a \leq a_1 \text{ или } a \geq a_2, \end{cases} \\ K1(a) &= b \left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a \right)^3 + 6a \sqrt{b \left(\frac{5-\sqrt{6}}{6}, a \right)^5 b \left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a \right)} + b \left(\frac{1+\sqrt{6}}{6}, a \right)^3, \\ K2(a) &= b \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a \right)^3 + 6a \sqrt{b \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, a \right)^5 b \left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a \right)} + b \left(\frac{6-\sqrt{6}}{6}, a \right)^3, \end{aligned}$$

$a_1 = 0.319483292\dots$, $a_2 = 2.147963138\dots$ – корни уравнения $K1(a) = K2(a)$. В частности, если $a = 1$, то получим константу Сиккемы [3; с. 63]

$$\kappa = 1 + K1(1) = \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} = 1.089887331\dots$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $[0, 1]$, то имеет место такой результат.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\omega_1(\delta)$ модуль непрерывности функции $f'(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} & |B_n(f, x, a) - f(x)| \leq c_n(x, a) \omega_1 \left(\frac{1}{2n} \right), \\ c_n(x, a) &= \frac{1}{2} x(1-2x) + \frac{1}{2} b(x, a) + \frac{1}{2n} (2nx - [2nx])(1 - 2nx + [2nx]). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a) &= \frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2} + t, a\right) + \frac{1}{2} t - (2n + 1)t^2 \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{4(a + 1)} + \frac{1}{8n}, & \text{если } 0 \leq a \leq 2 \\ \frac{a^2}{16(a^2 - 1)} + \frac{1}{8n}, & \text{если } a > 2 \end{cases} \leq \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

где t единственный действительный корень уравнения

$$1 + \frac{at}{\sqrt{1 + 4(a^2 - 1)t^2}} = 2(1 + 2n)t.$$

ТАБЛИЦА 2. Таблица значений $\max_{0 \leq x \leq 1} c_n(x, a)$

$\begin{matrix} \text{№} \\ \backslash \\ a \end{matrix}$	1	2	3	4	5
1	0.225000	0.201106	0.194045	0.191281	0.189949
2	0.180556	0.145188	0.130633	0.123699	0.120005
3	0.163462	0.124863	0.107267	0.097953	0.092575
4	0.154412	0.114539	0.095617	0.085076	0.078666
5	0.148810	0.108315	0.088729	0.077524	0.070505
6	0.145000	0.104158	0.084198	0.072609	0.065208

Выпишем еще один результат как частный случай более общего, полученного в [2; с. 668, соотношение (31)].

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция f имеет непрерывные производные до $(m + 2)$ -го порядка включительно. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{d^m}{dx^m} B_n(f, x, a) - f^m(x) \right) = \frac{1}{2} \frac{d^m}{dx^m} (f''(x)v(x, a)).$$

5. Обобщенные кривые Безье.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть

$$\{A\} = \{A_0(x_0, y_0, z_0), A_1(x_1, y_1, z_1), \dots, A_{2n}(x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})\}$$

множество контрольных точек в пространстве, $\{x\}$ – множество абсцисс, $\{y\}$ – множество ординат, $\{z\}$ – множество аппликат контрольных точек.

Обобщенной кривой Безье, порождаемой последовательностью $\{A\}$, называется кривая с параметрическими уравнениями

$$(x(t), y(t), z(t)) = (B_n(x, t, a), B_n(y, t, a), B_n(z, t, a)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $A_0(t = 0)$ начальная точка кривой Безье, а $A_{2n}(t = 1)$ – конечная точка. Тогда отрезки $A_0A_1, A_{2n-1}A_{2n}$ касаются кривой, соответственно, в точках A_0, A_{2n} .

Действительно, вектор

$$\left(\left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=0}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=0} \right) \\ = (2n(x_1 - x_0), 2n(y_1 - y_0), 2n(z_1 - z_0))$$

коллинеарен вектору $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, а вектор

$$\left(\left. \frac{d}{dt} B_n(x, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(y, t, a) \right|_{t=1}, \left. \frac{d}{dt} B_n(z, t, a) \right|_{t=1} \right) \\ = (2n(x_{2n} - x_{2n-1}), 2n(y_{2n} - y_{2n-1}), 2n(z_{2n} - z_{2n-1}))$$

коллинеарен вектору $(x_{2n} - x_{2n-1}, y_{2n} - y_{2n-1}, z_{2n} - z_{2n-1})$.

6. Многомерное обобщенное преобразование Безье. Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$ точка в m -мерном пространстве, $|x| = x_1 + \dots + x_m$, $k = (k_1, \dots, k_m)$ — m -мерный индекс,

$$|k| = k_1 + \dots + k_m, \quad k! = k_1! \dots k_m!, \quad x^k = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m},$$

T_m — единичный m -мерный симплекс.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $a \geq 0$, n — натуральное число, $\{y\} = y = \{y_k\}$, $0 \leq |k| \leq 2n$, произвольная m -кратная числовая последовательность, $x \in T_m$. Функция

$$B_n(y, x, a) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} \left(\frac{x}{|x|} \right)^k (b(|x|, a))^{|k|/2} (b(1 - |x|, a))^{n-|k|/2}$$

называется *обобщенным m -мерным преобразованием Безье* последовательности $\{y\}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $V(x, a) = \{v_{ij}\}$ матрица с элементами

$$v_{ij} = \delta_{ij} x_i - x_i x_j \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$V(x, a) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B_n(y, x, a)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial B_n(y, x, a)}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_n((k_1 - 2nx_1)y, x, a) \\ \vdots \\ B_n((k_m - 2nx_m)y, x, a) \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначение

$$p_k(x) =: C(n, |k|, a) \frac{|k|!}{k!} \left(\frac{x}{|x|} \right)^k (b(|x|, a))^{|k|/2} (b(1 - |x|, a))^{n-|k|/2}.$$

Тогда

$$B_n(y, x, a) = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x),$$

и

$$\frac{\partial B_n(y, x, a)}{\partial x_j} = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \frac{\partial p_k(x)}{\partial x_j} = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x),$$

$j = 1, 2, \dots, m$.

Найдем теперь произведение i -й строки матрицы V на столбец $dB_n(y, x, a)/dx$, $i = 1, 2, \dots, m$. Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k \left(\frac{k_i}{x_i} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) p_k(x) \\ & - \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) \sum_{j=1}^m x_i x_j \left(\frac{k_j}{x_j} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \right) \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|^2} \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} x_i y_k p_k(x) \left(\frac{k_i}{x_i} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{v(|x|, a)} \left(1 - \frac{|x| - v(|x|, a)}{|x|} \right) \right) \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) x_i \left(\frac{k_i}{x_i} - \frac{|k|}{|x|} + \frac{|k| - 2n|x|}{|x|} \right) \\ & = \sum_{0 \leq |k| \leq 2n} y_k p_k(x) (k_i - 2nx_i) = B_n((k_i - 2nx_i)y, x, a), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть на симплексе T_m задана непрерывная функция $y = f(x)$. Тогда, как и в одномерном случае, операторы $B_n(y, x, a)$,

$$\{y\} = \left\{ f\left(\frac{k_1}{2n}\right), f\left(\frac{k_2}{2n}\right), \dots, f\left(\frac{k_m}{2n}\right) \right\}, \quad 0 \leq k_1 + k_2 + \dots + k_m \leq 2n,$$

могут служить для приближения f на T_m . Если $a = 1$, то $B_n(y, x, 1) = B_{2n}(y, x)$ симплициальные многочлены Бернштейна. Поскольку операторы $B_n(y, x, a)$ удовлетворяют соотношению

$$V(x, a) \cdot \frac{d}{dx} B_n(y, x, a) = 2n B_n((\cdot - x)f(\cdot), x, a),$$

они являются операторами типа **В**. Их свойства изучены в [4].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Шенен, М. Коснар, И. Гардан, Ф. Робер, И. Робер, П. Витомски, П. Кастельжо, *Математика и САПР*, Кн. 1, Мир, М., 1988.
- [2] Ю. И. Волков, “О некоторых линейных положительных операторах”, *Матем. заметки*, **23**:5 (1978), 659–669.
- [3] P. C. Sikkema, P. J. C. van der Meer, “The exact degree of local approximation by linear positive operators involving the modulus of continuity of the p -th derivative”, *Indag. Math.*, **82**:1 (1979), 63–76.
- [4] Ю. И. Волков, “Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега–Стилтьеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:3 (1983), 435–454.

Ю. И. Волков

Кировоградский государственный педагогический
университет им. В. Винниченко, Украина
E-mail: yulysenko@i.ua

Поступило

14.05.2007

Исправленный вариант

27.01.2014