Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Волосивец, Об одном обобщении мультипликативного преобразования Фурье и его свойствах, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 3, 323–330

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:13:46

УДК 517.51

Об одном обобщении мультипликативного преобразования Фурье и его свойствах

С. С. Волосивец

В работе рассматривается новый класс функций на полуоси, для которого можно определить мультипликативное преобразование Фурье. Доказываются равенства типа Парсеваля, формула обращения и условие представимости в виде такого преобразования Фурье.

Библиография: 4 названия.

1. Введение. Пусть $\mathbf{P} = \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ и $2 \leq p_n \leq N$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим по определению $m_n = p_1 \cdots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$, $m_0 = 1$ и $m_{-n} = 1/m_n$, $p_{-n} = p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Известно, что $x \in \mathbb{R}_+$ можно представить в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad x_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x_n < p_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Здесь первая сумма в (1) конечна и при $x = l/m_k$, $l, k \in \mathbb{Z}_+$, берется разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Если $x, y \in \mathbb{R}_+$ записаны в виде (1), то

$$x \ominus y = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} m_{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{m_n}, \quad z_n \in \mathbb{Z} \cap [0, p_n), \quad z_n = x_n - y_n \pmod{p_n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично определяется $x \oplus y$. Для $x, y \in \mathbb{R}_+$, представленных в виде (1), положим по определению

$$\chi(x, y) = \exp\left(2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{-n} y_n + x_n y_{-n}}{p_n}\right).$$

Известно, что $\chi(x, y) = \chi(y, x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ и

$$\chi(x \oplus y, z) = \chi(x, z) \chi(y, z), \quad \chi(x \ominus y, z) = \chi(x, z) \overline{\chi(y, z)},$$

где последние равенства выполняются при фиксированных x и z для почти всех $y \in \mathbb{R}_+$ (см. [1; § 1.5]). Если $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, то справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x \oplus a) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(a \ominus x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx$$

(при $p_i \equiv 2$ см. [1; § 2.1]). Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ зададим **Р**-ичное преобразование Фурье формулой

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \overline{\chi(x, y)} dy.$$

Для $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, определим **Р**-ичное преобразование Фурье как L^q -предел интеграла $\int_0^u f(y) \overline{\chi(x, y)} dy$ при $u \rightarrow \infty$. По поводу корректности этого определения см. [1; § 6.1]. При этом $\|\widehat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}_+)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+)}$. Задачей настоящей работы является распространение данного определения на более широкие классы функций с сохранением таких свойств, как формулы обращения, выражающие первоначальную функцию через ее преобразование Фурье, и равенства типа Парсеваля. Для тригонометрического преобразования Фурье близкие вопросы рассматривал Оффорд [2].

Мы будем использовать обобщенное ядро Дирихле $D_y(x) = D(x, y) = \int_0^y \chi(x, t) dt$ и формулу

$$D_{m_n}(x) = D(x, m_n) = m_n X_{[0, 1/m_n)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где X_E – индикатор множества E (см. [1; § 1.5, формулы (1.5.21) и (1.5.38)] для $n \in \mathbb{N}$ и [1; § 11.1, теорема 11.1.3] для $n \leq 0$). Далее вместо $[0, m_n)$ будем писать B_n . Справедливы равенства

$$\widehat{D}_{m_n}(x) = X_{B_n}(x), \quad \widehat{X}_{B_n}(x) = D_{m_n}(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, снабжены нормой $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}_+} |f(x)|^p dx)^{1/p}$ при $1 \leq p < \infty$ и $\|f\|_\infty = \text{esssup}_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)|$ при $p = \infty$. Если $f(x)$ принадлежит $L^p(B_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$. Для $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ рассмотрим

$$F_n(f)(x) = \int_{B_n} f(t) \overline{\chi(x, t)} dt.$$

Пусть $1 < p < \infty$. Если существует $F(x) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\|_p = 0$, то $F(x)$ называется *обобщенным Р-ичным L^p -преобразованием Фурье* функции f . Если же $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\|F_n(f)\|_p$ ограничены, то будем писать в таком случае $f \in G^p$. Определим также **Р**-ичную свертку. Для $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$, $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, интеграл $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x \ominus y) g(y) dy$ существует для п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ и $f * g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, причем $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. Доказательство этого неравенства проводится с помощью теоремы Фубини при $p = 1$, очевидно при $p = \infty$ и получается по теореме Рисса–Торина при остальных p . Далее для $p \in (1, \infty)$ везде $q = p/(p-1)$ и выражение $n \rightarrow \infty$ означает $n \rightarrow +\infty$.

2. Вспомогательные утверждения. Приведем необходимые в дальнейшем леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, и $S_{m_n}(f)(x) = f * D_{m_n}(x)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_{m_n}(f)\|_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко видеть из (2),

$$S_{m_n}(f)(x) = m_n \int_0^{1/m_n} f(x \oplus u) du. \quad (4)$$

В [1; § 10.5] доказано, что

$$\left\| f(x) - m_n \int_0^{1/m_n} f(x \oplus u) du \right\|_p \leq \sup_{0 < h < 1/m_n} \|f(x \oplus h) - f(x)\|_p,$$

откуда следует утверждение леммы.

Из классической теоремы о слабой компактности шара в сопряженном пространстве вытекает

ЛЕММА 2. Пусть $f \in G^p$, $1 < p < \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\{F_{n_i}\}_{i=1}^\infty$, слабо сходящаяся к некоторой функции $F(f)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in G^p$, $1 < p < \infty$, $h \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда для $F(f)$ и $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ из леммы 2 справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(f)(t)h(t) dt = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{B_{n_j}} f(u)\widehat{h}(u) du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in L^1(B_{n_j})$, $j \in \mathbb{N}$, $h \in L^1(\mathbb{R}_+)$, по теореме Фубини–Тонелли имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{n_j}} f(u)\widehat{h}(u) du &= \int_{B_{n_j}} f(u) \int_{\mathbb{R}_+} h(t)\overline{\chi(u,t)} dt du \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} h(t) \int_{B_{n_j}} f(u)\overline{\chi(u,t)} du dt = \int_{\mathbb{R}_+} h(t)F_{n_j}(f)(t) dt. \end{aligned}$$

Поскольку $h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+) \subset L^q(\mathbb{R}_+)$, по лемме 2 получаем равенство леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $f, h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}_+} \widehat{f}(u)h(u) du = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\widehat{h}(t) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $k, n \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned} \int_{B_k} F_n(f)(u)h(u) du &= \int_{B_k} h(u) \int_{B_n} f(t)\overline{\chi(u,t)} dt du \\ &= \int_{B_n} f(t) \int_{B_k} h(u)\overline{\chi(u,t)} du dt = \int_{B_n} F_k(h)(t)f(t) dt. \end{aligned}$$

Так как (см. введение) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(f) - \widehat{f}\|_q = \lim_{k \rightarrow \infty} \|F_k(h) - \widehat{h}\|_q = 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_k} F_n(f)(u)h(u) du &= \int_{B_k} \widehat{f}(u)h(u) du, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_n} F_k(h)(t)f(t) dt &= \int_{B_n} \widehat{h}(t)f(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда легко выводится равенство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Лемма 4 верна и при $p = 1$. Как указал автору Б. И. Голубов, лемма 4 доказана Беспаловым в [3], но для удобства читателя здесь она приводится с доказательством.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in G^p$, $1 < p < \infty$. Тогда существует $F = F(f) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ такая, что

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(f)(x) = F(f)(x)$ п.в. на $\mathbb{R}_+$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(f) - F(f)\|_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_n(t) = D_{m_n}(t \ominus x) = D_{m_n}(x \ominus t)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Тогда в силу инвариантности интеграла относительно **P**-ичного сдвига (при $p_n \equiv 2$ см. [1; § 2.1]) и (3)

$$\begin{aligned} \hat{h}_n(y) &= \int_{\mathbb{R}_+} D_{m_n}(t \ominus x) \overline{\chi(y, t)} dt = \int_{\mathbb{R}_+} D_{m_n}(t \ominus x) \overline{\chi(y, t \ominus x) \chi(y, x)} dt \\ &= \overline{\chi(y, x)} \int_{\mathbb{R}_+} D_{m_n}(t) \overline{\chi(y, t)} dt = X_{B_n}(y) \overline{\chi(x, y)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ясно, что $h_n(t)$ удовлетворяет условиям леммы 3, поэтому для $F(f)$ из леммы 2

$$\int_{\mathbb{R}_+} D_{m_n}(x \ominus t) F(f)(t) dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{B_{n_j}} f(u) X_{B_n}(u) \overline{\chi(x, u)} du = \int_{B_n} f(u) \overline{\chi(x, u)} du,$$

т.е. $F_n(f)(x) = F * D_{m_n}(x)$. Согласно лемме 1 выполнено $\|F - F_n(f)\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а в силу формулы (4) легко видеть, что $F_n(f)(x) \rightarrow F(x)$ п.в. на $\mathbb{R}_+$ (см. аналогичное рассуждение в [1; § 2.8, теоремы 2.8.3 и 2.8.4]). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, $u \hat{f}(x) - ee$ **P**-ичное преобразование Фурье. Тогда $\hat{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(u) \overline{\chi(x, u)} du$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как указано во введении, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n(f) - \hat{f}\|_q = 0$, где $1/p + 1/q = 1$, откуда следует $f \in G^q$. Осталось применить теорему 1.

ТЕОРЕМА 2. 1) Пусть $f \in G^p$, $2 \leq p < \infty$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, так что $\hat{h} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$. Если $F(f)$ – функция из теоремы 1, то

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) h(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} f(u) \hat{h}(u) du.$$

2) Пусть $f \in G^p$, $1 < p \leq 2$, $h \in L^p(\mathbb{R}_+) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) \hat{h}(0 \ominus x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(u) h(u) du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in G^p$, $\infty > p \geq 2$, $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$. По теореме 1

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) h(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} F_n(f)(x) h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{B_n} h(x) f(u) \overline{\chi(x, u)} du dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_n} \int_{B_r} h(x) f(u) \overline{\chi(x, u)} dx du. \end{aligned}$$

Так как $h \in L^q(\mathbb{R}_+)$, существует $\hat{h} \in L^p(\mathbb{R}_+)$, причем по следствию 1 имеем $\hat{h}(u) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} h(x) \overline{\chi(x, u)} dx$ п.в. на $\mathbb{R}_+$. Согласно лемме 4 и равенству (5)

$$\int_{B_r} h(x) \overline{\chi(x, u)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} h(x) X_{B_r} \overline{\chi(x, u)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} \hat{h}(t) D_{m_r}(u \ominus t) dt = \hat{h} * D_{m_r}(u).$$

Пусть n фиксировано. Если $t \in B_n$ и $r \in \mathbb{N}$, то из формулы (4) следует, что

$$|\hat{h} * D_{m_r}(t)| \leq \operatorname{esssup}_{t \in [0, m_n+1]} |\hat{h}(t)| \leq \operatorname{esssup}_{t \in B_{n+1}} |\hat{h}(t)|$$

при $n \in \mathbb{N}$ и $|\hat{h} * D_{m_r}(t)| \leq \operatorname{esssup}_{t \in B_0} |\hat{h}(t)|$ при $n \leq 0$. В силу условия $\hat{h} \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$ делаем вывод, что $\int_{B_r} h(x) \overline{\chi(x, u)} dx$ равномерно ограничены на каждом B_n . Поскольку $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_n} \int_{B_r} f(u) h(x) \overline{\chi(x, u)} dx du &= \int_{B_n} f(u) \hat{h}(u) du, \\ \int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) h(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(u) \hat{h}(u) du. \end{aligned}$$

2) Пусть $f \in G^p$, $h \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$. Тогда $\hat{h}(x), \hat{h}(0 \ominus x) \in L^q(\mathbb{R}_+)$, откуда следует существование интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) \hat{h}(0 \ominus x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} F_n(f)(x) \hat{h}(0 \ominus x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} \int_{B_n} f(t) \overline{\chi(x, t)} dt \hat{h}(0 \ominus x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку $F_i(h)(0 \ominus \cdot)$ сходится в $L^q(\mathbb{R}_+)$ к $\hat{h}(0 \ominus \cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \hat{h}(0 \ominus x) \overline{\chi(x, t)} dx &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_r} \int_{B_i} h(u) \overline{\chi(0 \ominus x, u) \chi(x, t)} du dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} \int_{B_r} \chi(x, u \ominus t) dx h(u) du \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} D_{m_r}(u \ominus t) h(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} D_{m_r}(t \ominus u) h(u) du = h * D_{m_r}(t). \end{aligned}$$

Используя теорему Фубини и равенство (6), получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+} F(f)(x) \hat{h}(0 \ominus x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(t) (h * D_{m_r})(t) dt. \quad (7)$$

Аналогично части 1) доказываем ограниченность $h * D_{m_r}$ на каждом фиксированном B_n . Поскольку $f \in L^1(B_n)$, получаем, что к $f(t)(h * D_{m_r})(t)$ применима теорема Лебега о мажорируемой сходимости и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(t) (h * D_{m_r})(t) dt = \int_{B_n} f(t) h(t) dt.$$

Подставляя последнее равенство в (7), завершаем доказательство теоремы.

Следующая теорема дает формулу восстановления функции по ее обобщенному $\mathbf{P}$ -ичному L^p -преобразованию Фурье.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in G^p$, $1 < p < \infty$, $F(f)$ определена в теореме 1. Тогда $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} F(f)(u) \chi(x, u) du$ н.в. на $\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_n(u) = X_{B_n}(u) \chi(x, u)$ при $2 \leq p < \infty$ и $h_n(u) = D_{m_n}(x \ominus u)$ при $1 < p \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$. В первом случае

$$\hat{h}_n(y) = \int_{\mathbb{R}_+} X_{B_n}(u) \chi(x, u) \overline{\chi(y, u)} du = \int_{B_n} \chi(x \ominus y, u) du = D_{m_n}(x \ominus y).$$

Во втором случае согласно (5) $\hat{h}_n(y) = X_{B_n}(y) \overline{\chi(x, y)}$. Так как все эти функции финитны и ограничены, h_n в обоих случаях удовлетворяет условиям теоремы 2. При $p \geq 2$ получаем

$$\int_{B_n} F(f)(u) \chi(x, u) du = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} f(t) D_{m_n}(x \ominus t) dt. \quad (8)$$

При фиксированном n и достаточно больших i ясно, что все $\int_{B_i} f(t) D_{m_n}(x \ominus t) dt$ одинаковы и равны правой части (4). Отсюда следует, что обе части (8) при $n \rightarrow \infty$ и п.в. $x \in \mathbb{R}_+$ стремятся к $f(x)$. При $1 < p < 2$ аналогично находим, что $(X_{B_n}(0 \ominus x) = X_{B_n}(x))$

$$\int_{B_n} F(f)(u) \overline{\chi(0 \ominus x, u)} du = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} f(t) D_{m_n}(x \ominus t) dt$$

и доказательство завершается, как и выше.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$. Тогда

- 1) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} \hat{f}(t) \chi(x, t) dt$ н.в. на $\mathbb{R}_+$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\cdot) - F_n(\hat{f})(0 \ominus \cdot)\|_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось, из $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, следует $f \in G^q$, поэтому первая часть следствия вытекает из теоремы 3. Далее согласно (8) имеем

$$\int_{B_n} \hat{f}(t) \chi(x, t) dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} f(t) D_{m_n}(x \ominus t) dt = f * D_{m_n}(x).$$

Утверждение 2) следствия теперь вытекает из леммы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. По аналогии с результатом Э. Хилле и Я. Тамаркина (см. [4; глава 5, теорема 108]) возникает гипотеза, что в условиях следствия 2 справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \int_0^t \hat{f}(u) \chi(x, u) du \right\|_p = 0.$$

Рассмотрим теперь вспомогательный класс функций GL^p , состоящий из $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$, для которых существует $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} F(u) D_x(u) du = \int_0^x f(t) dt \quad (9)$$

на $\mathbb{R}_+$. Согласно теореме 6.3.2 из [1; глава 6] $\mathbf{P}$ -ичные преобразования Фурье функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p \leq 2$, принадлежат классу GL^q .

ТЕОРЕМА 4. Если $F \in GL^p$, $1 < p < \infty$, и f соответствует F по формуле (9), то $f \in G^p$ и F есть обобщенное **P**-ичное преобразование Фурье функции f в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in [m_{r-1}, m_r)$, $r \in \mathbb{Z}$, и $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$. Тогда согласно [1; § 1.5, теорема 1.5.4] функция $\chi(x, t)$ постоянна по t на любом промежутке $I_k^r := [k/m_r, (k+1)/m_r)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, откуда следует

$$F_n(f)(x) = \int_{B_n} f(t) \overline{\chi(x, t)} dt = \sum_{k=0}^{m_n m_r - 1} \overline{\chi(x, k/m_r)} \left(\Phi\left(\frac{k+1}{m_r}\right) - \Phi\left(\frac{k}{m_r}\right) \right).$$

В силу (9)

$$\Phi\left(\frac{k+1}{m_r}\right) - \Phi\left(\frac{k}{m_r}\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_i} F(y) \int_{I_k^r} \chi(u, y) du dy,$$

причем для $y \in B_r$ снова $\chi(u, y)$ постоянна по u на I_k^r , $k \in \mathbb{Z}_+$, а при $y \geq m_r$ в силу теоремы 1.5.3 и равенства (1.5.18) из [1; § 1.5] находим, что $\int_{I_k^r} \chi(u, y) du = 0$.

Поэтому

$$F_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{m_n m_r - 1} \int_{B_r} F(y) m_r^{-1} \chi\left(\frac{k}{m_r}, y \ominus x\right) dy.$$

Но, поскольку $x \in B_r$, если $y \in B_r$, то также $y \ominus x \in B_r$ и, значит, $\chi(t, y \ominus x)$ постоянна на всех I_k^r , $k \in \mathbb{Z}_+$, откуда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m_n m_r - 1} m_r^{-1} \chi\left(\frac{k}{m_r}, y \ominus x\right) &= \sum_{k=0}^{m_n m_r - 1} \int_{I_k^r} \chi(t, y \ominus x) dt \\ &= \int_0^{m_n} \chi(t, y \ominus x) dt = D_{m_n}(y \ominus x). \end{aligned}$$

В результате получаем формулу

$$F_n(f)(x) = \int_{B_r} F(y) D_{m_n}(x \ominus y) dy, \quad x \in B_r \setminus B_{r-1}, \quad (10)$$

из которой легко следует, что $|F_n(f)(x)| \leq |F| * D_{m_n}(x)$. По условию $|F| \in L^p(\mathbb{R}_+)$, откуда

$$\|F_n(f)\|_p \leq \|F\|_p \|D_{m_n}\|_1 = \|F\|_p.$$

Если $n \geq -r$, то $[0, 1/m_n) \subset B_r$ и при $y \notin B_r$, $x \in B_r \setminus B_{r-1}$, имеем $x \ominus y \notin B_r$ и, тем более, $D_{m_n}(x \ominus y) = 0$. Поэтому из (10) получаем $F_n(f)(x) = F * D_{m_n}(x)$ при $n \geq -r$, откуда следует, что $F_n(f)(x)$ сходится к $F(x)$ п.в. и F является обобщенным **P**-ичным преобразованием Фурье в $L^p(\mathbb{R}_+)$ для f . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f \in G^p \cap L^r(\mathbb{R}_+)$, $1 < p, r < \infty$. Тогда обобщенное **P**-ичное преобразование Фурье $F(f)$ функции f в $L^p(\mathbb{R}_+)$ принадлежит $G^r \cap L^p(\mathbb{R}_+)$, а $f(0 \ominus t)$ является обобщенным **P**-ичным преобразованием Фурье в $L^r(\mathbb{R}_+)$ для F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h(u) = X_{[0, x)}(u)$ при $p \geq 2$. Тогда $\hat{h}(t) = D_x(0 \ominus t) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$ и по теореме 2.1) имеем

$$\int_0^x F(f)(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(t) D_x(0 \ominus t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(0 \ominus t) D_x(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}_+. \quad (11)$$

Из (11) следует, что $f(0 \ominus t) \in GL^r$, а по теореме 4 $F(u) \in G^r$ и $f(0 \ominus t)$ есть обобщенное $\mathbf{P}$ -ичное преобразование Фурье функции F в $L^r(\mathbb{R}_+)$. По определению также $F \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Пусть теперь $1 < p < 2$ и $h(t) = D_x(t) = \widehat{X}_{[0,x]}(0 \ominus t)$. Согласно теореме 6.3.1 из [1; глава 6] имеем $h(t) \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и, как и выше, $D_x(t) \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+)$. По следствию 2 находим, что

$$X_{[0,x]}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} D_x(0 \ominus t) \chi(u, t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} h(t) \overline{\chi(u, t)} dt = \widehat{h}(u)$$

п.в. на $\mathbb{R}_+$. Снова по теореме 2, учитывая, что для $f(0 \ominus \cdot)$ обобщенным преобразованием Фурье является $F(0 \ominus \cdot)$, получаем

$$\int_0^x F(f)(u) du = \int_{\mathbb{R}_+} F(f)(0 \ominus u) X_{[0,x]}(0 \ominus u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f(0 \ominus t) D_x(t) dt,$$

откуда выводим (11) и завершаем доказательство теоремы так же, как и при $p \geq 2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $f \in G^p \cap L^p(\mathbb{R}_+)$, то $F(f) \in G^p \cap L^p(\mathbb{R}_+)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [2] A. C. Offord, "On Fourier transforms. III", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **38**:2 (1935), 250–266.
- [3] М. С. Беспалов, *Мультипликативные преобразования Фурье в L^p* , Деп. в ВИНТИ № 100-82, М., 1981.
- [4] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Гостехиздат, М., 1948.

С. С. Волосивец

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Поступило

12.05.2008