Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кыров, Критерий невырожденности группы преобразований, *Матем. заметки*, 2009, том 85, выпуск 1, 144–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4993>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:46:35

Критерий невырожденности группы преобразований

В. А. Кыров

1. Введение. Рассмотрим $n(n+1)/2$ -параметрическую локальную группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$:

$$x'_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}), \quad \dots, \quad x'_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}),$$

причем нулевым значениям параметров $a_1, \dots, a_{n(n+1)/2}$ соответствует тождественное преобразование. Базис ее алгебры Ли образуют [1] операторы

$$X_\mu = \lambda_\mu^1(x_1, \dots, x_n) \partial_{x_1} + \dots + \lambda_\mu^n(x_1, \dots, x_n) \partial_{x_n}, \quad (1)$$

где $\mu = 1, \dots, n(n+1)/2$. Двухточечным инвариантом группы преобразований является интеграл системы дифференциальных уравнений [1]:

$$X_\mu(i)f(ij) + X_\mu(j)f(ij) = 0, \quad \mu = 1, \dots, \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $n(n+1)/2$ -параметрическая локальная группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ называется *невырожденной*, если ее двухточечный инвариант имеет открытую и плотную область определения $N \subset \mathbb{R}^{2n}$ и удовлетворяет условию невырожденности

$$\frac{\partial(f(ii_1), \dots, f(ii_n))}{\partial(x_1(i), \dots, x_n(i))} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1i), \dots, f(i_ni))}{\partial(x_1(i), \dots, x_n(i))} \neq 0, \quad (3)$$

где $x_1(i), \dots, x_n(i)$ – координаты точки i , для открытого и плотного множества кортежей $n+1$ точек $\langle ii_1 \dots i_n \rangle$ и $\langle i_1 \dots i_n i \rangle$ из $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$, причем пары $\langle ii_1 \rangle, \dots, \langle ii_n \rangle, \langle i_1 i \rangle, \dots, \langle i_n i \rangle \in \mathbb{N}$ [2], [3].

В данной работе доказывается критерий, позволяющий по базисным операторам алгебры Ли установить невырожденность ей соответствующей локальной группы Ли локальных преобразований.

ТЕОРЕМА. Локальная $n(n+1)/2$ -параметрическая группа Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с базисными операторами (1) является невырожденной тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} M_{11}(ii_1) & M_{12}(ii_1) & \dots & M_{1n}(ii_1) \\ M_{11}(ii_2) & M_{12}(ii_2) & \dots & M_{1n}(ii_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{11}(ii_n) & M_{12}(ii_n) & \dots & M_{1n}(ii_n) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4)$$

для открытого и плотного множества кортежей $n+1$ точек $\langle ii_1 \dots i_n \rangle$ из $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$, пары $\langle ii_1 \rangle, \dots, \langle ii_n \rangle \in N$, $M_{11}, \dots, M_{1n}$ – миноры определителя

$$\begin{vmatrix} z^1 & \dots & z^n & z^{n+1} & \dots & z^{2n} \\ \lambda_1^1(i) & \dots & \lambda_1^n(i) & \lambda_1^1(j) & \dots & \lambda_1^n(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{2n-1}^1(i) & \dots & \lambda_{2n-1}^n(i) & \lambda_{2n-1}^1(j) & \dots & \lambda_{2n-1}^n(j) \end{vmatrix},$$

получаемые в пересечении 1-й строки и столбца под номером $k = 1, \dots, n$.

Поставленная задача возникает в теории физических структур при классификации феноменологически симметричных геометрий, т.е. геометрий с невырожденными двухточечными инвариантами (метрическими функциями). Теорема позволяет из набора алгебр Ли $n(n+1)/2$ -параметрических групп Ли преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ сразу выделить те, которые допускают невырожденный двухточечный инвариант (метрическая функция феноменологически симметричной, т.е. искомой геометрии).

2. Доказательство теоремы. Возьмем $n(n+1)/2$ -параметрическую локальную группу Ли локальных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ с базисными операторами (1). Уравнения инвариантности (2) записываются так:

$$\lambda_\mu^1(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)} + \dots + \lambda_\mu^n(i) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)} + \lambda_\mu^1(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)} + \dots + \lambda_\mu^n(j) \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)} = 0,$$

где $\mu = 1, \dots, n(n+1)/2$. Матрица этой системы имеет размерность $(n(n+1)/2) \times 2n$, причем ее ранг равен $2n-1$. Поэтому первые $2n-1$ уравнений можно считать функционально независимыми, в противном случае необходимое число уравнений выделяется перенумерацией [2], [3]. Выделенная система $2n-1$ уравнений в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ координат $x_1(i) \dots x_n(i) x_1(j) \dots x_n(j)$ рассматривается как $2n-1$ скалярных произведений

$$\begin{aligned} (\vec{M} \cdot \vec{F}_1) &= 0, \quad \dots, \quad (\vec{M} \cdot \vec{F}_{2n-1}) = 0, \\ \vec{M} &= \left(\frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)}, \dots, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)}, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)}, \dots, \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)} \right), \\ \vec{F}_\nu &= (\lambda_\nu^1(i), \dots, \lambda_\nu^n(i), \lambda_\nu^1(j), \dots, \lambda_\nu^n(j)), \end{aligned}$$

где $\nu = 1, \dots, 2n-1$. Заметим, что векторы $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{2n-1}$ линейно независимы в каждой точке некоторого открытого и плотного подмножества из $\mathbb{R}^{2n}$, поскольку иначе им соответствующие базисные операторы из (1) будут линейно зависимыми в этом множестве, что недопустимо.

Рассмотрим $2n-1$ векторов $\vec{a}_1 = (a_1^1, \dots, a_1^{2n}), \dots, \vec{a}_{2n-1} = (a_{2n-1}^1, \dots, a_{2n-1}^{2n})$ из $\mathbb{R}^{2n}$. Под *векторным произведением* $2n-1$ векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{2n-1}$ в $\mathbb{R}^{2n}$ понимается вектор $\vec{a} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{2n-1}]$ с координатами $\vec{a} = (a^1, \dots, a^{2n})$: $a^\tau = (-1)^{\tau+1} M_{1\tau}$, где $\tau = 1, \dots, 2n$, $M_{1\tau}$ – минор определителя

$$\begin{vmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^{2n} \\ a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n-1}^1 & a_{2n-1}^2 & \dots & a_{2n-1}^{2n} \end{vmatrix}.$$

ЛЕММА. Векторное произведение $\vec{a} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{2n-1}]$ линейно независимых векторов $\vec{a}_1 = (a_1^1, \dots, a_1^{2n}), \dots, \vec{a}_{2n-1} = (a_{2n-1}^1, \dots, a_{2n-1}^{2n})$ в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ нормально к гиперпространству, натянутому на эти векторы.

Вернемся снова к доказательству теоремы. Из леммы следует, что компоненты вектора $\vec{M}$ пропорциональны компонентам векторного произведения $[\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{2n-1}]$, значит,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(i)} &= (-1)^{1+1} \omega M_{11}(ij), \quad \dots, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(i)} = (-1)^{n+1} \omega M_{1n}(ij), \\ \frac{\partial f(ij)}{\partial x_1(j)} &= (-1)^{1+1} \omega M_{11}(ji), \quad \dots, \quad \frac{\partial f(ij)}{\partial x_n(j)} = (-1)^{n+1} \omega M_{1n}(ji), \end{aligned}$$

где $\omega = \omega(x_1(i), \dots, x_n(i), x_1(j), \dots, x_n(j))$ – ненулевая гладкая функция, причем M_{1m} – минор определителя $\det |\vec{a}, \vec{F}_1, \dots, \vec{F}_{2n-1}|$, $m = 1, \dots, n$. Подставляя выше найденные производные в (3), приходим к (4). Таким образом, если группа Ли преобразований невырождена, т.е. выполняются неравенства (3), то имеет место неравенство (4) и наоборот.

ПРИМЕР. Рассмотрим группу движений евклидовой плоскости

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + c, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + d.$$

Базис алгебры Ли образуют операторы $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$, $X_3 = -y\partial_x + x\partial_y$. Очевидно, $M_{11}(ij) = x_i - x_j$, $M_{12}(ij) = y_j - y_i$. Тогда определитель неравенства (4) равен $(x_k - x_i) \times (y_j - y_i) - (y_k - y_i)(x_j - x_i) \neq 0$. Таким образом, группа движений плоскости Евклида невырождена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978. [2] Г. Г. Михайличенко, *Докл. АН СССР*, **269**:2 (1983), 284–288. [3] Г. Г. Михайличенко, *Полиметрические геометрии*, Редакционно-издательский центр НГУ, Новосибирск, 2001.

В. А. Кыров

Горно-Алтайский государственный университет (ГАГУ)

E-mail: kfizika@gasu.ru

Поступило

22.05.2008