Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Султанов, Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 6, 896–899

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm4994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:34:44

Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля

А. Я. Султанов

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия, при которых голоморфное векторное поле является аффинным для голоморфной линейной связности, заданной на расслоении Вейля. Доказано, что алгебра Ли над полем действительных чисел голоморфных аффинных векторных полей для естественного продолжения линейной связности с базы на расслоение Вейля, изоморфна тензорному произведению алгебры Вейля и алгебры Ли аффинных векторных полей базы.

Библиография: 6 названий.

Введение. Расслоения $\mathbb{A}$ -близких точек были введены Вейлем в 1953 г. [1]. Впоследствии эти расслоения стали называться расслоениями Вейля. Примерами этих расслоений являются касательные расслоения, расслоения p^r -струй С. Эресмана. Изучению расслоений Вейля посвящены работы Широкова [2], Шурыгина [3] и его учеников, Коларжа [4], Моримото [5] и многих других авторов.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия, при которых голоморфное векторное поле является аффинным для голоморфной линейной связности, заданной на расслоении Вейля. Доказано, что алгебра Ли над полем действительных чисел голоморфных аффинных векторных полей для естественного продолжения линейной связности с базы на расслоение Вейля, изоморфна тензорному произведению алгебры Вейля и алгебры Ли аффинных векторных полей базы.

Приведем определение алгебры Вейля над полем действительных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [3]. Линейная алгебра $\mathbb{A}$ конечного ранга над полем $\mathbb{R}$ называется *алгеброй Вейля*, если выполнены следующие условия:

- (1) $\mathbb{A}$ коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;
- (2) существует идеал $\mathbb{I}$ такой, что $\mathbb{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbb{I}^{p+1} = \{0\}$;
- (3) факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна $\mathbb{R}$.

Число p называется *высотой* алгебры $\mathbb{A}$, а число m , равное размерности факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$, называется *шириной* алгебры $\mathbb{A}$. Идеал $\mathbb{I}$, обозначаемый также символом $\mathbb{I}_0$, является *радикалом* алгебры $\mathbb{A}$. Одномерная подалгебра $\mathbb{R}_{\mathbb{A}} = \{t\delta_{\mathbb{A}} \mid t \in \mathbb{R}\}$, порожденная единицей $\delta_{\mathbb{A}}$ алгебры $\mathbb{A}$, изоморфна $\mathbb{R}$. Алгебру $\mathbb{A}$ можно представить

в виде полупрямой суммы $\mathbb{R}_{\mathbb{A}}$ и $\overset{0}{\mathbb{A}} : \mathbb{A} = \mathbb{R}_{\mathbb{A}} + \overset{0}{\mathbb{A}}$. В дальнейшем будем считать, что единица $\delta_{\mathbb{A}}$ отождествлена с единицей 1 поля $\mathbb{R}$.

Введем понятие расслоения Вейля. Пусть $\mathbb{A}$ – произвольная алгебра Вейля над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, M – n -мерное вещественное связное гладкое многообразие класса C^∞ , U – открытое множество на M . Обозначим через $C^\infty(U)$ алгебру гладких класса C^∞ функций, заданных на U и принимающих значения в $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Точкой, $\mathbb{A}$ -близкой к точке $q \in U$, называется гомоморфизм $j_q : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию

$$j_q(f) \equiv f(q) \pmod{\overset{0}{\mathbb{A}}}.$$

Множество точек, $\mathbb{A}$ -близких к точке $q \in M$, обозначим через $M_q^{\mathbb{A}}$. Объединение $\bigcup_{q \in M} M_q^{\mathbb{A}}$ обозначим через $M^{\mathbb{A}}$. Отображение $\pi : M^{\mathbb{A}} \rightarrow M$, определенное условием $\pi(j_q) = q$, называется *канонической проекцией*, а тройка $(M^{\mathbb{A}}, \pi, M)$ – расслоением Вейля.

Для каждой функции f , определенной на множестве $W \subset M_n$, определим на $\pi^{-1}(W) \subset M_n^{\mathbb{A}}$ функцию $f_{(0)}$ условием $f_{(0)} = f \circ \pi$. Эта функция называется *вертикальным лифтом* функции f с M_n на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Функция $f^{\mathbb{A}} : \pi^{-1}(W) \rightarrow \mathbb{A}$, определенная условием

$$f^{\mathbb{A}}(j_q) = j_q(f)$$

для каждой точки $q \in W$, называется *естественным продолжением* f на $M_n^{\mathbb{A}}$.

На тотальном пространстве $M^{\mathbb{A}}$ возникают структуры гладких многообразий над алгеброй $\mathbb{A}$ и над алгеброй $\mathbb{R}$ [3].

Пусть X – векторное поле, заданное на базе M_n расслоения Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$. Единственное векторное поле $X^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющее условию $X^{\mathbb{A}} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}}$ для любой функции f , заданной на M_n , называется *естественным продолжением* X на расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$.

1. Голоморфные аффинные векторные поля на расслоениях Вейля.

Рассмотрим расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ над M_n , порожденное алгеброй Вейля $\mathbb{A}$. Предположим, что (ε^α) – базис алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha \varepsilon^\alpha$ – функция, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$, где $\mathcal{F}_\alpha$ – вещественные функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [3], [6]. 1) Функция $\mathcal{F}$ называется *голоморфной по Шефферсу*, если в каждой карте $(\tilde{U}, \tilde{x}^i)$ $\mathbb{A}$ -гладкого атласа многообразия $M_n^{\mathbb{A}}$ ее дифференциал $d\mathcal{F} = d\mathcal{F}_\alpha \varepsilon^\alpha$ можно представить в виде $d\mathcal{F} = \Phi_i d\tilde{x}^i$, где Φ_i – некоторые функции со значениями в алгебре $\mathbb{A}$. Функции Φ_i называются *частными производными* функции $\mathcal{F}$ и обозначаются $\partial\mathcal{F}/\partial\tilde{x}^i$.

2) Векторное поле $\tilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ называется *голоморфным*, если для любой голоморфной функции $\mathcal{F}$ функция $\tilde{X}\mathcal{F}$ голоморфна.

3) Линейная связность $\tilde{\nabla}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ называется *голоморфной*, если для любых голоморфных векторных полей $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ векторное поле $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ голоморфно.

Всякое голоморфное векторное поле $\tilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ определяется условием $\tilde{X} = \varepsilon^{\alpha} X_{\alpha}^{\mathbb{A}}$ для некоторых векторных полей X_{α} , заданных на базе M_n расслоения Вейля [6].

Пусть $\tilde{\nabla}$ – голоморфная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$. Условие голоморфности связности $\tilde{\nabla}$ равносильно условию

$$\tilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = \varepsilon^{\alpha} (\Gamma_{\alpha}(X, Y))^{\mathbb{A}}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, \dim \mathbb{A} - 1, \quad (1)$$

где $\Gamma_0 = \nabla$ – линейная связность, Γ_{λ} ($\lambda \neq 0$) – тензорные поля типа $(1, 2)$ на M_n , X, Y – произвольные векторные поля на M_n [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Голоморфное векторное поле $\tilde{X}$ называется *аффинным*, если

$$L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla} = 0. \quad (2)$$

Для произвольных векторных полей Y_1, Y_2 , заданных на M_n , будем иметь

$$L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}(Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}) = 0. \quad (3)$$

Условия (2) и (3) равносильны.

Представим равенство (3) подробнее. Из определения производной Ли линейной связности следует, что

$$L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}(Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}) = L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{Y_1^{\mathbb{A}}} Y_2^{\mathbb{A}} - \tilde{\nabla}_{Y_1^{\mathbb{A}}} L_{\tilde{X}} Y_2^{\mathbb{A}} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, Y_1^{\mathbb{A}}]} Y_2^{\mathbb{A}}.$$

Отсюда на основании (1) получим

$$\begin{aligned} L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}(Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}) &= \varepsilon^{\alpha} \varepsilon^{\beta} ((L_{X_{\alpha}} (\Gamma_{\beta}(Y_1, Y_2)))^{\mathbb{A}} - (\Gamma_{\beta}(Y_1, L_{X_{\alpha}} Y_2))^{\mathbb{A}} - (\Gamma_{\beta}(L_{X_{\alpha}} Y_1, Y_2))^{\mathbb{A}}) \\ &= \gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} \varepsilon^{\sigma} (L_{X_{\alpha}} \Gamma_{\beta}(Y_1, Y_2))^{\mathbb{A}} = \varepsilon^{\sigma} (\gamma_{\sigma}^{\beta} L_{X_{\alpha}} \Gamma_{\beta})^{\mathbb{A}} (Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}), \end{aligned}$$

где $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta}$ – структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$.

Таким образом, для любых векторных полей Y_1, Y_2 , заданных на M_n , выполняется равенство

$$L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}(Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}) = \varepsilon^{\sigma} (\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} L_{X_{\alpha}} \Gamma_{\beta})^{\mathbb{A}} (Y_1^{\mathbb{A}}, Y_2^{\mathbb{A}}).$$

Отсюда заключаем, что условие (3) равносильно условию

$$\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} L_{X_{\alpha}} \Gamma_{\beta} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Голоморфное векторное поле $\tilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ с голоморфной связностью $\tilde{\nabla}$ является аффинным тогда и только тогда, когда существуют векторные поля X_{α} на M_n такие, что

- (1) $\tilde{X} = \varepsilon^{\alpha} X_{\alpha}^{\mathbb{A}}$;
- (2) $\gamma_{\sigma}^{\alpha\beta} L_{X_{\alpha}} \Gamma_{\beta} = 0$, $\alpha, \beta, \sigma = 0, 1, 2, \dots, \dim \mathbb{A} - 1$.

Множество всех голоморфных аффинных векторных полей на $M_n^{\mathbb{A}}$ образует алгебру Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ над полем действительных чисел. Обозначим через $\mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ вещественную алгебру Ли векторных полей на M_n . Отображение

$$h: (g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{Z}_0^1(M_n),$$

определенное условиями

$$\begin{aligned} h(\tilde{X} + \tilde{Y}) &= h(\tilde{X}) + h(\tilde{Y}), \\ h(s\tilde{X}) &= s \cdot h(\tilde{X}), \quad s \in \mathbb{R}, \quad h(aX^{\mathbb{A}}) = a \otimes X, \quad a \in \mathbb{A}, \end{aligned}$$

является инъективным гомоморфизмом. Поэтому отображение

$$\tilde{h}: (g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}} \rightarrow h((g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}),$$

определенное по правилу $\tilde{h}(\tilde{X}) = h(\tilde{X})$, будет изоморфизмом.

Пусть линейная связность $\tilde{\nabla}$ является естественным продолжением в $M_n^{\mathbb{A}}$ линейной связности ∇ , заданной на M_n , т.е. $\tilde{\nabla} = \nabla^{\mathbb{A}}$. Тогда $\Gamma_{\lambda} = 0$, $\lambda \neq 0$, и условия (2) теоремы 1 будут иметь вид

$$L_{X_{\alpha}} \nabla = 0.$$

Эти условия означают, что каждое векторное поле X_{α} является аффинным на M_n со связностью ∇ . Отсюда замечаем, что доказана

ТЕОРЕМА 2. *Голоморфное векторное поле $\tilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, снабженном связностью $\nabla^{\mathbb{A}}$, является аффинным тогда и только тогда, когда существуют векторные поля X_{α} на M_n такие, что*

- (1) $\tilde{X} = \varepsilon^{\alpha} X_{\alpha}^{\mathbb{A}}$;
- (2) *каждое векторное поле X_{α} является аффинным на (M_n, ∇) .*

Учитывая, что в рассматриваемом случае $h((g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}) = \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} g(M_n)$, получим, что имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Алгебра Ли $(g(M_n^{\mathbb{A}}))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей пространства $(M_n^{\mathbb{A}}, \nabla^{\mathbb{A}})$ изоморфна тензорному произведению $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{R}} g(M_n)$, где $g(M_n)$ – алгебра Ли аффинных векторных полей базы (M_n, ∇) .*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Weil, “Théorie des points proches sur les variétés différentiables”, *Géométrie différentielle*, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, **52**, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, 111–117.
- [2] А. П. Широков, “Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами”, *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **12**, ВИНТИ, М., 1981, 61–95.
- [3] В. В. Шурыгин, “Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля”, *Геометрия* – 7, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **73**, ВИНТИ, М., 2002, 162–236.
- [4] Kolář, “Affine structure on Weil bundles”, *Nagoya Math. J.*, **158** (2000), 99–106.
- [5] A. Morimoto, “Prolongation of connections to bundles of infinitely near points”, *J. Differential Geometry*, **11**:4 (1976), 479–498.
- [6] А. Я. Султанов, “Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля”, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 9, 64–72.

А. Я. Султанов

Пензенский государственный педагогический университет

им. В. Г. Белинского

E-mail: sultanovaya@rambler.ru

Поступило

21.05.2008

Исправленный вариант

29.11.2011