Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Бояринцева, В. М. Хаметов, Новая теорема о представлении мартингалов. (Дискретное время), *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 1, 40–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:38:17

УДК 517.219

НОВАЯ ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАРТИНГАЛОВ. (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ)

Н. С. Бояринцева, В. М. Хаметов

Данная статья посвящена доказательству новой теоремы о представлении мартингалов с дискретным временем, основанному на решении специально подобранной задачи оптимального управления случайными последовательностями. Устанавливается связь между решением уравнения Беллмана, мартингалным представлением. Рассматривается пример применения результатов для расчета опциона Европейского типа.

Библиография: 15 названий.

Введение

Теорема о представлении мартингалов [1] – одно из важнейших утверждений теории случайных процессов, имеющая приложения в общей теории случайных процессов [1], в теории стохастического оптимального управления [2], стохастической финансовой математике [3]–[7], статистике случайных процессов [8].

В данной работе получены новые необходимые и достаточные условия представимости мартингалов с дискретным временем в виде мартингалного преобразования [9]. Доказательство этого утверждения основано на решении специальным образом подобранной задачи оптимального управления случайной последовательностью с мультипликативным критерием. Отметим, что подобного рода задачи оптимального стохастического управления рассматривались в [10]–[12] для случая управляемых марковских последовательностей.

Основным результатом статьи является теорема 9, которая устанавливает связь между решением уравнения Беллмана (3), оптимальной стратегией и представлением мартингалов. Необходимо отметить, что наиболее общие утверждения, относящиеся к проблеме представления мартингалов с дискретным временем, изложены в работах [1], [3], [5], [6], [13], причем содержащиеся в них утверждения устанавливают условия существования этого представления. В отличие от этих работ теорема 9 дает “конструктивный” способ построения этого представления, который основан на решении уравнения Беллмана (3) и знании оптимального управления.

Кроме того, в п. 5 содержится применение теоремы 9 к решению задачи о расчете опциона Европейского типа. Отметим, что [4], [6], [7], [13] стохастический вариант динамического программирования применяется для решения вышеуказанной задачи с непрерывным временем. В данной статье мы не опираемся и не используем результаты этих работ.

1. Постановка задачи

Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0, \dots, N\}$, задана случайная последовательность $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$, со значениями в $\mathbb{R}^d$. Положим $F_t^S = \sigma\{S_\tau, \tau \leq t\}$, $F_t = F_t^S$ для любого $t \in N_0$ и $F = F_N^S$. Известно [1], что последовательность $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$ является семимартингалом относительно меры P .

Пусть Q – вероятностная мера на $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0})$ фильтрованном пространстве, эквивалентная P , т.е. $Q \sim P$. Множество вероятностных мер Q , эквивалентных P , обозначим через $\mathcal{P}_N(S, P)$. Интеграл относительно любой меры Q будем обозначать через M^Q .

Пусть $S_\bullet \triangleq (S_0, \dots, S_N)$, $S_0^t \triangleq (S_0, \dots, S_t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [3]. $\mathcal{M}_N(S, P) \triangleq \{Q \in \mathcal{P}_N(S, P) : \{S_t, F_t^S\}_{t \in N_0} \text{ является локальным мартингалом относительно меры } Q\}$. Вероятностную меру $Q \in \mathcal{M}_N(S, P)$ называют *мартингальной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f_N(S_\bullet)$ – любая F_N^S -измеримая ограниченная случайная величина. Будем говорить, что $f_N(S_\bullet)$ допускает S -представление, если существуют:

- i) F_0^S -измеримая случайная величина X_0 ;
- ii) F^S -предсказуемая последовательность $(\gamma_s^*, F_{s-1}^S)_{s \in N_1}$, где $N_1 \triangleq \{1, \dots, N\}$, со значениями в $\mathbb{R}^d$;
- iii) мера $Q \in \mathcal{M}_N(S, P)$

такие, что Q -п.н. справедливо равенство

$$f_N(S_\bullet) = X_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i), \quad (1)$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$, $\Delta S_i \triangleq S_i - S_{i-1}$.

Целью работы является получение условий, которые обеспечивают существование S -представления для случайной величины $f_N(S_\bullet)$.

2. Основные результаты

2.1. Для формулировки основного утверждения работы нам понадобится ряд результатов, связанных с решением вышеуказанной задачи стохастического оптимального управления.

2.1.1. *Постановка задачи стохастического оптимального управления.* Пусть $(S_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ – последовательность, определенная в п. 1. Обозначим через $G_Q: N_1 \times \mathbb{R}^{d \times N_1} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ измеримую функцию, определяемую соотношением $G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) = \ln M^Q[\exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S]$, где $M^Q(\bullet | F_{t-1}^S)$ – условное математическое ожидание относительно σ -алгебры F_{t-1}^S , называемую *кумулянтной* [3], [9] последовательности $(S_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ относительно меры $Q \in \mathcal{P}_n(S, P)$.

Отметим, всегда существует мера $\tilde{Q} \sim Q$, т.е. $\tilde{Q} \in \mathcal{P}_n(S, P)$, такая, что

$$\sup_{t \in N_1} M^{\tilde{Q}} |\Delta S_t|^l < \infty \quad \forall l = 1, \dots, k, \quad k < \infty.$$

Положим

- i) $D_t(Q) \triangleq \{\gamma \in \mathbb{R}^d : |G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma)| < \infty \text{ } Q\text{-п.н.}\};$
- ii) $\gamma_t^N \triangleq \{\gamma_t, \dots, \gamma_N\}$, где $\gamma_i \in \mathbb{R}^d \quad \forall i \in \{t, \dots, N\}$;
- iii) $D_t^N(Q) \triangleq \{\gamma_t^N \in \mathbb{R}^{d(N-t+1)} : |G_Q(i, S_0^{i-1}, -\gamma_i)| < \infty \text{ } Q\text{-п.н. для всех } i \in \{t, \dots, N\}\}, \quad D_\bullet(Q) \triangleq D_t^N(Q)|_{t=1}.$

Очевидно, что

- i) $D_t(Q) \in F_{t-1}^S$ для любого $t \in N_1$;
- ii) $Q\text{-п.н. } D_t(Q) \neq \emptyset$ для любого $t \in N_1$.

Если $\gamma_\bullet \triangleq \{\gamma_t\}_{t \in N_0}$ и при каждом $t \in N_1$ $\gamma_t - F_{t-1}^S$ -измерим, будем называть $\gamma_\bullet$ – *стратегией*, а γ_t – *управлением в момент времени t*. Управление $\gamma_t \in D_t(Q)$ будем называть *Q-допустимым*; соответственно, стратегию $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$ будем называть *Q-допустимой стратегией*.

Обозначим $\mathcal{P}_{N, D_\bullet}(S, P) \triangleq \{Q \in \mathcal{P}_N(S, P) : D_\bullet(Q) \neq \emptyset\}$.

Везде ниже будем полагать, что $\mathcal{P}_{N, D_\bullet}(S, P) \neq \emptyset$ и любое $Q \in \mathcal{P}_{N, D_\bullet}(S, P)$, не оговаривая это предположение дополнительно.

Опишем теперь критерий оптимальности:

$$M^Q \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \rightarrow \inf_{\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)},$$

где $f_N(S_\bullet)$ определена в п. 1.

Оценкой стратегии $\gamma_t^N \in D_t^N(Q)$ в момент времени $t \in N_0$, обозначаемую через $I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet)$, назовем F_t^S -измеримую случайную величину, определяемую равенством

$$I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet) \triangleq M^Q \left[\exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| F_t^S \right]. \quad (2)$$

Очевидно, что для любого $t \in N_0$

- i) $Q\text{-п.н. } 0 < I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet) < \infty$ для любых $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$;
- ii) у оценки стратегии $I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet)$ определена Q -существенная нижняя грань на множестве $D_{t+1}^N(Q)$, т.е. $Q\text{-} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N(Q)} I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet)$, которую обозначим

$$V_t^Q \triangleq Q\text{-} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N(Q)} I_t^Q(S_\bullet, \gamma_\bullet)$$

и назовем ее *функцией Беллмана*.

Очевидно, что $V_t^Q - F_t^S$ -измеримо при каждом $t \in N_0$. Из приведенных выше определений следует, что функция Беллмана удовлетворяет рекуррентному соотношению. Точная формулировка содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f_N(S_\bullet)$ – F_N^S -измеримая ограниченная величина. Тогда Q -п.н. для любых $t \in N_0$ справедливо

$$\begin{aligned} V_t^Q &= Q\text{-}\operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}(Q)} M^Q[V_{t+1}^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_{t+1})\} | F_t^S], \\ V_t^Q|_{t=N} &= \exp\{f_N(S_\bullet)\}. \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение (3) – это хорошо известное уравнение Беллмана, соответствующее задаче оптимального стохастического управления случайной последовательностью $(S_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ с мультипликативным критерием [10]–[12], причем, в отличие от [10]–[12], в данном случае $(S_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ не является марковской, а $f_N(S_\bullet)$ F_N^S -измерима.

2.1.2. Возникает вопрос о разрешимости уравнения (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что последовательность $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ является *сильным решением уравнения (3)*, если выполняются условия

- i) для любого $t \in N_0$ $0 \leq V_t^Q < \infty$ Q -п.н.;
- ii) $V_t^Q|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$;
- iii) подстановка (V_t^Q, F_t^S) в (3) обращает (3) в тождество (с точностью до множеств нулевой меры Q).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что (3) имеет *единственное сильное решение*, если из того, что $(\tilde{V}_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ и $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ – два сильных решения, причем $\tilde{V}_t^Q|_{t=N} = V_t^Q|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$, Q -п.н., следует, что $\tilde{V}_t^Q = V_t^Q$ Q -п.н. для любых $t \in N_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что фильтрация $(\bar{F}_t^S)_{t \in N_0}$ является *универсальным пополнением* фильтрации $(F_t^S)_{t \in N_0}$, если $\bar{F}_0^S$ является пересечением всех пополнений σ -алгебры F_0^S по всем (заданным на (Ω, F_N^S)) конечным мерам. Говорят, что фильтрация $(F_t^S)_{t \in N_0}$ *универсально полна*, если $F_t^S = \bar{F}_t^S$ для любых $t \in N_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из [10]–[12], доказательство разрешимости уравнения Беллмана тесно связано с проблемой измеримого выбора [3], [10]–[12], [14], [15]. Известно [15], если имеется произвольное фильтрованное пространство $(\Omega, F^S, (F_t^S)_{t \in N_0})$ и измеримое пространство $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – σ -алгебра борелевских множеств $\mathbb{R}^d$, то при каждом $t \in N_1$ для любого $A \in F_t^S \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ существует $\bar{F}_t^S$ – измеримый селектор [3], [10]–[12], [14], [15]. На этом факте и лемме Звонкина [10], [14] основано доказательство теоремы о разрешимости уравнения (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, а $(F_t^S)_{t \in N_0}$ универсально полна. Тогда сильное ограниченное решение уравнения (3) существует и единственно. Если, кроме того, существует положительная константа $c > 0$ такая, что для любого $t \in N_1$ Q -п.н. выполняется условие

$$Q\text{-}\operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t(Q)} \exp\{G(t, S_0^{t-1}, -\gamma)\} \geq c > 0, \quad (4)$$

то $V_t^Q > 0$ Q -п.н. для любого $t \in N_0$.

2.1.3. Обозначим через $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \triangleq \{Q \in \mathcal{P}_{N,D_\bullet}(S,P): \text{уравнение (3) имеет единственное, строго положительное, сильное, ограниченное решение}\}$.

Из теорем 1, 2 следует утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть выполнены условия теорем 1, 2 и условие (4). Тогда $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$.

2.1.4. Определим теперь оптимальную и ε -оптимальную стратегии и установим условия их существования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\varepsilon > 0$; стратегию $\varphi_\bullet^\varepsilon \in D_\bullet(Q)$ назовем ε -оптимальной, если $I_0^Q(S_\bullet, \varphi_\bullet^\varepsilon) \leq V_0^Q \exp\{\varepsilon\}$; 0-оптимальную стратегию назовем оптимальной.

Сформулируем условия существования ε -оптимальных стратегий.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$. Тогда относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$ справедливы следующие утверждения:

1) для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\varphi_\bullet^\varepsilon \in D_\bullet(Q)$ – ε -оптимальная стратегия, причем для любого $t \in N_1$ Q -п.н. справедливо неравенство

$$\exp\left\{\frac{\varepsilon}{N}\right\} \geq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \geq 1; \quad (5)$$

2) существует последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ такая, что

- i) $\varphi_t^{\varepsilon_n} \in D_t(Q)$ для любого $n \geq 1$ и $t \in N_1$;
- ii) $\varphi_\bullet^{\varepsilon_n}$ – ε_n -оптимальная стратегия;
- iii) для любого $t \in N_1$ Q -п.н.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^Q [V_t^Q \exp\{-(\varphi_t^{\varepsilon_n}, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] = Q\text{-ess inf}_{\gamma \in D_t(Q)} M^Q [V_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S].$$

2.1.5. Сформулируем теперь несколько критериев оптимальности стратегий. Для этого нам понадобится ряд определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Процесс $(m_t^{\alpha_\bullet}, F_t^S)_{t \in N_0}$, определяемый равенством $m_t^{\alpha_\bullet} = V_t^Q \times \exp\left\{\sum_{i=1}^t (\alpha_i, \Delta S_i)\right\}$, где $\alpha_\bullet \in D_\bullet(Q)$, назовем S -оценивающим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $H: N_1 \times \mathbb{R}^{dN_1} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ – измеримая функция, обозначаемая через $H(t, S_0^{t-1}, \gamma)$, F_{t-1}^S -измеримая при каждом $t \in N_1$. Будем говорить, что $H(t, S_0^{t-1}, \gamma)$ $\mathcal{F}_1(Q)$ -дифференцируема по γ в точке $\gamma \in \mathbb{R}^d$ по направлению $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^d$ (эту производную обозначим через $(\nabla_\gamma H(t, S_0^{t-1}, \gamma), \tilde{\gamma})$), если для любых $t \geq 0$ выполняются условия

- 1) $M^Q |H(t, S_0^{t-1}, \gamma)| + M^Q |H(t, S_0^{t-1}, \gamma + h\tilde{\gamma})| < \infty$ для $\forall h \in (0, 1]$;
- 2) $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} M^Q |H(t, S_0^{t-1}, \gamma + h\tilde{\gamma}) - H(t, S_0^{t-1}, \gamma) - h(\nabla_\gamma H(t, S_0^{t-1}, \gamma), \tilde{\gamma})| = 0$.

Функцию $H(t, S_0^{t-1}, \gamma)$, $\mathcal{F}_1(Q)$ -дифференцируемую в любой точке γ по направлению $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^d$, будем называть $\mathcal{F}_1(Q)$ -дифференцируемой по направлению $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$. Тогда относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$ справедливы следующие утверждения.

1) При $\alpha_\bullet = \gamma_\bullet^0$ $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ оптимальна тогда и только тогда, когда S -оценивающий процесс является мартингалом относительно меры Q .

2) $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ Q -п.н. оптимальна тогда и только тогда, когда для любых $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$ и $t \in N_1$ справедливо неравенство Q -п.н.

$$M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} e^{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)} \middle| F_{t-1}^S \right] \leq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| F_{t-1}^S \right]. \quad (6)$$

3) Пусть $\forall \varepsilon > 0$ и существует нетривиальная ε -оптимальная стратегия $\varphi_\bullet^\varepsilon \in D_\bullet(Q)$ такая, что для любого $t \in N_1$ Q -п.н. справедливы неравенства

$$Q\{\pm(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t) > 0 | F_{t-1}^S\} > 0. \quad (7)$$

Тогда условие (7) является необходимым и достаточным для существования оптимальной стратегии $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$.

4) Пусть для любого $t \in N_1$ $M^Q[V_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S]$ $\mathcal{F}_1(Q)$ -дифференцируема по любому направлению $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^d$. Стратегия $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ оптимальна тогда и только тогда, когда Q -п.н.

$$\left(\nabla_\gamma M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \middle|_{\gamma=\gamma_t^0}, \gamma_t^0 - \gamma \right) \geq 0 \quad (8)$$

для любого $t \in N_1$.

5) Стратегия $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ оптимальна тогда и только тогда, когда Q -п.н. для любого $t \in N_1$ справедливо равенство

$$M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] = Q\text{-} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t(Q)} M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] = 1. \quad (9)$$

2.1.6. Установим условия Q -допустимости ε -оптимальной и оптимальной стратегий.

ТЕОРЕМА 6 (проверочная). Пусть $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$. Тогда относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$ справедливы следующие утверждения:

1) если любое $\varepsilon > 0$ и $\varphi_\bullet^\varepsilon$ — ε -оптимальная стратегия, то она Q -допустима, т.е. $\varphi_\bullet^\varepsilon \in D_\bullet(Q)$;

2) если $\gamma_\bullet^0$ — оптимальная стратегия, то она Q -допустима, т.е. $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$.

2.1.7. Условия существования оптимальной стратегии $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$, сформулированные в теореме 5, трудно проверяемы. Поэтому приведем простые достаточные условия существования оптимальных стратегий.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$. Тогда относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$ справедливы следующие утверждения:

1) если для любого $t \in N_1$ Q -п.н.

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) = \infty, \quad (10)$$

то существует оптимальная стратегия;

2) если для любого $t \in N_1$ $M^Q[V_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S]$ дважды $\mathcal{F}_1(P)$ -дифференцируема по γ и для любых $t \in N_1$, $\theta \in \mathbb{R}^d$ и $\gamma \in D_t(Q)$ Q -п.н. выполняется условие

$$M^Q[V_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\}(\theta, \Delta S_t)^2 | F_{t-1}^S] \geq 0, \quad (11)$$

то существует $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ такая, что для любого $t \in N_1$ Q -п.н. справедливо равенство (9), т.е. $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ – оптимальная стратегия.

2.1.8. Обозначим через $\mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P) \triangleq \{Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P): \text{существует хотя бы одна оптимальная стратегия } \gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q), \text{ т.е. для } \forall t \in N_1 \text{ } Q\text{-п.н. справедливо равенство (9)}\}$.

Из предложения 3, теорем 4–7 следует утверждение.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия

1) $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P) \neq \emptyset$;

2) относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$ выполняется одно из следующих условий: (7), (8), (9) (теоремы 5), (10), (11) (теоремы 7).

Тогда $\mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P) \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$, причем $\tilde{Q}$ – мартингальная мера, $z_N(\omega) \triangleq \frac{dQ}{d\tilde{Q}}(\omega)$ – производная Радона-Никодима, а $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ – решение уравнения Беллмана (3) относительно меры Q . Тогда $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ также является решением уравнения Беллмана

$$V_t^Q = \tilde{Q} - \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}(\tilde{Q})} M^{\tilde{Q}}[V_{t+1}^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_{t+1})\} | F_t^Q],$$

$$V_t^Q|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet) + \ln z_N(\omega)\}.$$

Это уравнение вытекает из теоремы Гирсанова [3].

2.2. Перейдем к формулировке основного результата данной работы.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $f_N(S_\bullet)$ – любая F_N^S -измеримая ограниченная случайная величина. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$ – единственная мартингальная мера, то $f_N(S_\bullet)$ допускает S -представление;

2) если $f_N(S_\bullet)$ допускает S -представление, то $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. 1) Из теоремы В [3] (см. с. 609) и второго утверждения теоремы 9 следует первое утверждение теоремы 9. Отметим, что доказательство первого утверждения является новым.

2) В силу теоремы В [3] (см. с. 609) утверждения 1) и 2) теоремы 9 являются эквивалентными.

3) Теорема 9 устанавливает связь между решением $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ уравнения Беллмана (3), оптимальной стратегией $\gamma_\bullet^0$ и объектами, участвующими в S -представлении, т.е. $X_0 = \ln V_0^Q$ и $\gamma_t^* = \gamma_t^0$ Q -п.н. для любого $t \in N_1$.

3. Доказательство теорем 1–6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 проводится аналогично доказательству следствия 16.15 из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 проводится так же, как и доказательство теоремы 5 из [12].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3 следует из утверждений теорем 1, 2 и определения множества $\mathcal{P}_{N,EB,b}^+(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 почти дословно повторяет доказательство теоремы 7 из [12], поэтому его не приводим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Первое утверждение теоремы устанавливается аналогично доказательству теорем 16.17 из [2]. Доказательство второго утверждения проводится аналогично доказательству теоремы 7 из [12]. Доказательство третьего утверждения почти дословно повторяет доказательство леммы 3 (см. с. 541) из [3]; в силу его громоздкости мы его не приводим.

Приведем доказательство четвертого утверждения. Пусть $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ – оптимальная стратегия; тогда для любого $t \in N_1$ выполнено (9). Пусть $\forall \gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$, причем $\gamma_\bullet \neq \gamma_\bullet^0$. Тогда справедливо неравенство: для любых $\gamma_t = \gamma_t^0 + \lambda \tilde{\gamma}_t$, $\lambda \in (0, 1)$, $t \in N_1$ Q -п.н.

$$1 = M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \leq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0 + \lambda \tilde{\gamma}, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right].$$

Отсюда следует, что Q -п.н.

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \left[\exp\{-\lambda(\tilde{\gamma}, \Delta S_t)\} - 1 \right] \middle| F_{t-1}^S \right]. \quad (12)$$

В силу $\mathcal{F}_1(P)$ -дифференцируемости функции

$$M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right]$$

в точке $\gamma_t^0 \in D_t(Q)$, переходя к пределу при $\lambda \downarrow 0$ в (12), получаем утверждение теоремы.

Обратно. Пусть для любых $t \in N_1$ и $\gamma \in D_t(Q)$ выполнено (8). Покажем, что $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ – оптимальная стратегия и выполнено (9). Сначала заметим, что для любых $t \in N_1$, $\lambda \in (0, 1]$ и $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$ справедливо неравенство Q -п.н.

$$\begin{aligned} & \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(1-\lambda)\gamma_t^0 + \lambda\gamma_t, \Delta S_t\} \middle| F_{t-1}^S \right] \\ & \leq (1-\lambda) \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \\ & \quad + \lambda \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что Q -п.н.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left\{ \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(1-\lambda)\gamma_t^0 + \lambda\gamma_t, \Delta S_t\} \middle| F_{t-1}^S \right] \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \right\} \\ & \leq \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \\ & \quad - \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

В силу $\mathcal{F}_1(P)$ -дифференцируемости функции

$$\mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right]$$

в точке γ_t^0 и условий теоремы получаем из (13), что Q -п.н.

$$\begin{aligned} 0 & \leq \left(\nabla_\gamma \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \right) \bigg|_{\gamma=\gamma_t^0, \gamma_t^0 - \gamma} \\ & \leq \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] - \mathbb{M}^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует (8).

Пятое утверждение следует из первого утверждения теоремы. Доказательство закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. 1) Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varphi^\varepsilon_\bullet \in D_\bullet(Q)$. В силу теоремы 2 существуют константы $0 < c_1 \leq c_2$ такие, что для функции Беллмана V_t^Q справедливы оценки $0 < c_1 \leq V_t^Q \leq c_2$ Q -п.н. для любого $t \in N_0$. В силу теоремы 4 справедливо неравенство (5), поэтому имеем Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{\varepsilon}{N}\right\} &\geq M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \\ &\geq \frac{c_1}{c_2} M^Q[\exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \geq \frac{c_1}{c_2} \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\varphi_t^\varepsilon)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда следует оценка сверху.

Построим теперь оценку снизу. Из (5) следует, что Q -п.н.

$$1 \leq M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \leq \frac{c_2}{c_1} \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\varphi_t^\varepsilon)\}. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует первое утверждение.

2) Пусть $\varphi^\bullet_\bullet$ и $\gamma^\bullet_\bullet$ – соответственно ε -оптимальная и оптимальная стратегии. Из теорем 1, 4 следует, что для любого $t \in N_1$ Q -п.н.

$$\begin{aligned} 1 &= Q\text{-ess inf}_{\gamma \in D_t(Q)} M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\}\right] \\ &= M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \\ &\leq M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \leq \exp\left\{\frac{\varepsilon}{N}\right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $\varepsilon/N = \ln 2$ и $\tilde{\varphi}_t \triangleq \varphi_t^{N \ln 2}$. Тогда в силу (15) и (16) имеем Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$\begin{aligned} \frac{c_1}{c_2} \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t^0)\} &\leq M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \\ &\leq M^Q\left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\tilde{\varphi}_t, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S\right] \leq \exp\{\ln 2\} \leq 2. \end{aligned}$$

Построим теперь оценку снизу. В силу неравенств (15), (16) имеем Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$\begin{aligned} \frac{c_1^2}{2c_2^2} &\leq \frac{c_1}{2c_2} \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\tilde{\varphi}_t)\} \leq \frac{1}{2c_2} M^Q[V_t^Q \exp\{-(\tilde{\varphi}_t, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \\ &\leq \frac{1}{2c_2} V_{t-1}^Q \exp\{\ln 2\} = \frac{1}{c_2} M^Q[V_t^Q \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \\ &\leq M^Q[\exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] = \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t^0)\}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. 1) Из утверждения теоремы 4 следует, что для $\forall \varepsilon \in (0, 1]$ существует $\varphi_\bullet^\varepsilon \in D_\bullet(Q)$ – ε -оптимальная стратегия, причем Q -п.н. для любого $t \in N_1$ справедливо неравенство (5). Предположим, что Q -п.н. для $\forall t \in N_1$ $\|\varphi_t^\varepsilon\|_{\mathbb{R}^d} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Заметим, что в силу условий

$$M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \quad \text{и} \quad \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\varphi_t^\varepsilon)\}$$

– Q -п.н. эквивалентные функции для любого $t \in N_1$, т.е. существуют в силу теоремы 2 положительные константы $c_3 \leq c_4$ такие, что для $\forall t \in N_1$ Q -п.н. выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_3 \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\varphi_t^\varepsilon)\} &\leq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \\ &\leq c_4 \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -\varphi_t^\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

Поэтому Q -п.н.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^\varepsilon, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] = \infty,$$

но это противоречит неравенству (5). Значит, наше предположение неверно. Стало быть, семейство $\{\varphi_t^\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ ограничено для любого $t \in N_1$. Поэтому из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{\varphi_t^{\varepsilon_n}\}_{n \geq 1}$ такую, что $\varphi_t^{\varepsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P\text{-п.н.}} \gamma_t^0 \in D_t(Q)$. Отсюда в силу леммы Фату имеем Q -п.н.

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\varphi_t^{\varepsilon_n}, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] \\ &\geq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp\{-(\gamma_t^0, \Delta S_t)\} \middle| F_{t-1}^S \right] = 1. \end{aligned}$$

2) Второе утверждение теоремы следует из пункта 4) теоремы 5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8 следует из предложения 3 и теорем 4–7.

4. Доказательство теоремы 9

1) Пусть Q – единственная мартингальная мера, причем $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$, относительно которой существуют:

- i) $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ – единственное, сильное, ограниченное положительное решение (3) с граничным условием $V_t^Q|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$, где $f_N(S_\bullet)$ – любая F_τ^S -измеримая случайная величина;
- ii) $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ – оптимальная допустимая стратегия.

Покажем, что для $f_N(S_\bullet)$ справедливо S -представление.

Сначала заметим, что в силу сделанных предположений, справедливо равенство

$$M^Q \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \ln V_0^Q - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \right\} = 1. \quad (17)$$

Действительно, для любого $t \in N_0$ имеем в силу (3) Q -п.н.

$$\begin{aligned} 1 &= M^Q \left[\frac{V_{t+1}^Q}{V_t^Q} \exp \{ -(\gamma_{t+1}^0, \Delta S_{t+1}) \} \middle| F_t \right] = M^Q \left[\frac{V_N^Q}{V_t^Q} \exp \left\{ - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \right\} \middle| F_t \right] \\ &= M^Q \left[\exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \ln V_t^Q - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \right\} \middle| F_t^S \right]. \end{aligned}$$

Пусть

$$\tilde{Q}(A) \triangleq M^Q \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \ln V_0^Q - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \right\} 1_A(\omega),$$

где $\forall A \in F_N^S$. Ясно, что $\tilde{Q}$ – вероятностная мера. Так как Q -п.н. $\exp \{ f_N(S_\bullet) - \ln V_0^Q - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \} > 0$, то меры Q и $\tilde{Q}$ эквивалентны.

Покажем, что мера $\tilde{Q}$ мартингалная. Пусть для любого $t \in N_1$, $\gamma_t = \gamma_t^0 + (\varepsilon/N)\hat{\gamma}_t$, где $\hat{\gamma}_t$ – произвольный d -мерный детерминированный вектор с нормой меньше или равной единице, $\varepsilon > 0$ – параметр. Тогда в силу теорем 4, 6 такая стратегия является допустимой, ε -оптимальной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и $t \in N_1$ $|G_Q(t, S_0^{t-1}, -(\gamma_t^0 + \frac{\varepsilon}{N}\hat{\gamma}_t))| < \infty$. Стало быть, $\gamma_t \in D_t(Q)$. Поэтому из уравнения (3) и теоремы Гирсанова [3] следует, что Q -п.н.

$$\begin{aligned} 0 &\leq M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp \{ -(\gamma_t, \Delta S_t) \} - 1 \middle| F_{t-1}^S \right] \\ &= M^Q \left[\frac{V_t^Q}{V_{t-1}^Q} \exp \{ \gamma_t, \Delta S_t \} (\exp \{ -\varepsilon(\hat{\gamma}_t, \Delta S_t) \} - 1) \middle| F_{t-1}^S \right] \\ &= M^Q [\exp \{ -\varepsilon(\hat{\gamma}_t, \Delta S_t) \} - 1 \middle| F_{t-1}^S]. \end{aligned}$$

Разделим левую и правую части последнего неравенства на $-\varepsilon$, затем устремим $\varepsilon \downarrow 0$. Отсюда в силу леммы Фату имеем для любого $t \in N_1$

$$0 \geq M^{\tilde{Q}} [(\hat{\gamma}_t, \Delta S_t) \middle| F_{t-1}^S] \quad \tilde{Q}\text{-п.н.}$$

В силу произвольности $\hat{\gamma}_t$ получаем, что $M^{\tilde{Q}}(\Delta S_t \middle| F_{t-1}^S) = 0$ $\tilde{Q}$ -п.н. для $\forall t \in N_1$. Значит, мера $\tilde{Q}$ мартингалная. Но по условию мартингалная мера единственная, значит, $\tilde{Q}(A) = Q(A)$ для любого $A \in F_N^S$, поэтому

$$M^Q 1_A(\omega) \left[\exp \left\{ f_N(S_0) - \ln V_0^Q - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i) \right\} - 1 \right] = 0.$$

В силу произвольности множества $A \in F_N^S$ получаем, что

$$\exp\left\{f_N(S_0) - \ln V_0^Q - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^0, \Delta S_i)\right\} = 1 \quad Q\text{-п.н.}$$

Отсюда следует первое утверждение теоремы.

2) Пусть относительно мартингалльной меры Q справедливо S -представление (1). Нам надо установить, что $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$.

Пусть $(\tilde{V}_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ – последовательность, определяемая выражением $\tilde{V}_t^Q \triangleq \exp\{X_0 + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i)\}$. Отсюда следует, что Q -п.н.

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_{t-1} \exp\{(\gamma_t^*, \Delta S_t)\}. \quad (18)$$

Значит Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$M^Q[\tilde{V}_t \exp\{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)\} | F_t^S] = \tilde{V}_{t-1}. \quad (19)$$

Для любой $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$, причем $\gamma_\bullet \neq \gamma_\bullet^*$, установим что для любых $t \in N_1$ Q -п.н. справедливо неравенство

$$M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \geq \tilde{V}_{t-1}^Q. \quad (20)$$

Рассмотрим левую часть (20). В силу (18) имеем Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$\begin{aligned} M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] &= M^Q[\tilde{V}_{t-1}^Q \exp\{-(\gamma_t - \gamma_t^*, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \\ &= \tilde{V}_{t-1}^Q \exp\{G_Q(t, S_0^{t-1}, -(\gamma_t - \gamma_t^*))\}. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что для любого $t \in N_1$ Q -п.н.

$$G_Q(t, S_0^{t-1}, -(\gamma_t - \gamma_t^*)) \geq 0.$$

Действительно, так как Q – мартингалльная мера, то $\nabla_\gamma G_Q(t, S_0^{t-1}, 0) = 0$ Q -п.н. для любого $t \in N_1$. Поэтому, в силу неравенства Иенсена, имеем Q -п.н. для любых $t \in N_1$ и $\gamma_t \in D_t(Q)$

$$G_Q(t, S_0^{t-1}, -(\gamma_t - \gamma_t^*)) \geq (\gamma_t - \gamma_t^*, \nabla_\gamma G_Q(t, S_0^{t-1}, 0)) = 0.$$

Стало быть, для любых $\gamma_t \in D_t(Q)$ и $t \in N_1$ имеем Q -п.н.

$$M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma_t, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \geq \tilde{V}_{t-1}^Q.$$

Отсюда следует, что Q -п.н. для любых $t \in N_1$

$$\tilde{V}_{t-1}^Q \leq Q\text{-ess inf}_{\gamma \in D_t(Q)} M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S].$$

Но в силу (19) имеем Q -п.н. для любого $t \in N_1$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{t-1}^Q &= Q\text{-ess inf}_{\gamma \in D_t(Q)} M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S] \\ &= M^Q[\tilde{V}_t^Q \exp\{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)\} | F_{t-1}^S]. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что из (1) следует $\tilde{V}_t^Q|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$ Q -п.н. Значит, $Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$. Доказательство закончено.

5. Применение теоремы 9 к задаче расчета опциона Европейского типа

В данном разделе мы применим теорему 9 к решению задачи о расчете опциона Европейского типа [3]–[6], [13].

5.1. Для формулировки основного утверждения нам надо ввести ряд обозначений и определений.

Пусть $\{S_t, F_t^S\}_{t \in N_0}$ – d -мерная последовательность, определенная нами в п. 1. Предположим, что она управляется рекуррентным соотношением

$$S_t = (E + \rho_t)S_{t-1}, \quad S_t|_{t=0} = S_0, \quad (21)$$

где S_0 – d -мерный вектор, $E = (\delta_{ij})$ – матрица размера $d \times d$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} (\rho_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ – последовательность случайных матриц размера $d \times d$.

Равенство (21) описывает эволюцию стоимости d различных активов.

Предположим, что выполняется *условие* (S): для $\forall Q \in \mathcal{P}_{N,EB,b}^{+,0}(P)$

i) $M^Q|S_0| < \infty$;

ii) для любого $t \in N_0$ $S_t^{(i)} > 0$ Q -п.н., где $S_t^{(i)}$ – i -я компонента вектора S_t , удовлетворяющего (21).

Величину $X_t^{\gamma_\bullet} \triangleq (\gamma_t, S_t)$ назовем *капиталом* в момент времени $t \in N_0$, где $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$. Очевидно, что $X_t^{\gamma_\bullet}$ F_t^S -измеримо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегию (портфель) $\gamma_\bullet \in D_\bullet(Q)$ назовем *самофинансирующей*, если для любого $t \in N_0$ Q -п.н. $(\Delta\gamma_t, S_{t-1}) = 0$. Множество самофинансирующих стратегий обозначим через $SFD_\bullet(Q)$.

Очевидно, если $\gamma_\bullet \in SFD_\bullet(Q)$, то для капитала $\{X_t^{\gamma_\bullet}, F_t^S\}_{t \in N_0}$ справедливо представление Q -п.н. $X_t^{\gamma_\bullet} = X_0^{\gamma_\bullet} + \sum_{i=1}^t (\gamma_i, \Delta S_i)$. F_0^S -измеримую величину $X_0^{\gamma_\bullet}$ назовем *начальным капиталом*.

F_N^S -измеримую ограниченную случайную величину $f_N(S_\bullet)$, введенную в п. 2, в стохастической финансовой математике называют *платежным обязательством* с моментом исполнения N .

Задача расчета опциона Европейского типа состоит в доказательстве существования и построении стратегии (портфеля) $\gamma_\bullet \in SFD_\bullet(Q)$ и минимального начального капитала $X_0^{\gamma_\bullet}$ таких, что $X_N^{\gamma_\bullet} = f_N(S_\bullet)$ Q -п.н. Отметим, что такой портфель называют *хеджирующим*.

5.2. Теперь мы можем сформулировать основное утверждение.

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнены условия теоремы 9 и условие (S). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) стратегия $\gamma_\bullet^0 \in SFD_\bullet(Q)$, определяемая (6) или (8), или (9), существует и является хеджирующей;

2) $X_0^{\gamma_\bullet^0} = \ln V_0^Q$ – минимальный начальный капитал, являющийся F_0^S -измеримой случайной величиной, где $(V_t^Q, F_t^S)_{t \in N_0}$ – решение уравнения Беллмана (3);

3) капитал портфеля $\gamma_\bullet^0 \in D_\bullet(Q)$ для любого $t \in N_0$ Q -п.н. равен $\ln V_t^Q$, т.е. $X_t^{\gamma_\bullet^0} = \ln V_t^Q$ Q -п.н. для любого $t \in N_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10 непосредственно следует из утверждений теорем 1–9.

Авторы выражают благодарность А. А. Гущину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М., 1994.
- [2] Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения. М.: Мир, 1986.
- [3] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
- [4] El Karoui N., Quenez M. C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM J. Control Optim. 1995. V. 53. № 1. P. 29–66.
- [5] Мельников А. В. Финансовые рынки: стохастический анализ и расчет производных ценных бумаг. М.: ТВП, 1997.
- [6] Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. М. Математика финансовых обязательств. М.: ГУВШЭ, 2001.
- [7] Mania M. A general problem of an optimal equivalent change of measure and contingent claim pricing in an incomplete market // Stochastic Process and their Appl. 2000. V. 90. P. 19–42.
- [8] Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
- [9] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
- [10] Хаметов В. М., Пиуновский А. Б. Оптимальное управление скачкообразными случайными процессами. М.: МИЭМ, 1987.
- [11] Бертсекас Д., Шрив С.. Стохастическое оптимальное управление. М.: Наука, 1985.
- [12] Пиуновский А. Б., Хаметов В. М. Новые точно решаемые примеры для управляемых цепей Маркова с дискретным временем // Кибернетика. 1991. № 3. С. 82–90.
- [13] Волков С. Н., Крамков Д. О. О методологии хеджирования опционов. // Обозрение прикл. промышл. матем. Сер. фин. и страх. мат. 1997. Т. 4. № 1. С. 18–65.
- [14] Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Управляемые марковские процессы и их приложения. М.: Наука, 1975.
- [15] Sainte-Beuve M. F. One the extension of von Neumann–Aumann's theorem // J. Funct. Anal. 1974. V. 17. P. 112–129.

Московский государственный институт
электроники и математики

Поступило
28.03.2002