Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Мазалов, Равномерное приближение функций, непрерывных на произвольном компакте в $\mathbb{C}$ и аналитических внутри компакта, функциями, бианалитическими в его замыкании, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 245–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 14:54:35

УДК 517

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОМПАКТЕ В $\mathbb{C}$ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНУТРИ КОМПАКТА, ФУНКЦИЯМИ, БИАНАЛИТИЧЕСКИМИ В ЕГО ОКРЕСТНОСТИ

М. Я. Мазалов

Доказано, что на любом компакте X в $\mathbb{C}$ всякую функцию, непрерывную на X и голоморфную внутри X , можно с любой точностью приблизить функциями, бианалитическими в его окрестности.

Библиография: 9 названий.

1. Формулировка результатов. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – произвольный компакт, $\mathring{X}$ – множество его внутренних точек. Как известно [1, с. 172], не всякую функцию $f(z)$, непрерывную на X и аналитическую в $\mathring{X}$, можно равномерно приблизить на X последовательностью функций, каждая из которых аналитична в некоторой (своей) окрестности X . Это становится возможным, если в качестве приближающих функций рассмотреть бианалитические [2], т.е. решения уравнения $\bar{\partial}^2 f = 0$ в некоторых окрестностях X , где $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана. Здесь существенную роль играет ограниченность фундаментального решения $\pi^{-1}\bar{z}/z$ оператора $\bar{\partial}^2$. Установим следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – функция, непрерывная на компакте $X \subset \mathbb{C}$ и аналитическая в $\mathring{X}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция вида

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\overline{z - z_i}}{z - z_i}, \quad (1.1)$$

где z_i , $i = \overline{1, n}$, – точки в дополнении X , λ_i , $i = \overline{1, n}$, – константы, такая, что всюду на X будет выполнено неравенство $|f(z) - F(z)| < \varepsilon$.

Ясно, что $F(z)$ бианалитична в некоторой окрестности X .

Теорема 1 в качестве предположения была сформулирована в [3, разд. 4]. Основным результатом работы [3] является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (Дж. Вердера, [3]). Каждая функция, Дини-непрерывная на X и бианалитическая в $\mathring{X}$, может быть равномерно приближена на X последовательностью функций, бианалитических в окрестностях X .

В п. 6 настоящей работы дадим короткое элементарное доказательство теоремы 2.

2. Идея доказательства теоремы 1. Применим метод Витушкина [1] разделения особенностей и приближения функции по частям, а также его модификацию для бианалитических функций [3].

Далее $A, A_1, A_2, \dots$ – положительные абсолютные константы, вообще говоря, различные в разных соотношениях.

Используя теорему Уитни [4, с. 205], продолжим $f(z)$ за границу X до финитной функции, непрерывной в $\mathbb{C}$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$. Зафиксируем $\delta > 0$.

Пусть $B(a, \delta)$ – замкнутый круг с центром a и радиусом δ , $\phi_\delta = \phi_{\delta, a}$ – неотрицательная бесконечно гладкая функция такая, что

$$\text{supp } \phi_\delta(z) \subset B(a, \delta), \quad |\nabla^l \phi_\delta| \leq A\delta^{-l}, \quad l = 0, 1, 2, \quad (2.1)$$

где $\text{supp } \phi$ – замыкание множества $\{\phi \neq 0\}$.

ЛЕММА 2.1. Пусть функция $\Phi(z)$ непрерывна в $\mathbb{C}$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, $\phi_\delta = \phi_{\delta, z_0}$. Тогда

- (i) [3, § 5] функция $p_\delta(z) = (\bar{z}/z) * (\phi_\delta \bar{\partial}^2 \Phi)$ непрерывна в $\mathbb{C}$, бианалитична всюду вне круга $B(z_0, \delta)$, разлагается при $|z - z_0| > \delta$ в ряд Лорана

$$p_\delta(z) = c_0 \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} + \frac{b_1}{z - z_0} + c_1 \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + c_n \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{(z - z_0)^{n+1}} + \dots,$$

и при этом справедливы оценки:

- 1) $\max(|c_n|, |b_n|) \leq A\omega(\delta)\delta^n$;
2) пусть c_n и $b_n = 0$ при $n < k$; тогда

а) $|p_\delta(z)| \leq A\omega(\delta) \min\left(1, \frac{\delta^k}{|z - z_0|^k}\right)$;

- б) коэффициенты c_k и b_k не зависят от центра разложения функции в ряд Лорана (в частности, c_0 никогда не зависит от центра разложения);

- (ii) [1, гл. 1, 2], оценки 1) и 2) справедливы для функции $h_\delta(z) = z^{-1} * (\phi_\delta \bar{\partial} \Phi)$, которая (в силу свойств Φ и ϕ_δ) непрерывна в $\mathbb{C}$ и аналитична всюду вне круга $B(z_0, \delta)$, причем $c_n = 0$ для $n = 0, 1, \dots$;

- (iii) пусть $\phi_\delta(z) \equiv 1$ в $B(z_0, 3\delta/4)$; тогда функция $p(z)$, непрерывная в $\mathbb{C}$, бианалитическая всюду вне $B(z_0, \delta/2)$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \{p(z) - \alpha \bar{z}/z\} = 0$ (где $\alpha = \text{const}$), представима в виде $p(z) = \pi^{-1}(\bar{z}/z) * (\phi_\delta \bar{\partial}^2 p)$, а функция $h(z)$, аналитическая всюду вне $B(z_0, \delta/2)$, непрерывная в $\mathbb{C}$, $h(\infty) = 0$, – в виде $h(z) = (\pi z)^{-1} * (\phi_\delta \bar{\partial} h)$.

- (iv) пусть функция $p(z)$ бианалитична всюду вне $B(z_0, \delta/2)$, $|p(z)| \leq \omega(\delta)$ при $|z - z_0| \geq \delta/2$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \{p(z) - \alpha \bar{z}/z\} = 0$; тогда для $p(z)$ справедливы оценки 2а) при $|z - z_0| \geq \delta/2$, а также оценки 1) и 2б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (iii) вытекает из теоремы Лиувилля (для бианалитических функций, например [2, теорема 2.2]). Пусть $r(z) = p(z) - \pi^{-1} \bar{z}/z * (\phi_\delta \bar{\partial}^2 p)$. Тогда так как $\phi_\delta(z) \equiv 1$ на открытом множестве, содержащем $\text{supp } \bar{\partial}^2 p$, то $\bar{\partial}^2 r \equiv 0$ в $\mathbb{C}$. В силу (i) и поведения $p(z)$ на ∞ имеем $r(z) \equiv 0$. Для $h(z)$ доказательство аналогично.

(iv) следует из (iii) и (i) после непрерывного продолжения (без существенного увеличения $|p(z)|$) функции $p(z)$ внутрь круга $B(z_0, 3\delta/4)$. Лемма доказана.

Для разделения особенностей исходной функции $f(z)$ построим стандартное разбиение единицы в $\mathbb{C}$ с помощью функций ϕ_j , удовлетворяющих условию (2.1):

$$\phi_j = \phi_{\delta, \zeta_j}, \quad j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \zeta_j = (j_1 \delta, j_2 \delta), \quad \sum_j \phi_j(z) \equiv 1 \quad \text{в } \mathbb{C}.$$

При этом $f(z) = (\pi z)^{-1} * \bar{\partial} f = \sum f_j(z)$, где $f_j(z) = (\pi z)^{-1} * (\phi_j \bar{\partial} f)$.

Введем обозначения:

$$B_j = B(\zeta_j, \delta), \quad A \cdot B_j = B(\zeta_j, A\delta), \quad E_j = B_j \setminus \overset{\circ}{X}. \quad (2.2)$$

Ясно, что каждая из функций f_j аналитична вне множества E_j . В частности, если $E_j \subset \overset{\circ}{X}$, то $f_j(z) \equiv 0$.

Теорема 1 вытекает из следующей леммы с помощью группировки индексов (п. 5). Аналог леммы 2.2 для бианалитических Дини-непрерывных функций – лемма 6.1 (п. 6); здесь в силу условия Дини необходимости в группировке индексов нет.

ЛЕММА 2.2. Пусть $f_j(z)$ – функция, аналитическая вне E_j и непрерывная в $\mathbb{C}$, $|f_j(z)| \leq \omega(\delta)$ в $\mathbb{C}$, $f(\infty) = 0$. Тогда существует такая функция $F_j(z)$ вида (1.1), что $z_\iota \in E_j$, $|\lambda_\iota| \leq A_1 \omega(\delta)$, $\iota = \overline{1, n_j}$, $|F_j(z)| \leq A_1 \omega(\delta)$, и для разности $r_j = f_j - F_j$ равны нулю лорановские коэффициенты c_0 , b_1 и c_1 .

Нам понадобятся функции вида

$$K(z, z_1, z_2) = \frac{\overline{z - z_2}}{z - z_2} - \frac{\overline{z - z_1}}{z - z_1}. \quad (2.3)$$

Пусть $a = |z_2 - z_1|$, $\tau = \tau_x + i\tau_y = (z_2 - z_1)/a$. Нетрудно показать, что

$$K(z, z_1, z_2) = -2ia \frac{\operatorname{Im}(\bar{\tau}(z - z_1))}{(z - z_1)(z - z_2)} = -2ia \frac{\tau_x(y - y_1) - \tau_y(x - x_1)}{(z - z_1)(z - z_2)}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что

$$K(z, z_1, z_2) = \frac{c_x(x - x_0) + c_y(y - y_0)}{(z - z_0)^2} + O(|z|^{-2}), \quad (2.5)$$

где коэффициенты $c_x = 2i \operatorname{Im}(z_2 - z_1)$, $c_y = -2i \operatorname{Re}(z_2 - z_1)$ не зависят от центра z_0 разложения $K(z, z_1, z_2)$ в ряд Лорана, $z_0 = x_0 + iy_0$, $c_x = c_1 + b_1$, $c_y = i(b_1 - c_1)$.

Если множество $E = E_j$ не более чем счетно, то $f_j(z) \equiv 0$ (и тогда $F_j(z) \equiv 0$).

Пусть $\delta_1 = \operatorname{diam} E = |z' - z''|$, где z' и $z'' \in E$. Тогда (лемма 2.1) для коэффициентов Лорана функции $f_j(z)$ выполнено неравенство $|b_n| \leq A\omega(\delta_1)(2\delta_1)^n$. В силу элементарной леммы о трех точках [3, лемма 2.1] в лемме 2.2 можно считать, что каждая точка z множества E удовлетворяет условию $\operatorname{dist}(z, (z', z'')) < \alpha\delta_1$, где (z', z'') – прямая, соединяющая z' и z'' , и $\alpha > 0$ – (малая) абсолютная константа. Лемма 2.2 (с помощью замены переменных $w = az + b$) легко сводится к своему частному случаю: $z' = 0$ и $z'' = \delta_1$ и вытекает из следующего утверждения. (Далее $\omega = \omega(\delta)$.)

ЛЕММА 2.3 (основная). Пусть $g(z)$, $|g(z)| \leq \omega$, — функция, непрерывная в $\mathbb{C}$ и аналитическая вне замкнутого множества E , содержащего точки 0 и δ_1 и принадлежащего квадрату $Q_0 = \{0 \leq x \leq \delta_1, |y| \leq \delta_1/2\}$, $g(\infty) = 0$. Тогда существуют набор точек z_ι и $z'_\iota \in E$, $\iota = \overline{1, n}$, $\operatorname{Re} z_\iota \leq \operatorname{Re} z'_\iota < \operatorname{Re} z_{\iota+1}$, функция $G(z)$ и абсолютная константа $A_0 > 0$ такие, что

- 1) $G(z) = \sum_{\iota=1}^n \lambda_\iota K(z, z_\iota, z'_\iota)$;
- 2) $|\lambda_\iota| \leq \omega$, $|G(z)| \leq \omega$;
- 3) $|c_x(G(z))| \geq A_0 |c_x(g(z))|$.

Действительно, так как $c_x(K(z, 0, \delta_1)) = 0$, $c_y(K(z, 0, \delta_1)) = -2i\delta_1$, $c_0(K(z, 0, \delta_1)) = c_0(G(z)) = 0$, искомая функция $F_j(z)$ строится как $\beta_1 G(z) + \beta_2 K(z, 0, \delta_1)$, где $|\beta_1| \leq 1/A_0$, $\beta_2 = -(2i\delta_1)^{-1}(c_y(g) - \beta_1 c_y(G))$, причем $\max(|c_y(g)|, |c_y(G)|) \leq A_1 \omega \delta_1$. При доказательстве леммы 2.3 будем считать $\omega = 1$, что не нарушает общности рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для справедливости леммы 2.3 непрерывность $g(z)$ необходима. Если множество E расположено на оси Ox , то коэффициент $c_x(G) \equiv 0$, но нетрудно построить ограниченную в $\mathbb{C}$ функцию, аналитическую вне E , с $c_x \neq 0$.

Лемму 2.3 докажем в пп. 3, 4.

3. Оценка $c_x(g)$. Построение квадратов Q_m и функций φ_m . На каждом h -м шаге построим конечное семейство $\{Q_{h,m}\}$ замкнутых квадратов с попарно непересекающимися внутренностями и со сторонами, параллельными координатным осям, покрывающее множество E : Q_0 — исходный квадрат, $Q_0 = \{0 \leq x \leq \delta_1, |y| \leq \delta_1/2\}$, для каждого $h \in \mathbb{N}$ $Q_{h+1,m}$ вложено в $Q_{h,m}$.

Каждое семейство $\{Q_{h,m}\}$ состоит из квадратов двух видов, назовем их соответственно *отмеченными* и *неотмеченными* (в начале построения Q_0 не отмечен). Сторона неотмеченного квадрата Q_b имеет длину $d = 2^{-h} \delta_1$, для отмеченного квадрата Q_g длина стороны может принимать одно из значений $2^{-k} \delta_1$, $k = 0, 1, \dots, h$.

Каждый отмеченный квадрат Q_g содержит пару точек z_g и $z'_g \in E$ такую, что

$$|\operatorname{Im}(z_g - z'_g)| \geq \frac{1}{4} d(Q_g)$$

(назовем ее *наклонной парой точек*). Семейство $\{Q_{h,m}\}$ содержит все квадраты, отмеченные на предыдущих шагах, и обладает следующим свойством: каждая прямая $x = x_0$, $x_0 \in (0, \delta_1)$, пересекает либо внутренность только одного квадрата, либо боковые стороны только двух.

Для построения семейства $\{Q_{h+1,m}\}$ с каждым неотмеченным квадратом Q_b семейства $\{Q_{h,m}\}$ проведем следующие операции.

Прямыми, параллельными оси Ox , разобьем Q_b на четыре равных (замкнутых) прямоугольника P_s , $s = 1, \dots, 4$; если найдутся точки $z_b \in E \cap P_{s_1}$ и $z'_b \in E \cap P_{s_2}$, $|s_1 - s_2| \geq 2$, то отметим Q_b (и включим в $\{Q_{h+1,m}\}$). В противном случае множество $E \cap Q_b$ (возможно, пустое) принадлежит прямоугольнику $P_{s_1} \cup P_{s_2}$, $|s_1 - s_2| = 1$. Полученный прямоугольник разобьем прямой, параллельной Oy , на два равных (неотмеченных) квадрата, которые включим в $\{Q_{h+1,m}\}$ вместо Q_b .

Рассмотрим произвольный номер h . Применив конструкцию из леммы о покрытии Харви и Полкинга [5, лемма 3.1], построим разбиение единицы на $\bigcup Q_m = \bigcup Q_{h,m}$ с

помощью бесконечно гладких функций $\varphi_m(z)$ следующего вида:

$$\text{supp } \varphi_m \subset \frac{3}{2}Q_m, \quad |\nabla^l \varphi_m| \leq Ad(Q_m)^{-l}, \quad l = 0, 1, 2. \quad (3.1)$$

(Напомним идею конструкции. Пусть $d(Q_1) \geq \dots \geq d(Q_m) \geq d(Q_{m+1}) \geq \dots$, $\psi_m(z)$ – функции из (2.1): $\text{supp } \psi_m = 3Q_m/2$, $\psi_m \equiv 1$ на $11Q_m/10$, $|\nabla^l \psi_m| \leq Ad(Q_m)^{-l}$, $l = 0, 1, 2$. Тогда $\varphi_1 = \psi_1$, $\varphi_m = \psi_m \prod_{k=1}^{m-1} (1 - \psi_k)$, $m \geq 2$.) Построение завершено.

Пусть $\phi(z) = \phi_{4\delta_1, 0}$ из (2.1), $\phi(z) \equiv 1$ на $B(0, 2\delta_1)$.

Тогда (лемма 2.1 (iii)) $g(z) = (\pi z)^{-1} * (\phi \bar{\partial} g)$, и так как $\text{supp } \bar{\partial} g \subset \bigcup Q_m$, то $g(z) = \sum_m g_m(z)$, где $g_m(z) = (\pi z)^{-1} * (\varphi_m \bar{\partial} g)$. Таким образом,

$$c_x(g) = c_x(g_g) + c_x(g_b), \quad \text{где} \quad g_g(z) = \sum'_m g_m(z), \quad g_b(z) = \sum''_m g_m(z),$$

здесь $\sum'$ – сумма по всем номерам отмеченных квадратов, $\sum''$ – сумма по всем номерам неотмеченных.

Если $g(z) \neq 0$, то так как $g(z)$ непрерывна и аналитична вне E , хотя бы один квадрат будет отмечен. В противном случае, устремив номер шага h к ∞ , получим (так как $\sum_m d(Q_{h,m}) = \delta_1$), что E имеет конечную длину, что невозможно.

В силу леммы 2.1 справедливы оценки:

$$|c_x(g_g)| \leq A \sum'_m d(Q_m), \quad |c_x(g_b)| \leq A\omega(2^{-h})d(Q_0),$$

где $\omega(\delta)$ – модуль непрерывности $g(z)$.

Воспользовавшись непрерывностью $g(z)$, зафиксируем достаточно большой номер h , при котором малость $\omega(2^{-h})$ приводит к выполнению неравенства $|c_x(g_g)| \geq |c_x(g)|/2$. Тогда

$$|c_x(g)| \leq A \sum'_m |\text{Im}(z_m - z'_m)|, \quad (3.2)$$

где сумма берется по всем наклонным парам точек отмеченных квадратов.

В силу (2.5) и (3.2) функция $G_1(z) = (1/(2i)) \sum'_m K(z, z_m, z'_m)$ (при $\text{Im}(z'_m - z_m) > 0$) удовлетворяет условию 3) леммы 2.3. Однако, $|G_1|$ не будет, вообще говоря, ограничен в $\mathbb{C}$ сверху абсолютной константой, поэтому надо “исправить” G_1 с целью добиться указанной ограниченности так, чтобы при этом $|c_x|$ уменьшился “несущественно”.

Пусть $Z' = \{z_m\} \cup \{z'_m\}$. “Перестроим” $\{Q_m\}$ в множество квадратов D_k с центрами t_k ($\text{Re } t_s < \text{Re } t_{s+1}$), обладающее свойством (D):

СВОЙСТВО (D). Квадраты $4D_k$ не пересекаются, и ломаная $y = Y(x)$, проходящая через $t_1, \dots, t_s, t_{s+1}, \dots$, удовлетворяет условию $|Y'(x)| \leq 1/4$. При этом $\sum d(D_k) \geq A \sum d(Q_m)$ и каждый квадрат D_k содержит пару точек w и w' из Z' такую, что $\text{Im } |w - w'| = d(D_k)/5$.

Пусть $w_1 = x_1 + iy_1$ и $w_2 = x_2 + iy_2$ – две произвольные точки множества Z' , удовлетворяющие условию $|y_1 - y_2| \geq |x_1 - x_2|/4$ (в частности, но не обязательно, наклонная пара точек некоторого отмеченного квадрата Q_m). Рассмотрим квадрат Q'_k с центром $((x_1 + x_2)/2; (y_1 + y_2)/2)$ и стороной $20|y_1 - y_2|$. Ясно, что если w_1 и w_2 – наклонная пара

точек некоторого Q_m , то $Q_m \subset Q'_k$. Пусть Δ_k – проекция Q'_k на ось Ox , Δ – проекция $\bigcup Q_m$ на Ox . Исключим из рассмотрения такие Q'_k , что Δ_k полностью покрывается проекцией некоторого другого квадрата Q'_s . Ясно, что $\Delta \subset \bigcup \Delta_k$.

Воспользуемся леммой о покрытиях [4, гл. 1, § 1]. Пусть Δ_1 – наибольший из отрезков $\{\Delta_k\}$ (если несколько отрезков одинаковы, выбираем любой), Δ_s – наибольший отрезок, не пересекающий $\Delta_1, \dots, \Delta_{s-1}$, Δ_n – последний отрезок, построенный таким образом. Тогда

$$\sum_{s=1}^n |\Delta_s| \geq A_1 |\Delta| \geq A_2 |c_x(g)|.$$

Рассмотрим множество $\mathcal{Q}'$ квадратов Q'_k , $k = \overline{1, n}$, проекциями которых являются построенные отрезки Δ_k . При необходимости переупорядочив, считаем, что $\operatorname{Re} t_s < \operatorname{Re} t_{s+1}$, где t_k – центр Q'_k , z_k и z'_k – пара точек из Z' , по которой был построен квадрат Q'_k (назовем ее *наклонной парой точек* Q'_k), также $\operatorname{Re} z_k \leq \operatorname{Re} z'_k$. Напомним, что t_k – середина отрезка $[z_k, z'_k]$, $d(Q'_k) = 20 \operatorname{Im} |z_k - z'_k| \geq 5 \operatorname{Re} |z_k - z'_k|$.

Рассмотрим две точки $w_1 = x_1 + iy_1$ и $w_2 = x_2 + iy_2$, принадлежащие наклонным парам разных квадратов из $\mathcal{Q}'$ (соответственно Q'_α и Q'_β).

Заметим, что $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|/4$. Действительно, в противном случае

$$\max(|d(Q'_\alpha)|, |d(Q'_\beta)|) \leq \frac{5|x_1 - x_2|}{2}$$

(иначе Δ_α и Δ_β пересекаются), и тогда хотя бы одна из проекций Δ_α или Δ_β покрывается проекцией квадрата из $\bigcup Q'_k$ со стороной $\geq 5|x_1 - x_2|$, содержащего w_1 и w_2 в качестве наклонной пары точек, и, следовательно, один из квадратов (Q'_α или Q'_β) был бы исключен еще до применения леммы о покрытиях.

Уменьшим каждый из квадратов Q'_k в 4 раза, не меняя его центра t_k , и полученные квадраты обозначим D_k . Как ясно из построения, эти квадраты обладают указанным свойством (D).

Таким образом, доказательство леммы 2.3 сводится к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.1. Пусть Γ' – ломаная с вершинами $t_k = \tau_k + i\nu_k$, $\tau_1 < \dots < \tau_n$, заданная уравнением $y = Y(x)$, $|Y'(x)| \leq 1/4$, D_k , $k = \overline{1, n}$, – квадраты с центрами t_k такие, что $4D_k$ не пересекаются, $[z_k, z'_k]$ – отрезок с центром t_k , принадлежащий D_k , такой, что $|\operatorname{Im}(z_k - z'_k)| = d(D_k)/5$, $\operatorname{Re} z_k \leq \operatorname{Re} z'_k$.

Тогда существуют константы λ_k , $k = \overline{1, n}$, $|\lambda_k| \leq 1$, функция $G(z)$ и абсолютная константа $A_0 > 0$ такие, что:

- 1) $G(z) = \sum_{k=1}^n \lambda_k K(z, z_k, z'_k)$;
- 2) $|G(z)| \leq 1 \notin \mathbb{C}$;
- 3) $|c_x(G)| \geq A_0 \sum d(D_k)$.

Лемму 3.1 докажем в п. 4. Значения констант $(1/4, 1/5, 4)$ взяты в лемме для определенности и могут быть изменены.

4. Построение $G(z)$. Пусть Γ – ломаная, проходящая последовательно через $z_1, z'_1, \dots, z_n, z'_n$. Ясно, что для любых двух точек $w_1, w_2 \in \Gamma$ выполняется условие $l(w_1, w_2) \leq 2|w_1 - w_2|$ (l – длина дуги). В частности, Γ является *регулярной по Давиду* [6] (D-регулярной).

Пусть s – натуральный параметр кривой Γ . Заметим, что в силу (2.3)

$$G(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t \in \Gamma, |t-z| > \varepsilon} \lambda(t(s)) \frac{d}{ds} \left(\frac{\overline{z-t(s)}}{z-t(s)} \right) ds \quad (4.1)$$

всюду, кроме конечного множества точек; здесь

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_k, & t \in [z_k, z'_k], \\ 0, & t \in \Gamma \setminus \bigcup [z_k, z'_k]. \end{cases}$$

Действительно, если $t, z \in (z_k, z'_k)$, $t \neq z$, то

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\overline{z-t(s)}}{z-t(s)} \right) = 0.$$

Поэтому интеграл (4.1) фактически понимается как собственный всюду, кроме $\{z_k\} \cup \{z'_k\}$. Функция $G(z)$ равномерно ограничена в $\mathbb{C}$ (константой, зависящей от n) и непрерывна всюду, кроме $\{z_k\} \cup \{z'_k\}$. Как показывает вычисление ядра,

$$G(z) = (T\lambda)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|t-z| > \varepsilon} \lambda(t) \left(\frac{1}{t(s) - z} \frac{\overline{t'(s)}}{t'(s)} + \frac{\overline{z-t(s)}}{(z-t(s))^2} \right) dt(s). \quad (4.2)$$

Из теории сингулярных интегралов на D -регулярных кривых с антисимметричным ядром Кальдерона–Зигмунда, бесконечно гладким в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, следует (например, [6]), что оператор T ограничен в метрике L_2 на ломаной Γ ($\|T\lambda\|_{L_2} \leq A\|\lambda\|_{L_2}$) и является оператором слабого типа $(l\{z \in \Gamma: |T\lambda| > \alpha\} < A'\|\lambda\|_{L_1}/\alpha)$.

Покажем, что для функции $G(z)$ верен ослабленный вариант принципа максимума модуля, и поэтому в лемме 3.1 достаточно добиться выполнения условия $|G(z)| \leq 1$ только на $\bigcup t_k$ (где t_k – центр квадрата D_k). (Напомним, что $G(z)$ непрерывна на $\bigcup t_k$.) Для этого заметим следующее.

1) Пусть z – произвольная точка квадрата D_k . Так как квадраты $4D_k$ не пересекаются и $|\lambda_k| \leq 1$, из (4.2) следует неравенство

$$|G(z) - G(t_k)| \leq A_1 d(D_k) \int_{d(D_k)}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = A_1.$$

2) Пусть в (4.2) $|\lambda(t)| \leq 1$. Тогда если $|T\lambda| \leq 1$ на $\text{supp } \lambda$, то $|T\lambda| \leq A$ в $\mathbb{C}$.

Действительно, возьмем произвольную точку $z \in \mathbb{C}$. Пусть t_0 – ближайшая к z точка $\text{supp } \lambda(t)$ и $|z - t_0| = \delta'$; γ' и γ'' – дуги на Γ с серединой t_0 такие, что

$$\int_{\gamma'} |\lambda(t(s))| |dt(s)| = \delta'$$

и $l(\gamma'' \setminus \gamma) = \delta'$. (Если $\|\lambda\|_{L_1} < \delta'$, то, очевидно, $|T\lambda(z)| \leq A$.)

Пусть t_1 – произвольная точка γ' . Тогда в силу стандартных оценок ядра (Кальдерона–Зигмунда) оператора T и выполнения условия $|t_1 - t| \geq A\delta'$ для всех $t \in \Gamma \setminus \gamma''$ имеют место оценки

$$|T\{\chi_{\gamma''}\lambda\}(z)| \leq A_2, \quad |T\{(1 - \chi_{\gamma''})\lambda\}(z) - T\{(1 - \chi_{\gamma''})\lambda\}(t_1)| \leq A_2,$$

где χ_E – характеристическая функция множества E .

Осталось подобрать такую точку $t_1 \in \gamma' \cap \text{supp } \lambda(t)$, чтобы было выполнено условие $|T\{\chi_{\gamma''}\lambda\}(t_1)| \leq A_2$. Возможность такого выбора вытекает из следующей оценки слабого типа (при $A_2 = 2A'$):

$$l\{T\{\chi_{\gamma''}\lambda\} > 2A'\} < \frac{\|\chi_{\gamma''}\lambda\|_{L_1}}{2} \leq \frac{l(\gamma'' \setminus \gamma') + \delta'}{2} = \delta',$$

но, так как $|\lambda(t)| \leq 1$, то $l\{\gamma' \cap \text{supp } \lambda\} \geq \int_{\gamma'} |\lambda(t)| |dt| \geq \delta'$.

Таким образом, $|T\lambda(z) - T\lambda(t_1)| \leq 3A_2$.

Применим дискретный аналог метода [7]. Доказательство леммы 3.1 сводится (с учетом сказанного выше и (2.5)) к следующей оценке.

Пусть $\mathbb{C}^{2n} - 2n$ -мерное комплексное пространство векторов $a = (a_1, \dots, a_{2n})$ с нормой $\|a\| = \max |a_i|$; (комплексно) линейные функционалы $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$ будем отождествлять с векторами $b = (b_1, \dots, b_{2n})$, $\|b\| = |b_1| + \dots + |b_{2n}|$; $b(a) = \sum a_i b_i$; S – подпространство $\mathbb{C}^{2n}$ векторов вида $\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, G(t_1), \dots, G(t_n))$.

ЛЕММА 4.1. Норма $\|L\|_S$ функционала L на S , задаваемого формулой

$$L(\alpha) = \sum_{k=1}^n \lambda_k d(D_k),$$

не меньше $A \sum d(D_k)$, где $A > 0$ – абсолютная константа (не зависящая от n).

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически A зависит только от нормы $\|T\|_{L_2 \rightarrow L_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Хана–Банаха (конечномерный вариант) имеет место равенство $\|L\|_S = \min_{L_0 \perp S} \|L + L_0\|$. То есть (учитывая определение $G(z)$) минимум берется по всем функционалам L_0 в $\mathbb{C}^{2n}$ вида $L_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_n, \mu_1, \dots, \mu_n)$ таким, что

$$\sum_{\iota=1}^n \lambda_{\iota} \gamma_{\iota} + \sum_{k=1}^n \sum_{\iota=1}^n \mu_k \lambda_{\iota} K(t_k, z_{\iota}, z'_{\iota}) = 0$$

для всех векторов из S , откуда получаем:

$$\gamma_{\iota} + \sum_{k=1}^n \mu_k K(t_k, z_{\iota}, z'_{\iota}) = 0, \quad \iota = \overline{1, n}.$$

Таким образом,

$$\|L\|_S = \min_{\mu} \left\{ \sum_{\iota=1}^n \left| d(D_{\iota}) - \sum_{k=1}^n \mu_k K(t_k, z_{\iota}, z'_{\iota}) \right| + \|\mu\| \right\}, \quad (4.3)$$

где $\|\mu\| = |\mu_1| + \dots + |\mu_n|$.

Пусть $\|\mu\| = \alpha_0 \sum_{k=1}^n d(D_k)$, где α_0 – некоторая положительная константа. Применив к μ (как мере на Γ) дискретный аналог разбиения Кальдерона–Зигмунда [4, гл. 2,

2.4], исключим множество квадратов D_k , суммарной длины сторон не больше $A_1\|\mu\|$, так, чтобы для множества $\mathcal{D}$ оставшихся квадратов выполнялась оценка

$$\sum_{\{\iota | D_\iota \in \mathcal{D}\}} \left| \sum_{k \neq \iota} \mu_k K(t_k, z_\iota, z'_\iota) \right| \leq A_1 \sqrt{\alpha_0} \sum_{k=1}^n d(D_k). \quad (4.4)$$

Тогда в силу (4.3) получим оценку

$$\|L\|_S \geq \max\{\alpha_0, 1 - A_1(\alpha_0 + \sqrt{\alpha_0}) - 2\alpha_0\} \sum_{k=1}^n d(D_k),$$

что достаточно для справедливости леммы 4.1.

Опишем подробно приведенное выше рассуждение.

Пусть $I = (w_1, w_2)$ – интервал на Γ . “Выпрямив” Γ , назовем *серединой* I точку $w \in I$ такую, что $l(w_1, w) = l(w, w_2)$. Через $A \cdot I$ будем обозначать интервал с той же серединой, но длины в A раз больше. Пусть $A \geq 1$, $\{I_k\}$ – множество интервалов на Γ , вообще говоря, пересекающихся. Тогда $l(\bigcup A \cdot I_k) \leq A l(\bigcup I_k)$. (Действительно, $\bigcup A \cdot I_k \subset \bigcup A \cdot J_s$, где J_s – связные компоненты $\bigcup I_k$.)

Пусть $P_1 = I_1$ – интервал на Γ с центром t_1 длины $l(P_1) = |\mu_1|$; $\eta_1(z(s))$ – функция на Γ , задаваемая формулой $\eta_1(z(s)) = (\mu_1/|\mu_1|)z'(s)\chi_{P_1}$; $\mu'_1 = \delta(t_1)\mu_1 - \eta_1(z(s))dz(s)$ – мера на Γ ($\delta(t)$ – единичная масса, сосредоточенная в t).

При $k = 2, \dots, n$ через I_k будем обозначать интервал с центром t_k , который определяется так: $l(P_k) = |\mu_k|$, где $P_k = I_k \setminus (I_1 \cup \dots \cup I_{k-1})$; $\eta_k(z(s)) = (\mu_k/|\mu_k|)z'(s)\chi_{P_k}$; $\mu'_k = \delta(t_k)\mu_k - \eta_k(z(s))dz(s)$. Ясно, что $\int d\mu'_k = 0$, $\int |d\mu'_k| \leq 2|\mu_k|$ и $|\eta_k| \leq 1$ при $k = 1, \dots, n$.

Пусть $\eta = \sum_{\iota=1}^n \eta_\iota$. Тогда $\int |\eta(z(s))dz(s)| = l(\bigcup P_\iota) = l(\bigcup I_\iota) = \|\mu\|$ и, так как P_ι попарно не пересекаются, то $|\eta| \leq 1$.

Пусть Q_ι^0 – наименьший содержащий I_ι квадрат с центром t_ι и сторонами, параллельными осям координат. Пусть для некоторого $k \neq \iota$ выполнено условие $D_k \not\subset 8Q_\iota^0$. Тогда $D_k \cap 2Q_\iota^0 = \emptyset$.

Действительно, в противном случае $d(D_k) > 2d(Q_\iota^0)$ (иначе $D_k \subset 8Q_\iota^0$) и $t_\iota \in 4D_k$. А это противоречит тому, что квадраты $4D_k$ не пересекаются.

Пусть $\mathcal{D}$ – множество всех таких квадратов D_k , которые не накрываются множеством $\bigcup 8Q_\iota^0$. Так как в силу свойств кривой Γ имеет место вложение $\{\Gamma \cap 8Q_\iota^0\} \subset A \cdot I_\iota$ (для некоторой константы $A > 1$) и $l(\bigcup A \cdot I_\iota) \leq A l(\bigcup I_\iota)$, то

$$\sum_{\{k | D_k \notin \mathcal{D}\}} d(D_k) \leq A\|\mu\|.$$

Пусть t – произвольная точка квадрата $D_k \in \mathcal{D}$. Так как при $\iota \neq k$ $D_k \cap 2Q_\iota^0 = \emptyset$, то $\text{dist}(t, I_\iota) \geq l(I_\iota)/2$.

Теперь оценка (4.4) получается с помощью рассуждений, аналогичных [4, гл. 2, 2.4]. Имеет место равенство

$$\sum_{k \neq \iota} \mu_k K(t_k, z_\iota, z'_\iota) = \int_\Gamma K(t, z_\iota, z'_\iota) \left[\sum_{k \neq \iota} d\mu'_k(t) + \eta(t) dt(s) - \eta_\iota(t) dt(s) \right].$$

(Здесь и далее $t = t(s)$.) Ясно, что

$$\sum_{\iota=1}^n \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \eta_{\iota}(t) dt \right| \leq 2 \sum_{\iota=1}^n \int_{\Gamma} |\eta_{\iota}(t)| dt = 2 \int_{\Gamma} |\eta(t)| dt = 2 \|\mu\| = 2\alpha_0 \sum_{k=1}^n d(D_k).$$

Из (4.1) и (4.2) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{\iota=1}^n \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \eta(t) dt \right| &= \sum_{\iota=1}^n \lambda_{\iota} \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \eta(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{\iota=1}^n \lambda_{\iota} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \eta(t) dt = \int_{\Gamma} (T\lambda)(t) \eta(t) dt, \end{aligned}$$

где λ_{ι} – некоторые числа, $|\lambda_{\iota}| = 1$, $\lambda(t)$ – соответствующая числу λ_{ι} функция из (4.1) такая, что $|\lambda(t)| \leq 1$, $\text{supp } \lambda \subset (\Gamma \cap (\bigcup D_k))$.

В силу L_2 -ограниченности оператора T , а также оценок $\max(|\lambda|, |\eta|) \leq 1$, $\|\lambda\|_{L_1} \leq A \sum d(D_k)$ и $\|\eta\|_{L_1} = \alpha_0 \sum d(D_k)$ получим

$$\int_{\Gamma} |(T\lambda)\eta| dt \leq A_2 \|\lambda\|_{L_2} \|\eta\|_{L_2} \leq A_2 \sqrt{\|\lambda\|_{L_1} \|\eta\|_{L_1}} \leq A_3 \sqrt{\alpha_0} \sum_{k=1}^n d(D_k).$$

Осталось оценить

$$\sum_{\{\iota | D_{\iota} \in \mathcal{D}\}} \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \sum_{k \neq \iota} d\mu'_k(t) \right|.$$

Пусть t_0 – произвольная точка интервала I_k . Так как $\int d\mu'_k = 0$, $\int |d\mu'_k| \leq 2|\mu_k|$ и $\text{dist}(D_{\iota}, I_k) \geq l(I_k)/2$ при $\iota \neq k$ и $D_{\iota} \in \mathcal{D}$, то в силу (4.1) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) d\mu'_k(t) \right| &\leq \int_{\Gamma} |K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) - K(t_0, z_{\iota}, z'_{\iota})| |d\mu'_k(t)| \\ &\leq 2|\mu_k| \sup_{t, t_0 \in I_k} |K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) - K(t_0, z_{\iota}, z'_{\iota})| \\ &= 2|\mu_k| \sup_{t, t_0 \in I_k} \left| \int_{[z_{\iota}, z'_{\iota}]} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{t - z(s)}{t - z(s)} - \frac{t_0 - z(s)}{t_0 - z(s)} \right\} ds \right| \\ &\leq A_2 |\mu_k| l(I_k) \int_{[z_{\iota}, z'_{\iota}]} \frac{|dz|}{|t_k - z|^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{\{\iota | D_{\iota} \in \mathcal{D}\}} \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) \sum_{k \neq \iota} d\mu'_k(t) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{\iota \neq k, D_{\iota} \in \mathcal{D}} \left| \int_{\Gamma} K(t, z_{\iota}, z'_{\iota}) d\mu'_k(t) \right| \\ &\leq A_2 \sum_{k=1}^n |\mu_k| l(I_k) \int_{\Gamma, |z - t_k| \geq \frac{1}{2} l(I_k)} \frac{|dz|}{|t_k - z|^2} \leq A_3 \sum_{k=1}^n |\mu_k| = A_3 \alpha_0 \sum_{k=1}^n d(D_k). \end{aligned}$$

Оценка (4.4) доказана, и тем самым доказательство леммы 4.1 завершено. Вместе с леммой 4.1 доказаны соответственно леммы 3.1, 2.3 и 2.2.

5. Группировка индексов. Окончание доказательства теоремы 1. Напомним, что $B_j = B(j_1, j_2)$ ($j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$) – круг с центром $\zeta_j = (j_1\delta, j_2\delta)$ и радиусом δ . Чтобы вывести теорему 1 из леммы 2.2, применим метод группировки индексов, идея которого была предложена Парамоновым в [8]. Так как коэффициент (c_x, c_y) является вектором, конструкция групп будет иной, чем в [8], [9].

Рассмотрим множество J индексов $j = (j_1, j_2)$ таких, что $f_j(z) \neq 0$, и следовательно, $E_j \neq \emptyset$ (обозначения в (2.2)). Упорядочим J по возрастанию индексов: $j < j'$, если $j_1 < j'_1$ или $j_1 = j'_1$, но $j_2 < j'_2$. Пусть $N_0 \in \mathbb{N}$ достаточно велико. (Можно взять $N_0 = 100$.)

Представим J в виде объединения непересекающихся групп индексов – так называемых *полных и неполных групп*.

Полная группа Υ имеет следующее строение: $\Upsilon = j^0 \cup L_h \cup L_v \cup L_d$, где

- 1) $j^0 = (j_1^0, j_2^0)$ – вершина группы, т.е. минимальный индекс среди всех остальных индексов группы;
- 2) L_h – “горизонтальный ряд индексов”, определяемый так: пусть l_1^h и $l_2^h \in \mathbb{N}$ – минимальные номера $\geq N_0$ такие, что $j^{1,h} = (j_1^0 + l_1^h, j_2^0)$ и $j^{2,h} = (j_1^0 + l_1^h + l_2^h, j_2^0) \in J$; тогда L_h – множество всех индексов $\{(j_1^0 + n, j_2^0) \in J\}$ таких, что $0 < n \leq l_1^h + l_2^h$ ($n \in \mathbb{N}$);
- 3) L_v – “вертикальный ряд индексов”, определяемый так: $L_v = \{(j_1^0, j_2^0 + n) \in J\}$, $0 < n \leq l_1^v + l_2^v$, l_1^v и l_2^v – минимальные номера $\geq N_0$ такие, что $j^{1,v} = (j_1^0, j_2^0 + l_1^v)$ и $j^{2,v} = (j_1^0, j_2^0 + l_1^v + l_2^v) \in J$;
- 4) L_d – “диагональный ряд индексов”, определяемый следующим образом: $L_d = \{(j_1^0 + n, j_2^0 + n) \in J\}$, $0 < n \leq l_1^d + l_2^d$, l_1^d и l_2^d – минимальные номера $\geq N_0$ такие, что $j^{1,d} = (j_1^0 + l_1^d, j_2^0 + l_1^d)$ и $j^{2,d} = (j_1^0 + l_1^d + l_2^d, j_2^0 + l_1^d + l_2^d) \in J$.

Ясно, что индексов в полной группе не меньше 7 и не больше $6N_0 + 1$.

Если в процессе построения полной группы мы не сможем завершить какой-либо ряд индексов (исчерпав соответствующие индексы в J), то получим так называемую неполную группу Υ' : $\Upsilon' = j^0 \cup L_{(i)}$, где $(i) = h, v$ или d , в зависимости от того, какой из рядов не был завершен первым. Ясно, что индексов в каждой неполной группе не более $2N_0$.

В качестве вершины первой группы Υ_1 возьмем минимальный индекс в J , в качестве вершины очередной группы Υ_n будем брать минимальный индекс в $J \setminus (\Upsilon_1 \cup \dots \cup \Upsilon_{n-1})$. В силу этого, в частности, в каждом ряду индексов $j_1 = \text{const}$, $j_2 = \text{const}$ или $j_1 - j_2 = \text{const}$ будет содержаться не более одной неполной группы.

Рассмотрим произвольную полную группу. В силу ее построения найдутся 7 точек $z_0 \in E_{j^0}$, $z_s^{(i)} \in E_{j^{s,(i)}}$, где $s = 1$ или 2 , (i) равно h, v или d .

Пусть

$$W_n(z, z_0, \dots, z_{n-1}) = \sum_{\iota=0}^{n-1} \min\left(1, \frac{\delta^2}{|z - z_\iota|^2}\right).$$

Рассмотрим функцию $U_\Upsilon(z)$, построение которой дается в доказательстве следующей леммы. Функции такого вида будем использовать для уравнивания коэффициентов c_2 и b_2 у полных групп индексов.

ЛЕММА 5.1 (о семи точках). Пусть $c_{2,x}$, $c_{2,y}$ – произвольные константы такие, что $\max(|c_{2,x}|, |c_{2,y}|) \leq \omega\delta^2$. Существует функция $U(z) = \sum_{\iota=0}^6 \lambda_\iota(z - z_\iota)/(z - z_\iota)$, (где z_ι – точки $z_0, z_1^h, \dots, z_2^d$), удовлетворяющая условиям:

- 1) $|U(z)| \leq \Delta\omega W_7(z, z_0, \dots, z_6)$;

- 2) $U(z) = \frac{c_{2,x}(x - x_0) + c_{2,y}(y - y_0)}{(z - z_0)^3} + O(|z|^{-3});$
 3) $|\lambda_\iota| \leq A\omega, \iota = \overline{0, 6}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 5.1 в качестве центра разложения функций в ряд Лорана будем рассматривать z_0 . Напомним, что $c_{2,x}$ и $c_{2,y}$ как старшие коэффициенты $U(z)$ не зависят (лемма 2.1, 2б)) от центра разложения, $c_{2,x} = c_2 + b_2$, $c_{2,y} = i(b_2 - c_2)$.

Как и в доказательстве леммы 2.3, можем считать $\omega = 1$. Пусть z_0, z_1 и z_2 — три точки, расположенные в указанном порядке на одной прямой, $|z_1 - z_0| = l'_1\delta$, $|z_2 - z_1| = l'_2\delta$, $\min(l'_1, l'_2) \geq N_0$, $\tau = (z_1 - z_0)/|z_1 - z_0|$. Рассмотрим функцию

$$U_\tau(z) = U_\tau(z, z_0, z_1, z_2) = -\frac{\delta}{2i(z_2 - z_0)} \left(\frac{1}{l'_2} K(z, z_1, z_2) - \frac{1}{l'_1} K(z, z_0, z_1) \right). \quad (5.1)$$

Как следует из (2.4),

$$U_\tau(z) = \delta^2 \frac{\tau_x(y - y_0) - \tau_y(x - x_0)}{(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)}. \quad (5.2)$$

Ясно, что $|U_\tau(z)| \leq W_3(z, z_0, z_1, z_2)$.

Если бы нашлись две прямые, на которых лежали бы соответственно какие-либо две из трех рассматриваемых троек $\{z_0, z_1^{(i)}, z_2^{(i)}\}$, то искомая функция $U(z)$ (в силу (5.2)) легко получалась бы как линейная комбинация соответствующих $U_\tau(z)$. В общем случае возникает остаточный коэффициент (c_x, c_y) , для устранения которого будем использовать функцию

$$K^{(\min)}(z) = \frac{1}{l_1^{(\min)}} K(z, z_0, z_1^{(\min)}),$$

где $l_1^{(\min)} = \min(l_1^h, l_1^v, l_1^d)$. Пусть для определенности $(\min) = h$. Нетрудно оценить, воспользовавшись (2.4), что для разложения $K^h(z)$ в ряд Лорана (с центром z_0) имеют место оценки

$$\frac{\delta}{2} \leq \max(|c_x|, |c_y|) \leq \frac{3\delta}{2}, \quad \max(|c_{2,x}|, |c_{2,y}|) \leq \frac{3}{2} l_1^h \delta^2. \quad (5.3)$$

Пусть (s) — любой из оставшихся индексов (v или d). Возьмем на прямой $(z_0, z_2^{(s)})$ точку z'_1 так, чтобы прямые $(z'_1, z_1^{(s)})$ и (z_0, z_1^h) были параллельны. Ясно, что (при достаточно больших N_0) $|z'_1 - z_1^{(s)}| \leq 3\delta$. Пусть $|z'_1 - z_0| = l_1^{(s)}\delta$, $|z_2^{(s)} - z'_1| = l_2^{(s)}\delta$.

Числа $l_1^{(s)}$ и $l_2^{(s)}$ “примерно равны” соответственно $l_1^{(s)}$ и $l_2^{(s)}$. Пусть

$$\begin{aligned} U_\tau^{(s)}(z) &= -\frac{\delta}{2i(z_2^{(s)} - z_0)} \left(\frac{1}{l_2^{(s)}} K(z, z_1^{(s)}, z_2^{(s)}) - \frac{1}{l_1^{(s)}} K(z, z_0, z_1^{(s)}) \right) + \lambda K^h(z) \\ &= U_\tau(z, z'_1, z_2^{(s)}) + u(z), \end{aligned}$$

где

$$u(z) = \lambda_1 K(z, z'_1, z_1^{(s)}) + \lambda K^h(z);$$

нетрудно заметить, что

$$|\lambda_1| = \frac{\delta}{2|z_2^{(s)} - z_0|} ((l_1^{(s)})^{-1} + (l_2^{(s)})^{-1});$$

λ выбрано так, чтобы $U_\tau^{(s)}(z) = O(|z|^{-2})$, что равносильно $u(z) = O(|z|^{-2})$ и возможно в силу параллельности $(z'_1, z_1^{(s)})$ и (z_0, z_1^h) ; $U_\tau(z, z'_1, z_2^{(s)})$ – функция из (5.1).

Заметим, что $|\lambda_1| \leq A_1(l_1^{(s)}l_2^{(s)})^{-1} \leq A_1(N_0l_1^{(s)})^{-1}$ и, следовательно, для функции $\lambda_1 K(z, z'_1, z_1^{(s)})$ выполнены неравенства

$$\max(|c_x|, |c_y|) \leq A_2\delta(N_0l_1^{(s)})^{-1}, \quad \max(|c_{2,x}|, |c_{2,y}|) \leq A_2\delta^2(N_0)^{-1}.$$

Поэтому в силу (5.3) и $u(z) = O(|z|^{-2})$ выполнено $|\lambda| \leq A_3(N_0l_1^{(s)})^{-1}$, и так как $l_1^{(s)} \geq l_1^h$, то для функции $\lambda K^h(z)$ имеет место неравенство $\max(|c_{2,x}|, |c_{2,y}|) \leq A_4\delta^2(N_0)^{-1}$.

Таким образом, из полученных оценок коэффициентов и (5.2) следует, что для U_τ^s

$$\max(|c_{2,x} + \tau_y^{(s)}\delta^2|, |c_{2,y} - \tau_x^{(s)}\delta^2|) \leq \frac{A_5\delta^2}{N_0}, \quad \text{где} \quad \tau^{(s)} = \tau_x^{(s)} + i\tau_y^{(s)} = \frac{z_2^{(s)} - z_0}{|z_2^{(s)} - z_0|}. \quad (5.4)$$

Нетрудно показать, что оценка $|u(z)| \leq AW_3(z, z_0, z_1^h, z_1^{(s)})$ в случае $|z - z_0| \leq 2l_1^{(s)}\delta$ следует из “достаточной малости” коэффициентов: $\max(|\lambda|, |\lambda_1|) \leq A(l_1^{(s)})^{-1}$, причем $|z_1^{(s)} - z'_1| \leq 3\delta$, $l_1^{(s)} \geq l_1^h$; $K^h(z) = (l_1^h)^{-1}K(z, z_0, z_1^h)$ и $K(z, z'_1, z_1^{(s)}) = O(|z|^{-1})$, поэтому $|\lambda_1 K(z, z'_1, z_1^{(s)})| + |\lambda K^h(z)| \leq AW_3(z, z_0, z_1^h, z_1^{(s)})$; при $|z - z_0| > 2l_1^{(s)}\delta$ используем дополнительно $u(z) = O(|z|^{-2})$.

Таким образом, для каждой из функций U_τ^v и U_τ^d выполняется оценка 1) (и, как ясно из построения, оценка 3)) настоящей леммы. В силу (5.4) (при достаточно большом N_0 угол между τ^v и τ^d близок к $\pi/4$) искомая функция $U(z)$ получается как линейная комбинация U_τ^v и U_τ^d . В случае минимальности l_1^v или l_1^d доказательство аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим произвольную полную группу Υ . Пусть $r_\Upsilon(z) = \sum_{j \in \Upsilon} r_j(z)$, где $r_j(z) = f_j(z) - F_j(z)$. В силу леммы 2.2 и в силу ограниченности сверху числа индексов в группе абсолютной константой имеет место оценка

$$|c_2(r_\Upsilon)| + |b_2(r_\Upsilon)| \leq \sum_{j \in \Upsilon} (|c_2(r_j)| + |b_2(r_j)|) \leq A_1\omega(\delta)\delta^2.$$

При этом $|r_\Upsilon(z)| \leq \sum_{j \in \Upsilon} |r_j(z)| \leq A_1\omega(\delta)$.

Применим лемму 5.1. Так как Υ является полной группой, то можно указать семь точек z_i : $z_0, z_1^h, \dots, z_2^d$ таких, что каждая точка z_i принадлежит некоторому множеству E_j , $j \in \Upsilon$. При этом существует функция $U_\Upsilon(z) = U(z)$, удовлетворяющая условиям 1) и 3) леммы 5.1 и такая, что $r_\Upsilon(z) - U_\Upsilon(z) = O(|z|^{-3})$.

Теперь теорема 1 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 5.2. *Функция*

$$\tilde{F}(z) = \sum_j F_j(z) + \sum_m U_{\Upsilon_m}(z),$$

где $\{\Upsilon_m\}$ – множество всех полных групп индексов, приближает исходную функцию $f(z) = \sum_j f_j(z)$ на всей плоскости $\mathbb{C}$ с точностью $A\omega(\delta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Действительно, в силу лемм 2.2, 2.3 и 5.1 функция $\tilde{F}(z)$ имеет следующую структуру:

$$\tilde{F}(z) = \sum_{\ell=1}^n \lambda_{\ell} \frac{\overline{z - z_{\ell}^0}}{z - z_{\ell}^0},$$

где все точки z_{ℓ}^0 принадлежат $\bigcup E_j = \bigcup (B_j \setminus \dot{X})$, а $|\lambda_{\ell}| \leq A_1 \omega(\delta)$. “Немного сдвинув” каждую из точек z_{ℓ}^0 в дополнение X и тем самым изменив $\tilde{F}(z)$ не более чем на $A_2 \omega(\delta)$, получим искомую функцию $F(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.2. Нужно доказать, что

$$\sum'_m |r_{\Upsilon_m}(z) - U_{\Upsilon_m}(z)| + \sum''_j |r_j(z)| \leq A \omega(\delta),$$

где $\sum'$ и $\sum''$ обозначают соответственно суммирование по всем номерам полных групп и по всем индексам неполных.

Доказательство (в существенных деталях) аналогично [9, с. 119–120].

Так как каждый ряд индексов $j_1 = \text{const}$, $j_2 = \text{const}$ или $j_1 - j_2 = \text{const}$ содержит не более одной неполной группы, общее число индексов в которой не превосходит $2N_0$, то для всех z имеет место оценка

$$\sum''_j |r_j(z)| \leq A_2 \omega(\delta) \sum_{s=1}^{\infty} s^{-2} \leq A_3 \omega(\delta).$$

Пусть $\Psi_m(z) = r_{\Upsilon_m}(z) - U_{\Upsilon_m}(z)$. Покажем, что $\sum'_m |\Psi_m(z)| \leq A \omega(\delta)$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $|z| < \delta$.

Разобьем множество всех полных групп (для данного z) на два класса следующим образом.

Рассмотрим полную группу $\Upsilon = \Upsilon_m$ с вершиной $j_{\Upsilon} = j^0 = (j_1^0, j_2^0)$, $\zeta_{\Upsilon} = (j_1^0 \delta, j_2^0 \delta)$. Назовем *диаметром* группы $\text{diam}(\Upsilon) = \delta \max(l_1^h + l_2^h, l_1^v + l_2^v, l_1^d + l_2^d)$. Отнесем Υ к первому классу, если $\delta^{-1} \text{diam}(\Upsilon) \leq \sqrt[4]{|j_1^0| + |j_2^0|}$, и ко второму классу в противном случае.

Из неравенства $|r_{\Upsilon}(z)| \leq A_1 \omega(\delta)$ и леммы 5.1, 1) следует, что $\sum'_m |\Psi_m(z)| \leq A_2 \omega(\delta)$ для всех групп Υ таких, что $|\zeta_{\Upsilon}| \leq 3N_0 \delta$. Далее считаем $|\zeta_{\Upsilon}| > 3N_0 \delta$.

Рассмотрим полную группу Υ_m первого класса. Воспользовавшись неравенством $|\Psi_m| \leq A_1 \omega(\delta)$, асимптотикой $\Psi_m(z) = O(|z|^{-3})$ и леммой 2.1 ($k = 3$), получим

$$|\Psi_m(z)| \leq A_1 \omega(\delta) \frac{(\text{diam}(\Upsilon))^3}{|z - \zeta_{\Upsilon}|^3} \leq 2A_1 \omega(\delta) \frac{\delta^3 \sqrt[4]{(\delta^{-1}|z - \zeta_{\Upsilon}|)^3}}{|z - \zeta_{\Upsilon}|^3} = 2A_1 \omega(\delta) \frac{\delta^{9/4}}{|z - \zeta_{\Upsilon}|^{9/4}}.$$

Так как все вершины групп различны, то, суммируя полученные неравенства по всем m таким, что Υ_m принадлежит первому классу, имеем

$$\sum'_{\{m | \Upsilon_m \in \text{кл. 1}\}} |\Psi_m(z)| \leq A_2 \omega(\delta) \delta^{1/4} \iint_{|z - \zeta| \geq 3N_0 \delta} \frac{dx dy}{|z - \zeta|^{9/4}} \leq A_3 \omega(\delta).$$

Рассмотрим множество J' индексов j всех полных групп второго класса. Для завершения доказательства леммы в силу оценки 2а) леммы 2.1 при $k = 2$ для $r_j(z)$ и оценки 1) леммы 5.1 для функций $U_{\Upsilon_m}(z)$ достаточно показать, что

$$\sum_{j \in J'} \frac{\delta^2}{|z - \zeta_j|^2} \leq A \quad (5.5)$$

при $|\zeta_j| \geq 2\delta$. Указанная оценка является следствием “разреженности” множества индексов полных групп второго класса.

Пусть Υ_m – полная группа второго класса. Тогда для Υ_m выполняется как минимум одно из трех соотношений:

- 1) $l_1^h + l_2^h > \sqrt[4]{|j_1^0|}$;
- 2) $l_1^v + l_2^v > \sqrt[4]{|j_2^0|}$;
- 3) $l_1^d + l_2^d > \sqrt[4]{|j_1^0 + j_2^0|}$.

(Такие группы будем называть соответственно *горизонтально*, *вертикально* или *диагонально* разреженными.) Установим (5.5) для множества J'_h всех индексов горизонтально разреженных групп; в остальных случаях доказательство аналогично.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Заметим, что число индексов из J'_h , принадлежащих множеству $L(j_2, s) = L(s) \cap \{j_2 = \text{const}\}$, где $L(s) = \{s^{4/3} \leq |j_1| \leq (s+1)^{4/3}\}$, не превосходит абсолютной константы A_2 , зависящей только от N_0 . (Действительно, $(s+1)^{4/3} - s^{4/3} \leq A_3 s^{1/3} = A_3 \sqrt[4]{s^{4/3}}$, поэтому число принадлежащих $L(j_2, s)$ вершин горизонтально разреженных групп не превосходит $4A_3$. При этом между каждыми двумя последовательно расположенными вершинами лежит горизонтальный ряд индексов только одной группы, число индексов в которой не превосходит $2N_0$.)

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J'_h} \frac{\delta^2}{|z - \zeta_j|^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j \in L(s)} \frac{\delta^2}{|z - \zeta_j|^2} \leq A_4 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{s^{8/3} + t^2} \\ &\leq A_5 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{4/3}} \leq A_6. \end{aligned}$$

Лемма доказана. Тем самым завершено доказательство теоремы 1.

6. Доказательство теоремы 2. Пусть $f(z)$ – функция, Дини-непрерывная на X и бианалитическая в $\hat{X}$. Это означает [3, раздел 3], что ее модуль непрерывности $\omega^1(\delta)$ регулярен, т.е. $\omega^1(2\delta) \leq A\omega^1(\delta)$, и удовлетворяет условию Дини, т.е. интеграл

$$\int_0^1 \frac{\omega^1(x)}{x} dx$$

сходится.

С помощью теоремы Уитни [4, гл. 6, 2.2.3] продолжим $f(z)$ до финитной функции, Дини-непрерывной в $\mathbb{C}$ и обладающей регулярным модулем непрерывности $\omega(\delta)$, $\omega(\delta) \leq A_1 \omega^1(\delta)$. Пусть

$$\omega_1(\delta) = \omega(\delta) + \int_0^\delta \frac{\omega(x)}{x} dx, \quad \omega_2(\delta) = \omega(\delta) \ln \frac{\text{diam}(X)}{\delta} = o(1) \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

С помощью функций $\phi_j(z)$ из (2.1) представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sum f_j(z), \quad f_j(z) = \pi^{-1} \frac{\bar{z}}{z} * (\phi_j \bar{\partial}^2 f),$$

и для $f_j(z)$ справедливы оценки леммы 2.1 (i). Теорема 2 вытекает из следующей леммы, аналогичной лемме 2.2 (и из леммы 2.1 (iv)). Определения E_j и B_j даны в (2.2), ζ_j — центр B_j . Если E_j не более чем счетно, то $f_j \equiv 0$ (и $F_j \equiv 0$).

ЛЕММА 6.1. *Существует функция $F_j(z)$ вида (1.1) такая, что $z_\iota \in E_j$, $|\lambda_\iota| \leq A\omega(\delta)$, $\iota = \overline{1, n_j}$, и для разности $r_j = f_j - F_j$ справедливы оценки:*

- 1) $|r_j(z)| \leq A\omega_1(\delta)$ в круге $8B_j$;
- 2) $|r_j(z)| \leq A\omega(\delta)$ вне $8B_j$;
- 3) $r_j(z) = O(|z|^{-2})$.

Здесь в группировке индексов нет необходимости: из леммы 6.1 сразу же следует неравенство

$$\begin{aligned} \sum_j |f_j(z) - F_j(z)| &\leq A_1 \left(\omega_1(\delta) + \omega(\delta) \iint_{8\delta \leq |z - \zeta| \leq 2 \operatorname{diam}(X)} \frac{dx dy}{|z - \zeta|^2} \right) \\ &\leq A_1 \omega_1(\delta) + A_2 \omega_2(\delta). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = E_j$, $\delta_1 = \operatorname{diam} E = |z' - z''|$, где z' и $z'' \in E$. Как и в лемме 2.3, здесь можем считать, что $z' = 0$ и $z'' = \delta_1$.

Применим построение п. 3. Сначала допустим, что хотя бы один квадрат будет отмечен. Тогда зафиксируем такой номер шага h , чтобы $\omega(2^{-h}\delta_1)\delta_1 \leq \sum' \omega(d_m)d_m$, где сумма берется по всем номерам отмеченных квадратов, $d_m = d(Q_m)$.

Пусть $\{\varphi_m\}$ — конечное множество функций из (3.1), покрывающих $\{Q_{h,m}\}$. Тогда

$$f_j(z) = \sum_m f_j^m(z), \quad \text{где} \quad f_j^m(z) = \pi^{-1} \frac{\bar{z}}{z} * (\phi_j \varphi_m \bar{\partial}^2 f).$$

Далее рассматриваем только такие номера m , что $f_j^m \not\equiv 0$. В частности, это означает следующее: пусть t_m — центр квадрата Q_m , тогда найдется точка $\tau_m \in E$ такая, что $|t_m - \tau_m| \leq 3d_m/2$.

Теперь приближающая функция $F_j(z)$ дается явной формулой

$$F_j(z) = \sum_m c_0(f_j^m) \frac{\overline{z - \tau_m}}{z - \tau_m} + \lambda \sum_m' \omega(d_m) K(z, z_m, z'_m) + \lambda_1 \omega(\delta_1) K(z, 0, \delta_1), \quad (6.1)$$

где $\sum'$ — суммирование по всем номерам отмеченных квадратов, z'_m и z_m — их наклонные пары точек (считаем $\operatorname{Im} z'_m > \operatorname{Im} z_m$), константы λ и λ_1 выбраны так, чтобы у f_j и F_j совпадали коэффициенты c_x и c_y (совпадение c_0 следует из определения F_j).

Пусть $R_m(z) = R_j^m(z) = f_j^m(z) - c_0(f_j^m) \overline{(z - \tau_m)} / (z - \tau_m)$. Тогда

$$r_j(z) = \sum_m R_m(z) - \lambda \sum_m' \omega(d_m) K(z, z_m, z'_m) - \lambda_1 \omega(\delta_1) K(z, 0, \delta_1) = O(|z|^{-2}).$$

В силу леммы 2.1 получим

$$\sum_m (|c_x(R_m)| + |c_y(R_m)|) \leq A_1 \sum_m \omega(d_m) d_m,$$

что (с учетом выбора шага h) не превосходит $2A_1 \sum'_m \omega(d_m) d_m$. Так как в силу 2.5 $c_x(K(z, 0, \delta_1)) = 0$, $c_x(K(z, z_m, z'_m)/(2i)) \geq d_m/4$ и $|c_y(K(z, 0, \delta_1))| = 2\delta_1 = 2 \sum d_m$, отсюда вытекает оценка $\max(|\lambda|, |\lambda_1|) \leq A_2$ и, следовательно, нужная оценка $|\lambda_\ell|$ леммы 6.1.

Также в силу леммы 2.1 ($k = 1$) и регулярности $\omega(\delta)$

$$\max(|R_m(z)|, |\omega(d_m)K(z, z_m, z'_m)|) \leq A\omega\left(\frac{d_m}{4}\right) \min\left(1, \frac{d_m}{4|z - t_m|}\right). \quad (6.2)$$

Так как круги $2B(t_m, d_m/4)$ попарно не пересекаются и $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Дини, отсюда вытекает оценка 1) леммы 6.1 для $\sum |R_m(z)|$ и $\sum' |\omega(d_m)K(z, z_m, z'_m)|$ (и, следовательно, для $|r_j(z)|$). Фактически, это простой частный случай леммы 3.1 (ii) [3]. Оценка 2) немедленно следует из (6.2) и $\sum d_m = \delta_1 \leq 2\delta$.

В случае, когда ни один из квадратов не будет отмечен, доказательство леммы 6.1 только упрощается. Если множество E расположено на оси Ox , то из непрерывности $f_j(z)$ следует, что $c_x(f_j) = 0$ (и $F_j(z) = c_0(f_j)\bar{z}/z + \lambda_1\omega(\delta_1)K(z, 0, \delta_1)$). Если найдется $t \in E$, $\operatorname{Im} t \neq 0$, то возьмем h таким, чтобы $\omega(2^{-h}\delta_1)\delta_1 \leq \omega(\delta_1)|\operatorname{Im} t|$, и в (6.1) заменим $\lambda \sum'_m \omega(d_m)K(z, z_m, z'_m)$ на $\lambda\omega(\delta_1)K(z, 0, t)$.

Лемма доказана. Тем самым доказательство теоремы 2 завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. № 6. С. 141–199.
- [2] Балк М. Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники. Фундамент. направл. Т. 85. М.: ВИНТИ, 1991. С. 187–246.
- [3] Verdera J. On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator // Pacific J. Math. 1993. V. 159. P. 379–396.
- [4] Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1970.
- [5] Harvey R., Polking J. Removable singularities of solutions of linear partial differential equations // Acta Math. 1970. V. 125. P. 39–56.
- [6] David G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe // Ann. sci. E. N. S. 1984. V. 17. № 1. P. 157–189.
- [7] Nguyen Xuan Uy. An extremal problem on singular integrals // Amer. J. Math. 1980. V. 102. № 2. P. 279–290.
- [8] Парамонов П. В. О гармонических приближениях в C^1 -норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 10. С. 1341–1365.
- [9] Парамонов П. В. Некоторые новые критерии равномерной приближаемости функций рациональными дробями // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 9. С. 97–112.