Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Дел Морал, М. Дуази, О приложениях теории оптимизации Маслова, *Матем. заметки*, 2001, том 69, выпуск 2, 262–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:58:53

УДК 517

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ МАСЛОВА

П. Дел Морал, М. Дуази

Теория оптимизации Маслова недавно появилась как новая ветвь функционального анализа для изучения детерминированных задач теории управления и уравнений Гамильтона–Якоби. Основная цель настоящей работы состоит в использовании идемпотентного “стохастического” исчисления для изучения неподвижных точек сжимающих отображений в пространствах состояний, которые не обязательно конечны. Мы покажем, что эти неподвижные точки могут рассматриваться как $(\max, +)$ -аналоги инвариантных мер марковских полугрупп. Во второй части настоящей работы мы вводим $(\max, +)$ -аналог формулы Дынкина для теории стохастических процессов и применяем эту формулу для изучения свойств устойчивости процессов Беллмана–Маслова.

Библиография: 19 названий.

Введение. Идемпотентное “стохастическое” исчисление Маслова позволяет развить теорию оптимизации до такого же уровня общности, какой имеют теория вероятностей и теория стохастических процессов. Такая вероятностная интерпретация детерминированных задач оптимизации дает твердую основу для изучения уравнений Гамильтона–Якоби, возникающих в задачах нелинейного управления и математической морфологии (см., например, [1]). Публикация Литвиновым и Масловым так называемого принципа соответствия для идемпотентного исчисления в работе [2] содержит очень точный и полезный обзор связей между идемпотентным анализом и широким кругом смежных областей.

Основная цель настоящей работы состоит в применении идемпотентного исчисления для изучения устойчивости процессов Беллмана–Маслова и неподвижных точек сжимающих преобразований в терминах $(\max, +)$ -аналогов инвариантных мер марковских полугрупп. Мы будем использовать классические понятия пространства действия (performance space), независимости, условных ожиданий и процессов Беллмана–Маслова, представленные в [1] (см. также [3] или [4]).

Ключевая идея состоит в замене в структурных аксиомах теории вероятностей классического полукольца положительных чисел $(\mathbb{R}_+, +, \cdot, 0, 1)$ идемпотентным полукольцом

$$\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot, 0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0).$$

Этот новый подход позволяет использовать в полной мере далеко продвинутую теорию идемпотентного анализа [5]–[9].

Работа выполнена при поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 95-91.

Статья имеет следующую структуру. Первый раздел посвящен изучению неподвижных точек сжимающих преобразований на (необязательно конечных) пространствах состояний. Такие преобразования были изучены Колокольцовым, Нуссбаумом и Масловым. В нашем случае будет показано, что такие точки являются $(\max, +)$ -аналогами инвариантных вероятностных мер для полугрупп Беллмана с дискретным временем. Мы обсуждаем задачу о существовании инвариантных мер и предлагаем несколько явных представлений для таких объектов. Мы также обсудим приложения этого подхода к анализу поведения алгоритмов обобщенного моделируемого замораживания¹ при больших значениях времени и алгоритмов генетического типа. Во втором разделе мы описываем $(\max, +)$ -аналог знаменитой формулы Дынкина в теории стохастических процессов. Будет показано, что оператор Гамильтона является $(\max, +)$ -аналогом классического дифференциального оператора Колмогорова в теории стохастических процессов. Кроме того, предложен критерий устойчивости для качественного анализа свойств процессов оптимизации, на основе которого действие (performance) данного допустимого подмножества управлений может быть легко оценено.

1. Инвариантные меры цепей Беллмана–Маслова. Пусть четверка $(\{X_n; n \geq 0\}, \Omega, \mathbf{B}(\Omega), \mathbb{P}_\mu)$ является E -значной однородной по времени цепью Беллмана–Маслова с плотностью действия перехода $\mathbb{P}(x/y)$ и начальной мерой действия $\mu \in \mathbf{M}(E)$ (т.е. $\mu: E \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ является полунепрерывной сверху функцией с компактными множествами уровня и $\sup_E \mu = 1$). Напомним, что конечномерные действия могут быть выражены в терминах μ и $\mathbb{P}(x/y)$. Более точно, для любых $n \geq 0$ и $A \in \mathbf{B}(E^{n+1})$ имеет место соотношение

$$\mathbb{P}_\mu((X_0, \dots, X_n) \in A) = \sup \left\{ \mu(x_0) + \sum_{p=1}^n \mathbb{P}(x_p/x_{p-1}) \mid (x_0, \dots, x_n) \in A \right\}.$$

Если мера μ сконцентрирована в точке x_0 (т.е. $\mu(x) = 1$, если $x = x_0$, и 0 в остальных случаях), мы пишем $\mathbb{P}_{x_0}$ вместо $\mathbb{P}_\mu$ и, как обычно,

$$\mathbb{P}((X_0, \dots, X_n) \in A / X_0 = x_0) = \mathbb{P}_{x_0}((X_0, \dots, X_n) \in A).$$

Всюду в этом разделе мы предполагаем, что

- (E, d_E) является компактным метрическим пространством;
- $(x, y) \in E \times E \rightarrow \mathbb{P}(x/y) \in \mathbb{R}_{\max}$ является непрерывным отображением таким, что

$$\rho(\mathbb{P}(x/y), \mathbb{P}(x/z)) \leq C d_E(y, z) \quad (1)$$

для некоторой конечной постоянной, не зависящей от $x, y, z \in E$.

При этих условиях действие перехода $\mathbb{P}(x/y)$ порождает два оператора оптимизации. Первый действует на непрерывные функции $f \in C(E)$, а второй – на плотности действия $\mu \in \mathbf{M}(E)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}f(x) &= \int_E^\oplus f(y) \odot \mathbb{P}(y/x) \odot dy \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in E} f(y) + \mathbb{P}(y/x), \\ \mu\mathbb{P}(x) &= \int_E^\oplus \mathbb{P}(x/y) \odot \mu(y) \odot dy \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{y \in E} \mathbb{P}(y/x) + \mu(y). \end{aligned} \quad (2)$$

¹Эта терминология (моделируемое замораживание) указывает на стохастические алгоритмы поиска, которые зависят от параметра типа температуры, стремящегося к нулю, когда момент времени стремится к бесконечности (см., например, [10]).

Чтобы убедиться, что эти две операции корректно определены, мы прежде всего заметим, что отображение

$$(x, y) \in E \times E \rightarrow \mathbb{P}(x/y) \odot \mu(y) \in \mathbb{R}_{\max}$$

является плотностью действия; из предложения 2.4 в [1] следует, что маргинал $\mu\mathbb{P}$, заданный формулой (2), является корректно определенной плотностью действия на E . С другой стороны, используя неравенство (1), можно убедиться, что

$$\rho(\mathbb{P}f(x), \mathbb{P}f(y)) \leq C d_E(x, y),$$

и поэтому $\mathbb{P}$ является феллеровским оператором в том смысле, что $\mathbb{P}(C(E)) \subset C(E)$, и первая операция в (2) корректно определена. Будем обозначать через $\mathbb{P}^n(x/y)$ n -шаговые переходы, заданные формулой

$$\mathbb{P}^n(x/z) = \int_E^{\oplus} \mathbb{P}(x/y) \odot \mathbb{P}^{n-1}(y/z) \odot dy, \quad n \geq 1.$$

Нетрудно доказать следующий результат, который является $(\max, +)$ -аналогом теоремы о классических феллеровских марковских полугруппах в теории случайных процессов.

Предложение 1.1. *Для любого времени $n \geq 1$ и для любой пробной функции $f \in C(E)$ функция*

$$x \in E \longrightarrow \mathbb{P}^n f(x) = \mathbb{E}(f(X_n) | X_0 = x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E^{\oplus} f(y) \odot \mathbb{P}^n(y/x) \odot dy$$

непрерывна и $\{\mathbb{P}^n; n \geq 0\}$ является монотонной полугруппой $(\oplus, \odot)$ -линейных операторов на $C(E)$, т.е.

- (1) $\mathbb{P}^0 = \text{Id}$ и для любых $m, n \geq 0$ выполнено соотношение $\mathbb{P}^m \circ \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^{m+n}$;
- (2) для любых $f, g \in C(E)$ таких, что $f \leq g$, выполнено неравенство $\mathbb{P}^n f \leq \mathbb{P}^n g$ для любого $n \geq 0$;
- (3) для любых $f, g \in C(E)$ и $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ и $n \geq 0$ выполнено соотношение

$$\mathbb{P}^n(a \odot f \oplus b \odot g) = a \odot \mathbb{P}^n f \oplus b \odot \mathbb{P}^n g.$$

Такие полугруппы возникают при анализе задач оптимального управления с терминальными штрафами. В указанной постановке множество пробных функций $C(E)$ представляет класс терминальных штрафов, и для любой штрафной функции f функция $\mathbb{P}^n f$ может быть записана в более явной форме:

$$\mathbb{P}^n f(x_0) = \sup \left\{ \sum_{m=1}^n \mathbb{P}(x_m/x_{m-1}) + f(x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in E \right\}.$$

Одна из задач состоит в изучении асимптотического поведения операторов $\mathbb{P}^n$ при $n \rightarrow \infty$. Эта задача нетривиальна главным образом потому, что преобразование $\mathbb{P}$ (не-строго) сжимающее. Более точно, из равенства

$$\rho(\mathbb{P}f, \mathbb{P}g) = \sup_{x \in E} \rho(\mathbb{P}f(x), \mathbb{P}g(x))$$

следует, что

$$\rho(\mathbb{P}f, \mathbb{P}g) \leq \rho(f, g) \sup_{x, y \in E} \exp \mathbb{P}(x/y) = \rho(f, g).$$

Изучение $(\max, +)$ -полугрупп было начато в [5], [6], [9], [11], [12] (полную библиографию по этой тематике см. также в [2]). Наиболее точные работы принадлежат Колокольцову (см. [9]), который исследовал существование собственных значений и затронул некоторые приложения в математической экономике, теории игр и стохастическом оптимальном управлении. Абстрактный спектральный анализ таких преобразований детально изучался в работах Маслова–Самборского [9].

Основная цель этого раздела состоит в вероятностном описании неподвижных точек таких преобразований. При изучении асимптотик марковских процессов инвариантные вероятностные меры играют ключевую роль. Здесь мы вводим аналогичное понятие для меры действия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Мера действия π на E со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$ называется $\mathbb{P}$ -инвариантной, если $\pi = \pi\mathbb{P}$. Мера действия π на E со значениями в $\mathbb{R}_{\max}$ называется $\mathbb{P}$ -субинвариантной, если $\pi \geq \pi\mathbb{P}$ (т.е. $\pi(x) \geq \pi\mathbb{P}(x)$ для любого $x \in E$).

В силу линейности если π_1 и π_2 являются инвариантными (соответственно субинвариантными) мерами действия и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\max}$, то мера $\alpha \odot \pi_1 \oplus \beta \odot \pi_2$ также является инвариантной (соответственно субинвариантной). Подмножество инвариантных (соответственно субинвариантных) действий является выпуклым подмножеством в $\mathbf{M}(E)$ (соответственно $(\oplus, \odot)$ -полумодуле плотностей действий на E).

Хорошо известно, что вероятности запрета (taboo probabilities) дают явное описание инвариантных мер (см., например, [13]). Теперь удобно ввести некоторые дополнительные определения. Пусть

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}, \quad x \in E,$$

и

$$x_0 \mathbb{P}^n(x/x_0) = \mathbb{P}(X_n = x, \tau_{x_0} \geq n/X_0 = x_0), \quad x, x_0 \in E, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Каждому x_0 из E мы сопоставим идемпотентную меру запрета π_{x_0} следующим образом:

$$\pi_{x_0}(x) = \bigoplus_{n \geq 1} x_0 \mathbb{P}^n(x/x_0), \quad x \in E. \quad (3)$$

По определению τ_{x_0} идемпотентная мера π_{x_0} является корректно определенной мерой действия. Чтобы убедиться в этом, нам достаточно просто заметить, что

$$\begin{aligned} \pi_{x_0}(E) &= \int_E^{\oplus} \pi_{x_0}(x) \odot dx = \bigoplus_{n \geq 1} \left[\int_E^{\oplus} x_0 \mathbb{P}^n(x/x_0) \odot dx \right] \\ &= \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_{x_0} \geq n/X_0 = x_0) = \mathbb{P}(\tau_{x_0} \geq 1/X_0 = x_0) = 1. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Для всех x_0 из E мера π_{x_0} является $\mathbb{P}$ -субинвариантной. Если x_0 удовлетворяет условию $\mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty/x_0) = 1$, то π_{x_0} является $\mathbb{P}$ -инвариантной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned}\pi_{x_0}\mathbb{P}(x) &= \int_E^{\oplus} \left[\bigoplus_{n \geq 1} x_0 \mathbb{P}^n(y/x_0) \right] \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy \\ &= [\pi_{x_0}(x_0) \odot \mathbb{P}(x/x_0)] \oplus \int_{E \setminus \{x_0\}}^{\oplus} \bigoplus_{n \geq 1} x_0 \mathbb{P}^n(y/x_0) \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy.\end{aligned}$$

Тогда из принципа Беллмана (см., например, раздел 2.4 в [1]) следует

$$\int_{E \setminus \{x_0\}}^{\oplus} \bigoplus_{n \geq 1} x_0 \mathbb{P}^n(y/x_0) \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy = x_0 \mathbb{P}^{n+1}(x/x_0),$$

и поэтому

$$\pi_{x_0}\mathbb{P}(x) = [\pi_{x_0}(x_0) \odot \mathbb{P}(x/x_0)] \oplus \left[\bigoplus_{m \geq 2} x_0 \mathbb{P}^m(x/x_0) \right].$$

Поскольку $\mathbb{P}(x/x_0) = x_0 \mathbb{P}^1(x/x_0)$ и $\pi_{x_0}(x_0) \in [0, 1]$, мы очевидно получаем $\pi_{x_0}(x_0) \odot \mathbb{P}(x/x_0) \leq x_0 \mathbb{P}^1(x/x_0)$, и поэтому

$$\pi_{x_0}\mathbb{P}(x) \leq \bigoplus_{m \geq 1} x_0 \mathbb{P}^m(x/x_0) = \pi_{x_0}(x), \quad x \in E.$$

Отсюда нетрудно заключить, что мера π_{x_0} является $\mathbb{P}$ -субинвариантной. Кроме того, если $\pi_{x_0}(x_0) = 1$, то предыдущее неравенство превращается в равенство. Теперь мы можем заметить, что из равенства

$$\pi_{x_0}(x_0) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_{x_0} = n/X_0 = x_0) = \mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty/X_0 = x_0)$$

непосредственно получается завершение доказательства.

Благодаря $(\max, +)$ -исчислению условие $\mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty/X_0 = x_0) = 1$ допускает более практичное описание.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Для $x_0 \in E$ имеет место следующее утверждение:*

$$\mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty/X_0 = x_0) = 1 \iff \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}^n(x_0/x_0) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$L(x_0, x_0) = \mathbb{P}(\tau_{x_0} < \infty / X_0 = x_0) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}(\tau_{x_0} = n / X_0 = x_0)$$

и

$$U(x_0, x_0) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}^n(x_0/x_0).$$

Используя момент первого достижения точки x_0 , и для $n \geq 2$ имеем

$$\mathbb{P}^n(x_0/x_0) = \mathbb{P}(\tau_{x_0} = n / X_0 = x_0) \oplus \bigoplus_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}(\tau_{x_0} = j / X_0 = x_0) \odot \mathbb{P}^{n-j}(x_0/x_0).$$

Суммируя по $n \in \mathbb{N}^*$, мы получаем $U(x_0, x_0) = L(x_0, x_0) \oplus [L(x_0, x_0) \odot U(x_0, x_0)]$. Отсюда легко следует, что $U(x_0, x_0) = 1 \Leftrightarrow L(x_0, x_0) = 1$.

Как и в классической теории вероятностей, выражение для π_{x_0} может быть переписано следующим образом

$$\pi_{x_0}(x) = \mathbb{E}_{x_0} \left[\bigoplus_{n=1}^{\tau_{x_0}} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}} \right], \quad x \in E, \quad (4)$$

где $\mathbb{E}_{x_0}$ является $(\oplus, \odot)$ -интегралом по распределению действия процесса с начальным состоянием $X_0 = x_0$. В заключение отметим свойство максимальности меры действия π_{x_0} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Если мера μ является $\mathbb{P}$ -инвариантной и $\mu(x_0) = 1$, то $\mu \leq \pi_{x_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что

$$\mu(x) \leq \bigoplus_{k=1}^n x_0 \mathbb{P}^k(x/x_0),$$

проводя индукцию по параметру $n \geq 1$. Проверим, что это неравенство выполнено при $n = 1$. Если мера μ является инвариантной и $\mu(x_0) = 1$, то мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$\mu(x) = \mu \mathbb{P}(x) \leq \mu(x_0) \odot \mathbb{P}(x/x_0) \leq \mathbb{P}(x/x_0) \leq x_0 \mathbb{P}^1(x/x_0).$$

Используя предположение индукции, мы также имеем

$$\begin{aligned} \mu(x) &= [\mu(x_0) \odot \mathbb{P}(x/x_0)] \oplus \int_{E \setminus \{x_0\}}^{\oplus} \mu(y) \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy \\ &\leq x_0 \mathbb{P}^1(x/x_0) \oplus \int_{E \setminus \{x_0\}}^{\oplus} \bigoplus_{k=1}^n x_0 \mathbb{P}^k(y/x_0) \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy. \end{aligned}$$

Тогда из соотношения

$$\int_{E \setminus \{x_0\}}^{\oplus} x_0 \mathbb{P}^k(y/x_0) \odot \mathbb{P}(x/y) \odot dy = x_0 \mathbb{P}^{k+1}(x/x_0)$$

следует, что

$$\mu(x) \leq \bigoplus_{k=1}^{n+1} x_0 \mathbb{P}^k(x/x_0).$$

Устремляя n к бесконечности, получим, что $\mu \leq \pi_{x_0}$.

Предположим теперь, что E является *конечным* множеством, например $E = \{1, \dots, n\}$. Тогда свойство инвариантности действия π на E может быть записано в более классической форме

$$\pi(i) = \max_{j=1, \dots, n} (\mathbb{P}(i/j) + \pi(j)), \quad i \in E.$$

Согласно предложению 1.4 мера запрета π_{i_0} , определенная формулой (3), является инвариантной, если существует точка $i_0 \in E$ такая, что $\bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}^n(i_0/i_0) = \mathbf{1}$. Поскольку множество E конечно, это условие также эквивалентно условию

$$\bigoplus_{i \in E} \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{P}^n(i/i) = \mathbf{1}$$

или для обычной алгебры

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(m_{i+1}/m_i) \right\} = \mathbf{1}, \quad (5)$$

где $\max$ вычисляется по всем конечным подмножествам $\{m_1, \dots, m_n\}$ множества E и $m_{n+1} = m_1$.

Рассмотрим *полный граф* G , ассоциированный с $\{1, \dots, n\}$, и определим $\mathcal{C}$ как множество *контуров* графа G , а $\mathcal{C}_e$ определим как множество *элементарных контуров* графа G (т.е. во втором случае ни одна точка, кроме начальной, не посещается дважды). Если $C \in \mathcal{C}$ и $[m_1, \dots, m_k]$ являются вершинами контура C , мы определим *цену действия* для C по формуле $\mathbb{P}(C) = \bigodot_{i=1}^k \mathbb{P}(m_{i+1}/m_i)$, где $m_{k+1} = m_1$. Тогда условие (5) имеет вид

$$\bigoplus_{C \in \mathcal{C}} \mathbb{P}(C) = \mathbf{1}. \quad (6)$$

С помощью индукции по длине контура C легко выразить $\mathbb{P}(C)$ как *обычную* сумму действий элементарных контуров. Поскольку $\mathbb{P}$ принимает значения в $[-\infty, 0]$, равенство (6) эквивалентно равенству

$$\bigoplus_{C \in \mathcal{C}_e} \mathbb{P}(C) = \mathbf{1}. \quad (7)$$

Если множество $\mathcal{C}_e$ конечно, то (7) означает, что существует контур $C \in \mathcal{C}_e$ такой, что $\mathbb{P}(C) = \mathbf{1}$, или окончательно

$$\exists C = [m_1, \dots, m_k] \in \mathcal{C}_e: \mathbb{P}(m_{i+1}/m_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad m_{k+1} = m_1.$$

Это означает существование элементарного контура, все звенья которого имеют нулевую цену.

При постановке задачи оптимизации предполагается что $\mathbb{P}(\cdot/j)$ является мерой действия для всех j , т.е.

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{P}(i/j) = 1, \quad j \in E,$$

или в обычной алгебре для любого $j \in E$ существует $n_j \in E$ такой, что $\mathbb{P}(n_j/j) = 0$. Тогда *всегда найдется элементарный цикл с нулевой ценой*. Действительно, начиная из точки с номером 1, находим номер n_1 такой, что $\mathbb{P}(n_1/1) = 0$; далее, начиная из точки n_1 , находим n_2 такой, что $\mathbb{P}(n_2/n_1) = 0$, и так далее. После n шагов по крайней мере одна из точек будет посещена дважды и, следовательно, построен элементарный цикл с нулевой ценой. Следующее предложение резюмирует уже полученные результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Если $\mathbb{P}(\cdot/j)$ является мерой действия для всех $j \in E$, то существует по крайней мере один элементарный контур, например $\mathcal{C}_0$, с нулевой ценой. Для всех i из $\mathcal{C}_0$ мера π_i , определенная в (3), является инвариантной. Для любого j из E мера $\pi_i(j)$ может быть записана следующим образом: $\pi_i(j) = \max\{\mathbb{P}(C)/C \in \mathcal{D}_{ij}\}$, где $\mathcal{D}_{ij}$ является множеством прямых путей из i в j , т.е. путей без циклов и без повторного посещения i . Для любых i и k из $\mathcal{C}_0$ имеем: $\pi_i = \pi_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теперь ясно, какую новую форму имеет мера π_i : все контуры, принадлежащие пути из i в j , могут только уменьшить значение полной цены. Для i и k из $\mathcal{C}_0$ получаем, что $\pi_i = \pi_k$.

Так же как для марковского процесса, возникают вопросы о сходимости $\mu\mathbb{P}^n$ всех начальных μ и связи между инвариантными мерами. Первый подход к проблеме в операторных терминах был предложен Нуссбаумом [14]. Другой подход развит в работе Баччелли и других [15]. Он состоит в непосредственном изучении асимптотического поведения $\mathbb{P}^{\otimes n}$ для того, чтобы получить аналог теоремы Перрона–Фробениуса. В их работе существование контура нулевой цены возникает как предположение (тем не менее, авторы показывают, как можно получить общую теорию). Те же свойства цикличности получены, но выражены в терминах (max, +)-исчисления и соответствующей теории графов. Например, постоянная цикличности p связана с длиной элементарных контуров нулевой цены (см. теоремы 3.108 и 3.112 в [15]).

Схема, введенная в предыдущих разделах, позволяет нам дать вероятностное описание инвариантной меры действия относительно некоторой (max, +)-полугруппы $\mathbb{P}(x/y)$. В заключительной части этого раздела мы обсудим связи между этими неподвижными точками и функцией виртуальной энергии, возникающей при анализе поведения на больших интервалах времени стохастических алгоритмов поиска из некоторого класса таких, как алгоритмы обобщенного моделируемого замораживания (см., например [10] и приведенные там ссылки).

Далее нам удобно ввести некоторые дополнительные определения. До конца этого раздела предполагается, что E – конечное пространство состояний. Последующий материал является изложением основных определений, касающихся описания функции виртуальной энергии, которые принадлежат Ботту и Мэйберри [16] и также представлены в книге Венцеля и Фрейдлина [17].

Пусть $x \in E$. Граф, состоящий из дуг $y \rightarrow z$ с $(y, z) \in E \times E \setminus \{x\} \times E$ и $y \neq z$, называется x -графом над E , если он удовлетворяет следующим условиям:

- каждая точка $y \neq x$ является начальной точкой ровно для одной дуги;
- в графе не существует замкнутых циклов.

Через $G(x)$ мы обозначаем множество x -графов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Обозначим через $\nu: E \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ отображение, заданное формулой*

$$\nu(x) = \sup_{g \in G(x)} \sum_{(y \rightarrow z) \in g} \mathbb{P}(y/z).$$

Тогда нормализованная мера действия $\mu(x) = \nu(x) - \sup_{y \in E} \nu(y)$, связанная с ν , является инвариантной мерой относительно перехода $\mathbb{P}(x/y)$, т.е. $\mu\mathbb{P} = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно проверить, что $\nu(x) = \sup_y (\nu(y) + \mathbb{P}(y/x))$ для любого $x \in E$.

Пусть g^* является элементом $G(x)$ таким, что

$$\nu(x) = \sum_{(y \rightarrow z) \in g^*} \mathbb{P}(y/z).$$

При сделанных предположениях существует точка $y(x) \in E$ такая, что $\mathbb{P}(y(x)/x) = 0$. По определению g^* также существует путь

$$p_0 = y \rightarrow p_1 \rightarrow \cdots \rightarrow p_{r-1} \rightarrow p_r = x$$

заданной длины r такой, что $(p_{k-1} \rightarrow p_k) \in g^*$ для любого k . Если мы обозначим через $\tilde{g}$ граф, полученный из g^* заменой дуги $(p_{r-1} \rightarrow x)$ на $(x \rightarrow y(x))$, мы, очевидно, получим

$$\tilde{g} \in G(p_{r-1}) \quad \text{и} \quad \sum_{(e_1 \rightarrow e_2) \in \tilde{g}} \mathbb{P}(e_2/e_1) + \mathbb{P}(x/p_{r-1}) = \nu(x),$$

и поэтому

$$\mathbb{P}(x/p_{r-1}) + \nu(p_{r-1}) \geq \nu(x).$$

Для завершения доказательства предложения мы заметим, что для любого $y \in E$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}(x/y) + \nu(y) = \sup \left\{ \sum_{(e_1 \rightarrow e_2) \in g} \mathbb{P}(e_2/e_1) \right\} \leq \nu(x),$$

где верхняя грань берется по всем графам g , имеющим контур в точке x .

При изучении алгоритмов моделируемого замораживания функция μ называется *виртуальной энергией, ассоциированной с функцией стоимости виртуальной связи* $\mathbb{P}(x/y)$. В такой постановке алгоритм моделируемого замораживания является процессом случайного поиска $\{\xi_t : t \geq 0\}$, связанного со схемой охлаждения, обеспечивающей сходимость ξ_t по вероятности при $t \rightarrow \infty$ к множеству точек глобального минимума функции виртуальной энергии (мы адресуем читателей к классическим работам на эту

тому и к [10], [18]). В работе [19] мы обсуждаем приложения таких алгоритмов к изучению сходимости алгоритмов генетического типа. В этом случае пространством состояний является произведение $E = S^N$, где S является вспомогательным конечным множеством и N – число частиц, используемых в генетическом алгоритме. Приведем простой пример функции стоимости связи $\mathbb{P}(x/z)$, возникающей в подобной ситуации:

$$\mathbb{P}(z/x) = \sup \left\{ - \sum_{i=1}^N d(x^i, y^i) - \sum_{i=1}^N (f(z^i) - \hat{f}(y)) \right\}, \quad (8)$$

где верхняя грань берется по всем $y \in S^N$ таким, что

$$\{z^i \mid 1 \leq i \leq N\} \subset \{y^i \mid 1 \leq i \leq N\}$$

и

- 1) $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ является заданной функцией;
- 2) $d(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если } u = v; \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$
- 3) $\hat{f}(y) = \min\{f(y^i); 1 \leq i \leq N\}$.

Заметим, что первый член в правой части уравнения (8) минимален, если частицы $x = (x^1, \dots, x^N)$ остаются в начальном состоянии, так что $x = y$, а второй член обращается в нуль, как только все частицы y^i , $1 \leq i \leq N$, передвигаются в наилучшее положение такое, что $\{z^i \mid 1 \leq i \leq N\} = \{y^i \mid 1 \leq i \leq N\}$ и $f(z^i) = \hat{f}(y)$ для любых $1 \leq i \leq N$.

В такой постановке основной момент состоит в доказательстве того, что все частицы найдут точки глобального минимума функции $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Другими словами, мы должны убедиться, что

$$\left\{ x \in S^N; \mu(x) = \min_E \mu \right\} \subset \left\{ u \in S; f(u) = \min_S f \right\}^N. \quad (9)$$

В [19] мы предложили естественный и основанный на тестовых множествах подход к изучению точек глобального минимума виртуальной энергии. Более точно, мы привели условия для того, чтобы заданное множество $H \subset E$ содержало множество точек, где достигается глобальный минимум функции μ , и применили этот критерий для доказательства того, что включение (9) имеет место для достаточно больших размеров популяции N .

2. Формула Дынкина. В этом разделе мы обсудим $(\max, +)$ -аналог формулы Дынкина. В рассматриваемой постановке $(\Omega, \mathbf{B}(\Omega))$ обозначает хаусдорфово топологическое пространство управлений $\omega = (\omega_t)_{t \in (0, T)}$, $T > 0$, принимающих значения в метрическом пространстве U . Каждому управлению $\omega \in \Omega$ мы сопоставляем непрерывную траекторию $X(\omega) \in C((0, T), \mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, полагая

$$\begin{cases} \dot{X}(\omega)_t = F(X_t(\omega), \omega_t); \\ X(\omega)_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (10)$$

где $F: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ есть достаточно регулярное отображение такое, что отображение

$$X: \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$$

непрерывно (как обычно, пространство $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ снабжено топологией равномерной сходимости), и поэтому может рассматриваться как процесс оптимизации.

Обозначим через $\mathbb{P}$ меру действия на $(\Omega, \mathbf{B}(\Omega))$ с плотностью

$$\mathbf{p}(\omega) = \int_0^T L(X_t(\omega), \omega_t) dt,$$

где $L: \mathbb{R}^d \times U \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$ является достаточно регулярным отображением таким, что $(\Omega, \mathbf{B}(\Omega), \mathbb{P})$ – корректно определенный базис оптимизации. Мы также предполагаем, что выполнено следующее условие:

УСЛОВИЕ (H0). Для любых $x \in \mathbb{R}^d$ и $s \leq t$ существует управление $\omega \in \Omega$ такое, что

$$\int_s^t L(X_r^{s,x}(\omega), \omega_r) dr = 0,$$

где $\{X_r^{s,x}(\omega) \mid r \in [s, t]\}$ является решением задачи (10) таким, что $X_s^{s,x}(\omega) = x$.

При условии (H0) уже показано, что X является корректно определенным процессом Беллмана–Маслова и условное действие X_t при заданном X_s , $s \leq t$, дается формулой

$$\mathbf{p}_t^X(z|x) = \sup \left\{ \int_s^t L(X_r^{s,x}(\omega), \omega_r) dr \mid \omega \in \Omega: X_t^{s,x}(\omega) = z \right\}.$$

Аналогичным образом можно убедиться, что условное действие $X_{[0,t]}$ при заданном $X_{[0,s]}$ вычисляется по формулам

$$\mathbf{p}_{[0,t]||[0,s]}^X(z|x) = \begin{cases} \sup \left\{ \int_s^t L(X_r^{(s,x_s)}(\omega), \omega_r) dr \mid \omega \in \Omega, X_{[s,t]}^{(s,x_s)}(\omega) = z/[s,t] \right\}, \\ \text{если } z/[0,s] = x, \\ -\infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{[s,t]||[0,s]}^X(y|x) &= \sup \left\{ \int_s^t L(X_r^{(s,x_s)}(\omega), \omega_r) dr \mid \omega \in \Omega, X_{[s,t]}^{(s,x_s)}(\omega) = y \right\} \\ &= \mathbf{p}_{[s,t]|s}^X(y|x_s). \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

УСЛОВИЕ (H1). Для любых $x, p \in \mathbb{R}^d$ существует значение управления $\omega(x, p) \in U$ такое, что

$$\omega(x, p) = \operatorname{Arg} \sup_{u \in U} (p \cdot F(x, u) + L(x, u)),$$

и для всех $s \in [0, T]$ и $x_s \in E$ управление обратной связи

$$t \in [s, T] \rightarrow \omega_t(X_t^{(s,x_s)}(\omega), D\varphi(X_t^{(s,x_s)}(\omega)))$$

является сужением на $[s, T]$ некоторого управления $\omega \in \Omega$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнено условие (H0) и пробная функция $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (H1).

Тогда для любого $t \in [0, T]$ имеем равенство

$$\varphi(X_t) = \varphi(x_0) + \int_0^t H(X_s, D\varphi(X_s)) ds + M_t(X_{[0,t]}),$$

где H – оператор Гамильтона, заданный соотношением

$$H(x, p) = \sup_{u \in U} (p \cdot F(x, u) + L(x, u)),$$

и $M_t: x \in C([0, t], \mathbb{R}^d) \rightarrow M_t(x) \in \mathbb{R}_{\max}$ является $(\max, +)$ -мартингалом в том смысле, что

$$\forall s \leq t \quad \int^{\oplus} M_t(z) \odot \mathbf{P}_{[0,t]||[0,s]}^X(z|x) \odot dz = M_s(x).$$

Кроме того, мы имеем

$$\forall t \in [0, T] \quad \int^{\oplus} M_t(z) \odot \mathbf{P}_{[0,t]}^X(z) \odot dz = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого управления $\omega \in \Omega$ мы, очевидно, имеем соотношение

$$\varphi(X_t(\omega)) = \varphi(x_0) + \int_0^t D\varphi(X_s(\omega)) \cdot F(X_s(\omega), \omega_s) ds,$$

и поэтому

$$M_t(X(\omega)) = \int_0^t [D\varphi(X_s(\omega)) \cdot F(X_s(\omega), \omega_s) - H(X_s(\omega), D\varphi(X_s(\omega)))] ds.$$

Отсюда следует, что для любого $s \leq t$ член

$$\int^{\oplus} (M_t(y) - M_s(x)) \odot \mathbf{P}_{[0,t]||[0,s]}^X(y|x) \odot dz$$

равен

$$\sup \left\{ M_t(X^{s;x_s}(\omega)) - M_s(X^{(s,x_s)}(\omega)) + \int_s^t L(X_r^{(s,x_s)}(\omega), \omega_r) dr \mid \omega \in \Omega \right\}.$$

Желаемый результат мы получаем, полагая управление обратной связи равным $r \in [s, T] \rightarrow \omega_r(X_r^{(s,x_s)}(\omega), D\varphi(X_r^{(s,x_s)}(\omega)))$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (формула Дынкина). Пусть условие (H0) выполнено и пробная функция $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (H1). Тогда для любого $x \in E$ имеет место соотношение

$$\mathbb{E} \left(\varphi(X_t^x) - \int_0^t H(X_s^x, D\varphi(X_s^x)) ds \right) = \varphi(x), \quad (11)$$

где $\{X_r^x(\omega): r \in [0, t]\}$ есть решение задачи (10) такое, что $X_0^x(\omega) = x$.

ПРИМЕР. Простейший случай процесса оптимизации для классического детерминированного оптимального управления задается, как и ранее, при $d = 1$, $\Omega = L^2([0, T]; \mathbb{R})$ и

$$L(x, u) = -\frac{u^2}{2} \quad \text{и} \quad F(x, u) = ax + bu, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{R}.$$

Можно немедленно заметить, что гамильтониан, связанный с L , равен

$$H(x, p) = pax + \frac{1}{2}|pb|^2.$$

Если $L^2([0, T]; \mathbb{R})$ снабжено слабой топологией, то $(\Omega, \mathbf{B}(\Omega), \mathbb{P})$ является корректно определенным базисом оптимизации и для плотности действия справедливо выражение

$$\mathbf{p}(\omega) = -\frac{1}{2} \int_0^T \omega_s^2 ds.$$

С другой стороны, отображение $X: \omega \in L^2([0, T]; \mathbb{R}) \rightarrow X(\omega) \in C([0, T], \mathbb{R})$, задаваемое формулами

$$\begin{cases} \dot{X}(\omega)_t = aX_t(\omega) + b\omega_t, \\ X(\omega)_0 = x_0, \end{cases} \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

является непрерывным, и поэтому $(\Omega, \mathbf{B}(\Omega), \mathbb{P}, X)$ является корректно определенным процессом Беллмана–Маслова с плотностью действия $\mathbf{p}^X: C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\max}$, заданной формулой

$$\mathbf{p}^X(x) = -\frac{1}{2} \int_0^T (\dot{x}_s - ax_s)^2 ds,$$

если интеграл существует, и $-\infty$ в противном случае. Как можно видеть, для этого простого примера гипотеза (H0) выполнена. Нетрудно также проверить, что для любой пробной функции $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ оптимальная стратегия

$$t \in [s, T] \rightarrow \omega_t \left(X_t^{(s, x_s)}(\omega), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_t^{(s, x_s)}(\omega)) \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_t^{(s, x_s)}(\omega))b$$

принадлежит $L^2([s, T], \mathbb{R})$. Отсюда следует, что гипотеза (H1) выполнена и формула Дынкина (11) выполнена для гамильтониана

$$H\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x), x\right) = ax \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) + \frac{1}{2}b^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right)^2.$$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы показать, что формула Дынкина позволяет очень простым способом оценить действие заданного множества допустимых управлений.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть предположение (H0) выполнено, пробная функция $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет предположению (H1) и выполнено неравенство

$$H(x, D\varphi(x)) \leq -a \quad \forall x \in A \quad (12)$$

для некоторых $a > 0$ и $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$. Тогда если $x \in A$, то

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega: \forall 0 \leq s \leq t \quad X_s^x(\omega) \in A\}) \leq \varphi(x) - \inf_A \varphi - at. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства формулы (13) заметим, что согласно (11) и (12) выполнено неравенство

$$\varphi(x) \geq \mathbb{E} \left(\left[\varphi(X_t^x) - \int_0^t H(X_s^x, D\varphi(X_s^x)) ds \right] \odot \mathbf{1}_{\{\forall s \in [0, t] \ X_s^x \in A\}}(X^x) \right).$$

Поэтому

$$\varphi(x) \geq \inf_A \varphi + bt + \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \forall 0 \leq s \leq t \ X_s^x(\omega) \in A\}).$$

Иными словами, если пробная функция $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (12), то выполнено условие

$$\sup \left\{ \int_0^t L(X_s^x(\omega), \omega_s) ds \mid \omega \in \Omega: \forall 0 \leq s \leq t \ X_s^x(\omega) \in A \right\} < 0,$$

как только $t > (1/a)(\varphi(x) - \inf_A \varphi)$, и поэтому

$$\sup \left\{ \int_0^t L(X_s^x(\omega), \omega_s) ds \mid \omega \in \Omega: \exists 0 \leq s \leq t \ X_s^x(\omega) \notin A \right\} = 0.$$

Приведенный выше пример дает ясное применение предыдущего следствия. Положим $\varphi(x) = x^2/2$ и пусть $A = [\varepsilon, 1]$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\forall x \in [\varepsilon, 1] \quad H(x, D\varphi(x)) = \left(a + \frac{b^2}{2}\right)x^2 \leq \varepsilon \left(a + \frac{b^2}{2}\right),$$

как только $a + b^2/2 < 0$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}(\forall 0 \leq s \leq t \ \varepsilon \leq X_s^x \leq 1) \leq \frac{x^2}{2} - \inf_{[\varepsilon, 1]} \varphi - \varepsilon \left| a + \frac{b^2}{2} \right| t \leq \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2) - \varepsilon \left| a + \frac{b^2}{2} \right| t,$$

и поэтому для любого $t > 1/(\varepsilon|2a + b^2|)$ выполнена оценка

$$\sup \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \omega_s^2 ds \mid \omega \in \Omega: \forall 0 \leq s \leq t \ \varepsilon \leq X_s^x(\omega) \leq 1 \right\} < -\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Del Moral P., Doisy M. Maslov Idempotent Probability Calculus, part I, part II // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. № 4. С. 735–751; 1999. Т. 44. № 2. С. 384–400.
- [2] Litvinov G., Maslov V.P. Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications. Paris: Institut des Hautes Études Scientifiques, IHES-M-95-33, 1995; Idempotency: Cambridge University Press, 1998.
- [3] Akian M., Quadrat J.P., Viot M. Bellman Processes // 11-eme Conférence Internationale sur l'Analyse et l'Optimisation des Systèmes. École des Mines Sophia-Antipolis, France, 15-16-17 Juin 1994. Lecture Notes in Control and Information Sciences 199 Springer-Verlag.
- [4] Del Moral P. Maslov Optimization Theory: Optimality versus Randomness // Idempotent Analysis and its Applications / ed. V.N. Kolokoltsov and V.P. Maslov: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Идемпотентный анализ как аппарат теории управления и оптимального синтеза // Функциональный анализ и его приложения. 1989. Т. 23. № 1. С. 1–14; Т. II, там же; V. 23. № 4. P. 53–62; // English transl. in Functional Anal. Appl. 1989. V. 23.
- [6] Колокольцов В. Н., Маслов В. П. Общий вид эндоморфизмов в пространстве непрерывных функций со значением в числовом коммутативном полукольце (с операцией $\oplus = \max$) // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 283–287.
- [7] Maslov V. P. Méthodes opératorielles. M.: Мир, 1987.
- [8] Maslov V.P. Quasilinear systems which are linear in some semimoduli // Congrès international sur les problèmes hyperboliques, 13–17 Janvier 1986, Saint Etienne, France.
- [9] Maslov V.P., Samborskii S. N. (eds.) Idempotent Analysis, Advances in Soviet Mathematics, 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.
- [10] Trouvé A. Parallélisation massive du recuit simulé, Thèse de Doctorat, Université Paris XI, Janvier 1993.
- [11] П. И. Дудников, С. Н. Самборский Эндоморфизмы полумодуля над полукольцом с идемпотентной операцией. Киев: Институт математики АН УССР, Препринт № 87-48, 1987.
- [12] Колокольцов В. Н. Полукольцевые аналоги линейной эквивалентности пространств // Всесоюзная школа “Оптимальное управление, геометрия и анализ” Кемерово, 1988, с. 30.
- [13] Meyn S. P., Tweedie R. L. Markov Chains and Stochastic Stability. Springer Verlag, 1993.
- [14] Nussbaum R.D. // Convergence of iterates of a nonlinear operator arising in statistical mechanics, Nonlinearity. 1991. V. 4. P. 1223–1240. U.K.
- [15] Bacelli F., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J. P. Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems: John Wiley and Sons Publ., 1992.
- [16] Bott R., Mayberry J. P. Matrices and trees // Economics Activity Analysis. New York: John Wiley and Sons Publ., 1954.
- [17] Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random Perturbations of Dynamical Systems: Springer Verlag, 1984.
- [18] Miclo L. // Recuit simulé sans potentiel sur un ensemble fini, in Séminaire de Probabilités, Lecture Notes in Mathematics 1526, 47-60: Springer Verlag, 1992.
- [19] Del Moral P., Miclo L. On the convergence and the applications of the generalized simulated annealing // SIAM J. Control Optim. 1999. V. 37. № 4. P. 1222–1250.

(П. Дел Морал) CNRS, Univ. Paul Sabatier, Toulouse

(М. Дуази) CNRS, Toulouse

E-mail: delmoral@cict.fr, doisy@len7.enseeiht.fr.

Поступило

10.04.1998